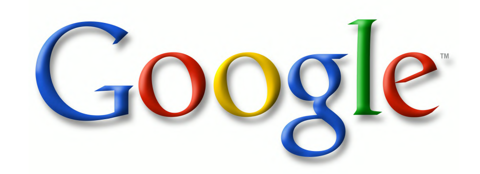
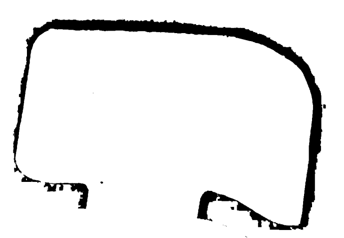
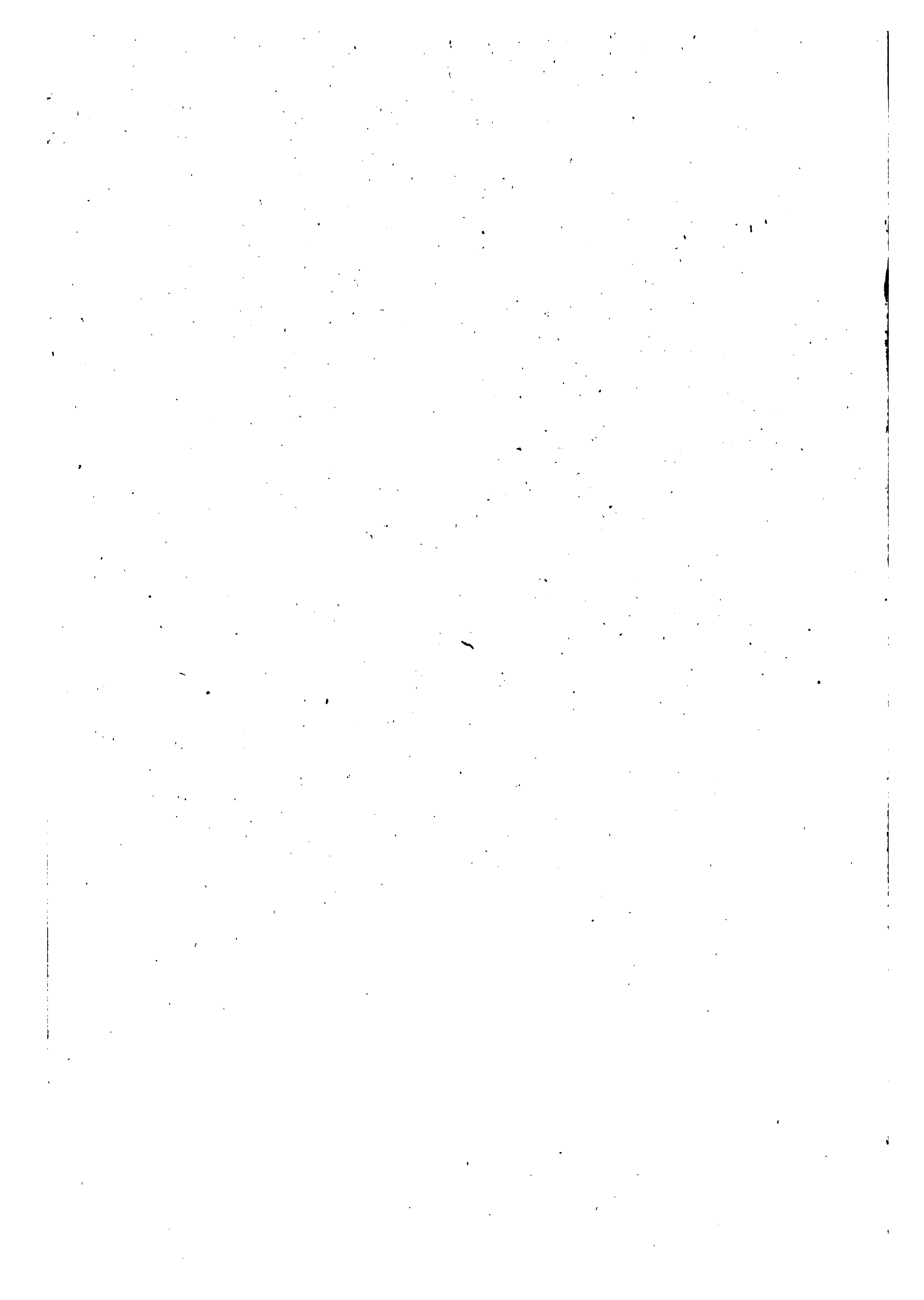






Formänderungsarbeit

der

Eisenbetonbauten bei Biegung

von

KAZIMIR GRABOWSKI
Ingenieur
(Warschau).

Autorisierte Ausgabe.

BERLIN 1906
Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

§ 1. Trotz der unaufhörlichen Fortschritte, welche in letzter Zeit die Methoden der Berechnung der Eisenbetonbauten machen, begegnen wir bei der praktischen Anwendung der Theorie ganzen Reihen voll grober Widersprüche, meist davon herrührend, daß bei diesen Eisenbetonbauten die Definitionen und Grundsätze der Theorie der homogenen Balken angewandt werden. Nehmen wir z. B. eine gewöhnliche balkenförmige Eisenbetonbrücke (Abb. 1). Als Grundlage zur Berechnung der Spannungen im Hauptbalken dieser Brücke dienen uns nur das Biegungsmoment und die Schnittkräfte, so genommen, als ob wir hier einen homogenen, frei auf Stützen ruhenden Balken vor uns hätten; und doch ist der betreffende Balken ganz steif mit den Stützsäulen verbunden, Temperaturveränderungen rufen da auch bedeutende Spannungen hervor, und der Druck der Erde E auf die Stützwände, auf den Balken übergehend, wird ihn mehr oder weniger drücken. Daraus folgt, daß ebenso die positiven Biegungsmomente in den Durchschnitten, wie die negativen auf den Stützen ganz anders sein werden als bei homogenen Balken; außerdem werden auch ziemlich bedeutende Längskräfte exzentrisch wirken, die man gar nicht berücksichtigt. Manche Praktiker nehmen in diesen Fällen ganz willkürlich gewisse Faktoren der Verminderung der Biegungsmomente für freiliegende Balken, doch hat dieses gänzlich unmotivierte Verfahren gar keine theoretische Berechtigung.

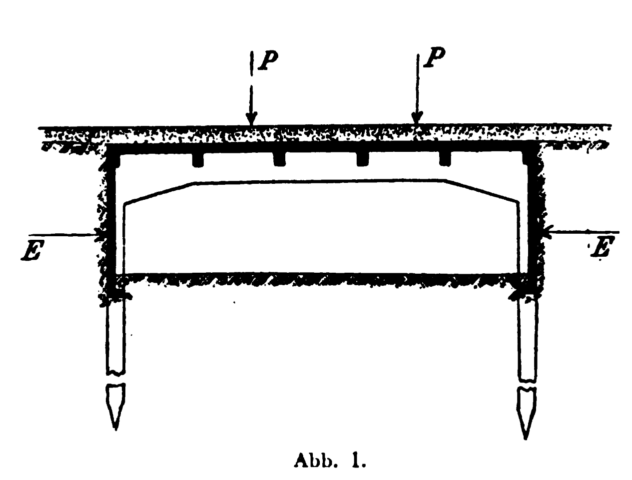


Abb. 1.

Ebenso nimmt man bei den Balken kontinuierlicher Brücken die positiven und negativen Biegungsmomente so wie bei homogenen Balken,

ohne auf die steife Verbindung mit den Stützen zu achten, welche doch ganz die Arbeitsbedingungen des Balkens verändern, die der Berechnung der Biegungsmomente zugrunde gelegt werden.

Ebenso werden z. B. der horizontale Druck und die größten Spannungen im Bogen ohne Gelenke so annähernd berechnet, daß die Resultate ganz und gar nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Wir sehen also, daß auch bei genauesten Rechnungen zur Bestimmung der Spannungen die Resultate nur sehr ungenau sein werden, weil die Arbeitsbedingungen des Balkens schlecht berücksichtigt werden. Die Wichtigkeit dieser Frage zwingt uns nun, andere theoretische Wege einzuschlagen, die uns nur die Elastizitätstheorie der Eisenbetonbalken liefern kann, soweit es die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen gestatten. Mein vielleicht noch unzulänglicher Versuch ist hervorgerufen durch den Wunsch, auch bei Eisenbetonbauten die Theorie des Herrn Prof. H. Müller-Breslau anzuwenden, wie sie dargestellt ist in seinen Werken: „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen" und „Graphische Statik der Baukonstruktionen". Außerdem benutzte ich noch folgende Werke:

H. Müller-Breslau: „Elastizitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Tonnengewölbe".

K. Bach: „Elastizität und Festigkeit".

H. Poincaré: „Leçons sur la théorie de l'élasticité".

J. Weyrauch: „Theorie elastischer Körper".

M. Thullie: „Handbuch der Baustatik".

P. Christophe: „Le béton armé et ses applications".

R. Saliger: „Ueber die Festigkeit von Eisenbetonbauten".

Abschnitt I.

Normale Spannungen in einem Eisenbetonstab bei Biegung.

§ 2. Bevor wir zur eigentlichen Untersuchung schreiten, wollen wir zuerst die Spannungen in einem geraden Eisenbetonstab ausdrücken, wenn er einer Biegung unterworfen ist (Abb. 2). Unter dem Schwerpunkte des Durchschnittes eines solchen Stabes werden wir einen gewissen Punkt C verstehen, dessen Lage wir, wie folgt, bestimmen: Wir vergrößern den Durchschnitt der eisernen Armatur μ mal, wo μ das Verhältnis des Elastizitätskoeffizienten des Eisens und des Betons bei Druck ist; dann betrachten wir den Durchschnitt als homogen; wir finden das statische Moment dieses Durchschnittes in bezug auf eine beliebige Linie MM seiner Ebene und bestimmen aus der Division dieses statischen Moments durch die Fläche des Schnittes die Entfernung des Schwerpunktes von MM. Ist also

die Armatur des Stabes nicht gleichmäßig, so wird die Schwerpunktslinie ACB nicht gerade sein, und die unbeträchtlichen Abweichungen vom Schnitt und Verteilung der Armatur abhängen werden.

In der Entfernung n von der Anfangsfläche I legen wir eine Fläche II senkrecht zur Schwerpunktslinie des Stabes im Punkte C. Fläche II teilt dann den Stab entzwei, und alle inneren Kräfte, welche auf die eine, z. B. linke Seite wirken, ersetzen wir durch die eine Resultante P, welche die Fläche II im Punkte O schneidet. Die Resultante P zerlegen wir in zwei Kräfte: die wagerechte N senkrecht zum Schnitt und die quere Q in der Schnittfläche. Nehmen wir an, daß alle inneren Kräfte die Schwerpunktslinie schneiden, wenn auch im Unendlichen; beachten wir die kleinen Krümmungen der Schwerpunktslinie nicht, so finden wir, daß Q durch den Schwerpunkt C geht. Die Kraft N nehmen wir positiv, wenn sie den linken Teil des Stabes vom festen rechten wegzuziehen bestrebt ist.

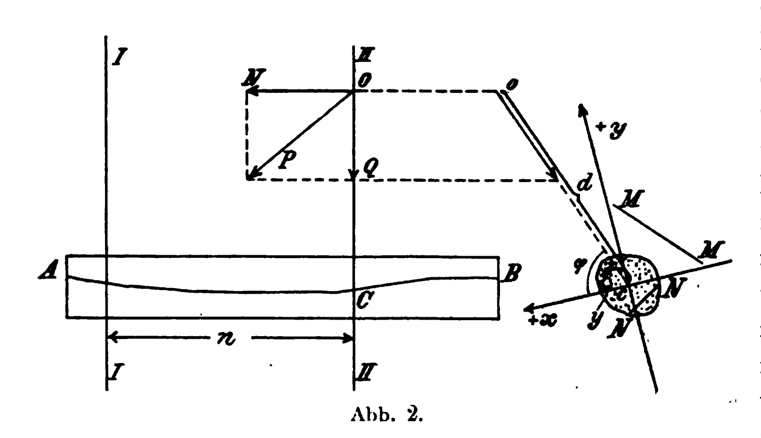


Abb. 2.

Durch Schwerpunkt C legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, und bezeichnen wir den Winkel (Q, X) mit φ, die Entfernung OC mit d und die Koordinaten von O: x_0, y_0. Dann zerfällt das Biegungsmoment $M = Nd$ dieses Schnittes in zwei Teile:

1. Drehungsmoment um die X-Achse

$$M_x = Ny_0 = M \sin \varphi,$$

2. Drehungsmoment um die Y-Achse

$$M_y = Nx_0 = M \cos \varphi.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

§ 3. *Erster Fall.* Die Größen der Kraft N und des Moments M rufen im betrachteten Schnitte nur Druckspannungen hervor. Wir nennen nun:

r die Spannungen im Beton,
ϱ die Spannungen im Eisen,
ε_c den Elastizitätskoeffizienten bei Druck für Beton,
E den Elastizitätskoeffizienten des Eisens,
dB das Differential des Betonschnittes,
dF das Differential des Eisenschnittes.

1*

Dann sind die Spannungen im Schnitte und die äußeren Kräfte durch folgende Gleichgewichtsbedingungen verbunden:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int r\,dB + \int \varrho\,dF \\ M_x &= \int y_b r\,dB + \int y_f \varrho\,dF \\ M_y &= \int x_b r\,dB + \int x_f \varrho\,dF \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wo (x_b, y_b) die Koordinaten der Betonpunkte des Schnittes sind, (x_f, y_f) die Koordinaten der Eisenpunkte. Wir kennen nun den Satz von Navier, wonach ebene Stabschnitte auch nach einer Formänderung eben bleiben. Daher kann die Längsänderung Δdn der unendlich kleinen Entfernung dn im Punkte (x, y) zwischen dem betrachteten und dem unendlich nahe benachbarten dargestellt werden als lineare Funktion der Koordinaten, das heißt:

$$\frac{\Delta dn}{dn} = a' + bx + cy, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo a', b, c für den gegebenen Schnitt Konstanten sind, die wir nun näher untersuchen wollen.

Die bisherigen Untersuchungen, namentlich die des Herrn Prof. M. Thullie zeigen, daß in der Arbeit der Eisenbetonbauten bei der Biegung unter Einfluß immer wachsender Belastungen einige bestimmte Phasen existieren.

Um eine genaue Theorie dieser Bauten zu ermöglichen, nehmen wir für jede Phase gewisse mittlere konstante Werte der Elastizitätskoeffizienten des Betons bei Druck und Zug. Wir nennen diese Koeffizienten entsprechend ε_c und ε_t; außerdem nennen wir den Elastizitätskoeffizienten des Eisens E, den bekanntlich für Beton und Eisen gleichen Dehnungskoeffizienten α, die Temperaturänderung t. Nehmen wir an, daß der untersuchte Stab bei bestimmter Temperatur vor Beginn der Belastung ganz frei von Spannungen war, und daß die Anfangstemperatur in allen Teilchen um dieselbe Temperatur t angewachsen ist. Wir nennen dann die Abkürzung der gedrückten Betonschichten auf die Längeneinheit $\frac{\Delta db_c}{db_c}$, die reduzierte Verlängerung der gezogenen Betonschichten $\frac{\Delta db_t}{db_t}$, die reduzierte Aenderung an der Länge der Eisenelemente $\frac{\Delta df}{df}$ und haben dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta db_c}{db_c} &= \frac{r_c}{\varepsilon_c} + \alpha t \\ \frac{\Delta db_t}{db_t} &= \frac{r_t}{\varepsilon_t} + \alpha t \\ \frac{\Delta df}{df} &= \frac{\varrho}{E} + \alpha t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für unseren Fall haben wir

$$r = \varepsilon_c \left[\frac{\Delta (dn)_b}{(dn)_b} - \alpha t\right]$$

$$\varrho = E\left[\frac{\Delta (dn)_f}{(dn)_f} - \alpha t\right],$$

wo $\frac{\Delta(dn)_b}{(dn)_b}$ die reduzierte Verkürzung der Betonschichten ist und $\frac{\Delta(dn)_f}{(dn)_f}$ die der Eisenschichten.

Mit Rücksicht auf (2) können wir schreiben:

$$r = \varepsilon_c\,[a' + b x_b + c y_b - \alpha t]$$
$$\varrho = E\,[a' + b x_f + c y_f - \alpha t],$$

oder zur Abkürzung für $a' - \alpha t$ nur a schreibend:

$$r = \varepsilon_c\,[a + b x_b + c y_b]$$
$$\varrho = E\,[a + b x_f + c y_f].$$

Die Gleichungen (1) heißen nun:

$$N = \int (a + b x_b + c y_b)\,\varepsilon_c\,dB + \int (a + b x_f + c y_f)\,E\,dF,$$
$$M_x = \int y_b\,(a + b x_b + c y_b)\,\varepsilon_c\,dB + \int y_f\,(a + b x_f + c y_f)\,E\,dF,$$
$$M_y = \int x_b\,(a + b x_b + c y_b)\,\varepsilon_c\,dB + \int x_f\,(a + b x_f + c y_f)\,E\,dF,$$

oder, wenn wir $\frac{E}{\varepsilon_c} = \mu$ annehmen, wie bei der Bestimmung des Schwerpunktes:

$$N = \varepsilon_c\,[a\,(\int dB + \mu \int dF) + b\,(\int x_b\,dB + \mu \int x_f\,dF) + c\,(\int y_b\,dB + \mu \int y_f\,dF)],$$
$$M_x = \varepsilon_c\,[a\,(\int y_b\,dB + \mu \int y_f\,dF) + b\,(\int x_b y_b\,dB + \mu \int x_f y_f\,dF) + c\,(\int y_b^2\,dB + \mu \int y_f^2\,dF)],$$
$$M_y = \varepsilon_c\,[a\,(\int x_b\,dB + \mu \int x_f\,dF) + b\,(\int x_b^2\,dB + \mu \int x_f^2\,dF) + c\,(\int x_b y_b\,dB + \mu \int x_f y_f\,dF)],$$

da wir in diesem Schnitt ε_c und E als Konstanten betrachten.

Wir untersuchen nun eingehend die einzelnen Teile der letzten drei Gleichungen. Der Ausdruck $\int dB + \mu \int dF = \Omega$ kann mit „Gesamtschnitt des Stabes" bezeichnet werden; ein solcher Schnitt wird erhalten durch μmaliges Vergrößern des Eisenschnittes und Hinzunahme des Betonschnittes.

Die Ausdrücke $\int x_b\,dB + \mu \int x_f\,dF$ und $\int y_b\,dB + \mu \int y_f\,dF$ sind „die statischen Momente" des Schnittes in bezug auf die Achsen X und Y. Da nun 1) die Achsen durch dementsprechend gewählten Schwerpunkt gelegt sind und 2) die Differentiation sich auf alle Teilchen erstreckt, so darf man diese statischen Momente gleich Null setzen.

Die Ausdrücke $\int x_b^2\,dB + \mu \int x_f^2\,dF$ und $\int y_b^2\,dB + \mu \int y_f^2\,dF$ werden entsprechend „die Trägheitsmomente" sein und der Ausdruck $\int x_b y_b\,dB + \mu \int x_f y_f\,dF$ das Zentrifugalmoment des Schnittes in bezug auf beide Achsen. Wählen wir nun für die Koordinatenachsen immer die Hauptachsen des Schnittes, so wird bekanntlich das Zentrifugalmoment immer gleich Null sein.

Nennen wir also:

$$\int x_b^2\,dB + \mu \int x_f^2\,dF = I_y$$
$$\int y_b^2\,dB + \mu \int y_f^2\,dF = I_x,$$

so haben wir:

$$N = \varepsilon_c a \Omega$$
$$M_x = \varepsilon_c c I_x$$
$$M_y = \varepsilon_c b I_y.$$

Dabei:

$$a = \frac{N}{\varepsilon_c \Omega}; \qquad b = \frac{M_y}{\varepsilon_c I_y}; \qquad c = \frac{M_x}{\varepsilon_c I_c}$$

und

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{N}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} x_b + \frac{M_x}{I_x} y_b \\ \varrho &= \mu\left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} x_f + \frac{M_x}{I_x} y_f\right) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ist nun $\varphi = 90^\circ$, wirkt also Q in der Richtung der Y-Achse, dann ist:

$$M_x = M \sin\varphi = M$$
$$M_y = M \cos\varphi = 0$$

und dabei

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_b \\ \varrho &= \mu\left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_f\right) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Wir finden also bei entsprechender Bestimmung der einschlägigen Größen die bekannten Formeln von Navier.

Wir nennen die von der X-Achse am meisten entfernten Punkte der Betonschichten (Abb. 3) z_b' und z_b''; beachten wir die Vorzeichen, wir finden dann, daß die höchste Spannung im Beton in der Schicht liegen wird, welche zur selben Seite des Schwerpunktes liegt, wie der Schnittpunkt der Kraft P mit der Schnittfläche:

$$r_{max} = \frac{N}{\Omega} + \frac{M z_b'}{I} \quad \ldots \quad (6)$$

Entgegengesetzt liegt die kleinste Spannung

$$r_{min} = \frac{N}{\Omega} - \frac{M z_b''}{I}.$$

Aehnlich haben wir für Eisen

$$\varrho_{max} = \mu\left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M z_f'}{I}\right).$$

$$\varrho_{min} = \mu\left(\frac{N}{\Omega} - \frac{M z_f''}{I}\right).$$

Da nun $M = Nd$, so ist:

$$r_{min} = \frac{N}{\Omega} - \frac{N d z_b''}{I}.$$

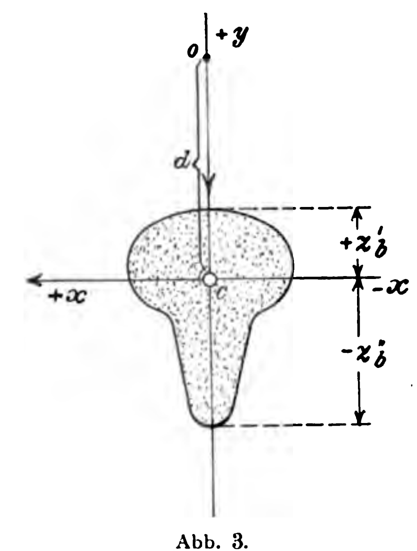


Abb. 3.

Daraus können wir eine Entfernung d finden, bei der die Betonschichten noch nicht ausgezogen werden.

$$\frac{N}{\Omega} > \frac{N d z_b''}{I}$$

$$d < \frac{I}{\Omega z_b''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Bei allen größeren Werten von d werden einige Fasern des Betons ausgezogen, was den zweiten, nun näher zu untersuchenden Fall ergibt.

§ 4. *Zweiter Fall.* Wir nennen: r_c, ε_c, dB_c entsprechend die Spannung, den Elastizitätskoeffizienten und das Schnittdifferential im gedrückten Beton; r_t, ε_t, dB_t entsprechend dieselben Größen im gezogenen Beton; ϱ, E, dF dieselben Größen beim Eisen, ob gedrückt, ob auch gezogen.

Die Spannungen im Schnitte und die äußeren Kräfte sind dann mit den Gleichgewichtsformeln

$$\left.\begin{aligned} N &= \int r_c dB_c + \int r_t dB_t + \int \varrho dF \\ M_x &= \int y_{bc} r_c dB_c + \int y_{bt} r_t dB_t + \int y_f \varrho dF \\ M_y &= \int x_{bc} r_c dB_c + \int x_{bt} r_t dB_t + \int x_f \varrho dF \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

verbunden, wo

x_{bc}, y_{bc} die Koordinaten des gedrückten Betonpunktes sind,
x_{bt}, y_{bt} die des gezogenen Betonpunktes,
x_f, y_f die des Eisenpunktes.

Mit Rücksicht auf (3) finden wir leicht

$$\left.\begin{aligned} r_c &= \varepsilon_c (a + b x_{bc} + c y_{bc}) \\ r_t &= \varepsilon_t (a + b x_{bt} + c y_{bt}) \\ \varrho &= E (a + b x_f + c y_f) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

wo die Konstanten a, b, c gefunden werden können mit Hilfe der drei Gleichungen (8), die wir jetzt so schreiben:

$$\begin{aligned} N = {} & \int \varepsilon_c (a + b x_{bc} + c y_{bc}) \, dB_c + \int \varepsilon_t (a + b x_{bt} + c y_{bt}) \, dB_t + \\ & + \int E (a + b x_f + c y_f) \, dF \\ M_x = {} & \int \varepsilon_c (a + b x_{bc} + c y_{bc}) \, y_{bc} dB_c + \int \varepsilon_t (a + b x_{bt} + c y_{bt}) \, y_{bt} dB_t + \\ & + \int E (a + b x_f + c y_f) \, y_f dF \\ M_y = {} & \int \varepsilon_c (a + b x_{bc} + c y_{bc}) \, x_{bc} dB_c + \int \varepsilon_t (a + b x_{bt} + c y_{bt}) \, x_{bt} dB_t + \\ & + \int E (a + b x_f + c y_f) \, x_f dF. \end{aligned}$$

Wir nennen jetzt:

$$\frac{E}{\varepsilon_c} = \mu; \qquad \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_c} = \nu.$$

Dann ist

$$N = \varepsilon_c [a (\int dB_c + \nu \int dB_t + \mu \int dF) + b (\int x_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} dB_t + \mu \int x_f dF) + \\ + c (\int y_{bc} dB_c + \nu \int y_{bt} dB_t + \mu \int y_f dF)]$$

$$M_x = \varepsilon_c [a (\int y_{bc} dB_c + \nu \int y_{bt} dB_t + \mu \int y_f dF) + b (\int x_{bc} y_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} y_{bt} dB_t + \\ + \mu \int x_f y_f dF) + c (\int y_{bc}^2 dB_c + \nu \int y_{bt}^2 dB_t + \mu \int y_f^2 dF)]$$

$$M_y = \varepsilon_c [a (\int x_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} dB_t + \mu \int x_f dF) + b (\int x_{bc}^2 dB_c + \nu \int x_{bt}^2 dB_t + \\ + \mu \int x_f^2 dF) + c (\int x_{bc} y_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} y_{bt} dB_t + \mu \int x_f y_f dF)].$$

Wir müssen auch hier die einzelnen Ausdrücke untersuchen.

Die Summe $\int dB_c + \nu \int dB_t + \mu \int dF$ können wir benennen als Ganzschnitt des Stabes Ω.

Den Ausdruck $\int x_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} dB_t + \mu \int x_f dF$ können wir betrachtenals statisches Moment des Schnittes in bezug auf die Y-Achse. Obwohl die beiden Achsen durch den Schwerpunkt des Schnittes hindurchgehen, sind die statischen Momente hier durchaus nicht gleich Null; das bewirkt der Faktor ν für die Teilchen des gezogenen Betons, die hier eine andere Rolle spielen als beim Bestimmen des Schwerpunktes. Die beiden statischen Momente wollen wir mit S_x und S_y bezeichnen, diese wären dann Null nur bei $\nu = 1$, also wenn die Elastizitätskoeffizienten des Betons bei Druck und Zug dieselben wären. Die Ausdrücke:

$$\int x_{bc}^2 dB_c + \nu \int x_{bt}^2 dB_t + \mu \int x_f^2 dF$$

und

$$\int y_{bc}^2 dB_c + \nu \int y_{bt}^2 dB_t + \mu \int y_f^2 dF$$

können wir betrachten als Trägheitsmomente in bezug auf die Y- und X-Achsen, wir nennen sie entsprechend: I_y und I_x.

Die Summe:

$$\int x_{bc} y_{bc} dB_c + \nu \int x_{bt} y_{bt} dB_t + \mu \int x_f y_f dF$$

ist das Zentrifugalmoment des Schnittes. Wählen wir nun für die beiden Achsen immer die Hauptachsen des Schnittes, so wird dieses Moment bekanntlich Null. Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten dann folgende einfache Formeln:

$$N = \varepsilon_c (a\Omega + b S_y + c S_x)$$
$$M_x = \varepsilon_c (a S_x + c I_x)$$
$$M_y = \varepsilon_c (a S_y + b I_y).$$

Aus den obigen Gleichungen bestimmen wir a, b, c, wie folgt:

$$a = \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{N I_x I_y - M_y S_y I_x - M_x S_x I_y}{\Omega I_x I_y - I_x S_y^2 - I_y S_x^2}$$

$$b = \frac{1}{\varepsilon_c} \left(\frac{M_y}{I_y} - \frac{N I_x I_y S_y - M_y S_y^2 I_x - M_x S_x S_y I_y}{\Omega I_x I_y^2 - I_x I_y S_y^2 - I_y^2 S_x^2} \right)$$

$$c = \frac{1}{\varepsilon_c} \left(\frac{M_x}{I_x} - \frac{N I_x I_y S_x - M_y S_y S_x I_x - M_x S_x^2 I_y}{\Omega I_x^2 I_y - I_x^2 S_y^2 - I_x I_y S_x^2} \right).$$

Diese Werte setzen wir in (9) ein und finden:

$$r_c = \frac{N I_x I_y - M_y S_y I_x - M_x S_x I_y + (M_y \Omega I_x - M_y S_x^2 - N I_x S_y + M_x S_x S_y)\, x_{bc} + (M_x \Omega I_y - M_x S_y^2 - N I_y S_x + M_y S_x S_y)\, y_{bc}}{\Omega I_x I_y - I_x S_y^2 - I_y S_x^2}$$

$$r_t = \nu \cdot \frac{N I_x I_y - M_y S_y I_x - M_x S_x I_y + (M_y \Omega I_x - M_y S_x^2 - N I_x S_y + M_x S_x S_y)\, x_{bt} + (M_x \Omega I_y - M_x S_y^2 - N I_y S_x + M_y S_x S_y)\, y_{bt}}{\Omega I_x I_y - I_x S_y^2 - I_y S_x^2}$$

$$\varrho = \mu \cdot \frac{N I_x I_y - M_y S_y I_x - M_x S_x I_y + (M_y \Omega I_x - M_y S_x^2 - N I_x S_y + M_x S_x S_y)\, x_f + (M_x \Omega I_y - M_x S_y^2 - N I_y S_x + M_y S_x S_y)\, y_f}{\Omega I_x I_y - I_x S_y^2 - I_y S_x^2}.$$

Ist jetzt $\varphi = 90^\circ$ und die Y-Achse auch Haupt- und Symmetrieachse, so wird

$$M_x = M, \qquad M_y = 0, \qquad S_y = 0,$$

und die Ausdrücke für die Spannungen erhalten die einfachere Form

$$\left.\begin{aligned} r_c &= \frac{NI - MS + (M\Omega - NS)\, y_{bc}}{\Omega I - S^2} \\ r_t &= \nu \cdot \frac{NI - MS + (M\Omega - NS)\, y_{bt}}{\Omega I - S^2} \\ \varrho &= \mu \cdot \frac{NI - MS + (M\Omega - NS)\, y_f}{\Omega I - S^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

wo unter I und S ohne Indizes $= x$ die Trägheits- und statischen Momente zur X-Achse verstanden werden, da I_y in diesen Gleichungen gekürzt wird, wenn $S_y = 0$, weil die inerte Achse NN auf der Y-Achse senkrecht steht. Die Lage der letzteren Achse im Schnitte bezeichnen wir mit Hilfe ihrer Entfernung vom Schwerpunkte y_0, welches wir finden, wenn wir eine beliebige Spannung aus (10) gleich Null machen.

Wir finden dann

$$y_0 = \frac{MS - NI}{M\Omega - NS} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hier sind nun S, I, Ω Funktionen von y_0; haben wir also einen bestimmten Schnitt mit bekannten M und N, so finden wir zuerst aus (11) die Lage der inerten Achse, indem wir Ω, S, I als Funktionen von y_0 darstellen. Nach Bestimmung von y_0 aus einer Gleichung dritten Grades (am besten trigonometrisch oder graphisch) finden wir die Zahlenwerte Ω, I, S, mit denen dann r_c, r_t, ϱ bestimmt werden können.

Da aus (11)

$$NI - MS = -y_0 (M\Omega - NS)$$

folgt, so gestalten wir die Formeln (10) so:

$$\left.\begin{aligned} r_c &= \frac{M\Omega - NS}{\Omega I - S^2}\, z_{bc} \\ r_t &= \nu \cdot \frac{M\Omega - NS}{\Omega I - S^2}\, z_{bt} \\ \varrho &= \mu \cdot \frac{M\Omega - NS}{\Omega I - S^2}\, z_f \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo $z_{bc} = y_{bc} - y_0$; $z_{bt} = y_{bt} - y_0$; $z_f = y_f - y_0$, die Entfernung der Punkte von der inerten Achse sind. Die Gleichungen (12) können wir noch, wie folgt, vereinfachen:

$$r_c = \frac{M - N\frac{S}{\Omega}}{I - \frac{S^2}{\Omega}} z_{bc}$$

$$r_t = \nu \cdot \frac{M - N\frac{S}{\Omega}}{I - \frac{S^2}{\Omega}} z_{bt}$$

$$\varrho = \mu \cdot \frac{M - N\frac{S}{\Omega}}{I - \frac{S^2}{\Omega}} z_f.$$

Definieren wir also y_0 und die entsprechenden S, Ω auf Grund (11), so finden wir aus Division S durch Ω die Lage eines bestimmten Punktes V' (Abb. 4), der eine Linie $N'N'$ parallel zur X-Achse markiert. Für diese Linie ist $I - \frac{S^2}{\Omega}$ das Trägheitsmoment des Schnittes. Wir bezeichnen nun

$$y_0' = \frac{S}{\Omega}$$

$$I_0' = I - \frac{S^2}{\Omega}$$

und finden die einfachsten Formeln für die Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} r_c &= \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_{bc} \\ r_t &= \nu \cdot \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_{bt} \\ \varrho &= \mu \cdot \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_f \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13)$$

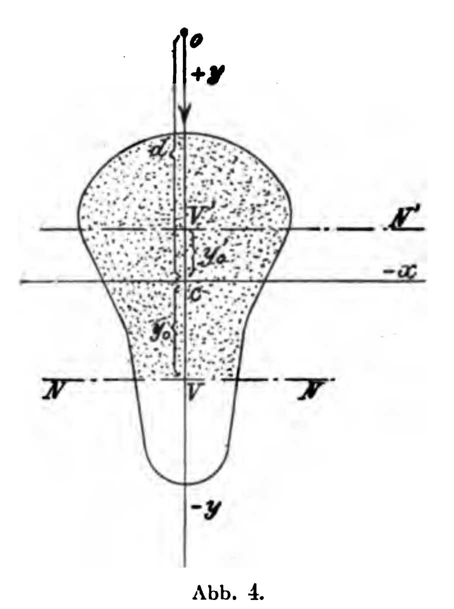


Abb. 4.

Die beiden Punkte V und V' sind eng verbunden. Sie sind sich um so näher, wie größer d; ist letzteres unendlich, dann wird die Kraft N Null, und die Kräfte P sind parallel zum Schnitt und rufen nur Biegung hervor ohne Längskräfte.

Da dann

$$y_0 = \frac{S}{\Omega} = y_0' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

und $N = 0$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} r_c &= \frac{M}{I_0} z_{bc} \\ r_t &= \nu \frac{M}{I_0} z_{bt} \\ \varrho &= \mu \frac{M}{I_0} z_f \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Hier ist M das Biegungsmoment unter der Wirkung der äußeren Kräfte, welche auf der inerten Achse senkrecht stehen, und I_0 ist das Trägheitsmoment des Schnittes in bezug auf die inerte Achse.

Betrachten wir bei der Biegung die Phase, bei der die Ausziehung des Betons nicht berücksichtigt wird, so behalten diese Gleichungen ihre Kraft, wenn Ω, S, I, I_0 nur für die arbeitenden Teile des Schnittes gerechnet werden.

Abschnitt II.

Allgemeine Regeln der Formänderungen der Eisenbetonbauten.

§ 5. *Gleichung der Formänderungsarbeit.* Der gegebene Eisenbetonstab mit der krummen Achse AB (Abb. 5) unterwerfen wir der Wirkung biegender äußerer Kräfte: P_1, P_2, P_3, P_4, . . ., welche ausnahmslos in der

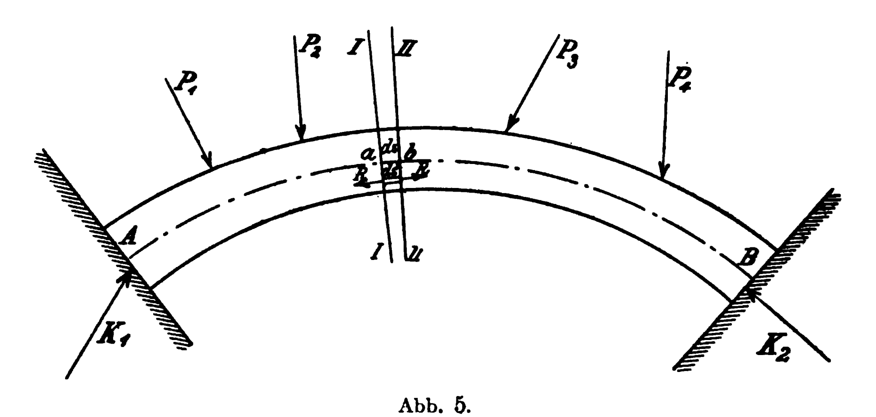


Abb. 5.

Ebene AB liegen. Bei der im Verhältnis zur Länge unbedeutenden Größe des Schnittes werden zur Formveränderung bedeutend nur zwei Faktoren beitragen: 1) die Spannungen des Materials senkrecht auf die Schnitteile und 2) Veränderungen der Temperatur. Wählen wir einen beliebigen unendlich kleinen Teil der Achse ds zwischen a und b. Durch diese Punkte legen wir senkrecht zur Achse zwei Ebenen I und II, zwischen denen man sich unendlich viele, unendlich kleine Prismen ds' denken kann, welche zu ds

parallel sind und unter der Wirkung innerer Kräfte R auf Druck oder Zug arbeiten. Wir nennen:

B_c den Gesamtschnitt des gedrückten Betons,
B_t „ „ des gezogenen Betons,
F „ „ der Eisenarmatur (gedrückt oder gezogen),
db_c die Länge des unendlich kleinen gedrückten, zu ds parallelen Betonprismas zwischen den Ebenen I und II,
df und db_t entsprechend die Längen ähnlicher Prismen des Eisens und des gezogenen Betons,
$r_c\, r_t\, \varrho$ entsprechend die Spannungen für die Endschnitte jener Prismen beim gedrückten Beton, der gezogenen und der Eisenarmatur.

Dann wird die gesamte auf das entsprechende Betonprisma drückende Kraft:

$$R_c = r_c dB_c,$$

ebenso die ziehende Kraft:

$$R_t = r_t dB_t,$$

und die Kraft an den Enden der Eisenprismen:

$$R = \varrho dF.$$

Nennen wir die Formveränderungen der entsprechenden Prismen bei der Biegung Δdb_c, Δdb_t, Δdf, so wird die Gesamtarbeit der Formänderung ausgedrückt durch:

$$T = \int R_c \Delta db_c + \int R_t \Delta db_t + \int R \Delta df$$

oder:

$$T = \int r_c dB_c \Delta db_c + \int r_t dB_t \Delta db_t + \int \varrho dF \Delta df,$$

wenn die Veränderung der Abmessungen des Schnittes nach der Formänderung nicht berücksichtigt wird.

Da nun $db_c \,.\, dB_c$, $db_t \,.\, dB_t$, $df \,.\, dF$ die Inhalte der unendlich kleinen Prismen sind, so nennen wir diese Inhalte dV_c, dV_t, dv und haben dann:

$$dB_c = \frac{dV_c}{db_c}$$

$$dB_t = \frac{dV_t}{db_t}$$

$$dF = \frac{dv}{df}$$

und

$$T = \int r_c \cdot \frac{\Delta db_c}{db_c} \cdot dV_c + \int r_t \cdot \frac{\Delta db_t}{db_t} \cdot dV_t + \int \varrho \cdot \frac{\Delta df}{df} \cdot dv.$$

Nennen wir allgemein:

P die von außen wirkende Kraft,
δ_p die Verschiebung des Angriffspunktes von P in ihrer Richtung,
K die Wirkung der Stütze,
δ_k die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft K in ihrer Richtung.

Dann ist die Arbeit T' der äußeren Kräfte:

$$T' = \Sigma P \delta_p + \Sigma K \delta_k.$$

Nehmen wir alle obengenannten Verschiebungen und Formänderungen für möglich, aber zugleich außerordentlich klein an. Dann dürfen wir den Satz von den virtuellen Verschiebungen anwenden: sind die äußeren und inneren Kräfte im Gleichgewichte, so ist die Arbeit der ersten gleich der Arbeit der letzten; also bei uns:

$$T = T'$$

oder

$$\Sigma P \delta_p + \Sigma K \delta_k = \int r_c \frac{\Delta\, db_c}{db_c}\, dV_c + \int r_t \cdot \frac{\Delta\, db_t}{db_t} \cdot dV_t + \int \varrho \cdot \frac{\Delta\, df}{df}\, dv. \quad (16)$$

Wir haben auf diese Weise die Gleichung für die Arbeit der Formänderungen bei Eisenbetonbauten erhalten, wobei die Ausdrücke: $\frac{\Delta\, db_c}{db_c}$, $\frac{\Delta\, db_t}{db_t}$, $\frac{\Delta\, df}{df}$ die einheitlichen Verlängerungen oder Verkürzungen sind.

Diese Gleichungen dürfen jedoch nur dann angewandt werden, wenn die Abmessungen des Schnittes sehr klein sind im Vergleich mit dem Krümmungsradius der Achse.

§ 6. *Berechnung der statisch unbestimmbaren Größen.* Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen können wir die Spannungen r_c, r_t, ϱ sowie die Reaktion K der Stützen darstellen als lineare Funktionen der gegebenen Kräfte P und gewisser statisch unbestimmbarer Größen X', X'', X''' . . ., wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} r_c &= r_c^0 + r_c' X' + r_c'' X'' + r_c''' X''' + \ldots . \\ r_t &= r_t^0 + r_t' X' + r_t'' X'' + r_t''' X''' + \ldots . \\ \varrho &= \varrho^0 + \varrho' X' + \varrho'' X'' + \varrho''' X''' + \ldots . \\ K &= K^0 + K' X' + K'' X'' + K''' X''' + \ldots . \end{aligned}\right\} , \quad . \quad . \quad (17)$$

wo r_c', r_c'', r_c''', . . .; r_t', r_t'', r_t''', . . .; ϱ', ϱ'', ϱ''', . . .; K', K'', K''' . . . gegebene Faktoren darstellen, welche von den Kräften P und den Größen X unabhängig sind, während r_c^0, r_t^0, ϱ^0, K^0 für den statisch bestimmbaren Fall der Belastung gelten, bei den alle X verschwinden.

Ist $X' = 1$, und werden alle Kräfte P und die übrigen X zu Null gemacht, so erhält man einen Fall der Belastung, welchen wir so bezeichnen wollen: Zustand „$X' = 1$“; diesem Zustande entsprechen also r_c', r_t', ϱ', K'.

Ebenso kann man sich andere Zustände denken: „$X'' = 1$, $X''' = 1$“. . . .

Die Gleichungen für die Formänderungsarbeit bei den einzelnen Zuständen $X' = 1$, $X'' = 1$, $X''' = 1$ sind Spezialfälle der Gleichung (16), wenn darin $P = 0$ gemacht wird und dann $K = K'$, $r_c = r_c'$, $r_t = r_t'$, $\varrho = \varrho'$ für

den Zustand $X' = 1$ angenommen wird und entsprechend anders für die anderen Zustände. Wir haben dann Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma K'\delta_k &= \int r_c' \cdot \frac{\Delta db_c}{db_c} dV_c + \int r_t' \cdot \frac{\Delta db_t}{db_t} dV_t + \int \varrho' \cdot \frac{\Delta df}{df} dv \\
\Sigma K''\delta_k &= \int r_c'' \cdot \frac{\Delta db_c}{db_c} dV_c + \int r_t'' \cdot \frac{\Delta db_t}{db_t} dV_t + \int \varrho'' \cdot \frac{\Delta df}{df} dv \\
\Sigma K'''\delta_k &= \int r_c''' \cdot \frac{\Delta db_c}{db_c} dV_c + \int r_t''' \cdot \frac{\Delta db_t}{db_t} dV_t + \int \varrho''' \cdot \frac{\Delta df}{df} dv \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (18)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen entspricht der Anzahl der Unbekannten X', X'' . . ., welche auch daraus berechnet werden können, wenn uns die **wirklichen** Werte der Verschiebungen und Veränderungen δ_k, Δdb_c, Δdb_t, Δdf bekannt sind, wie sie der wirklichen Belastung durch alle Kräfte P entsprechen.

Die Verschiebungen der Stützen δ_k hängen ab von der Form, Elastizität, Belastung und Temperatur der Stützen; man kann sie fast nie genau bestimmen und nimmt sie meistens für nicht vorhanden oder annähernd an. Sollten unvorhergesehene Bewegungen der Stützen bedeutenden Einfluß auf die Spannungen im Stabe besitzen, so muß man hierbei nur ganz sichere Stützen wählen; man muß also keine kontinuierlichen Balken und Bogen bei unsicherem Grund benutzen.

Berücksichtigen wir wieder die Gleichungen (3), dann heißen Gleichungen (18) so:

$$\left.\begin{aligned}
L' &= \int \frac{r_c' r_c}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t' r_t}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho}{E} dv + \\
&\quad + \alpha t \left[\int r_c' dV_c + \int r_t' dV_t + \int \varrho' dv\right] \\
L'' &= \int \frac{r_c'' r_c}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t'' r_t}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho}{E} dv + \\
&\quad + \alpha t \left[\int r_c'' dV_c + \int r_t'' dV_t + \int \varrho'' dv\right] \\
L''' &= \int \frac{r_c''' r_c}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t''' r_t}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho''' \varrho}{E} dv + \\
&\quad + \alpha t \left[\int r_c''' dV_c + \int r_t''' dV_t + \int \varrho''' dv\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots (19)$$

wobei:

$$L' = \Sigma K'\delta_k,\quad L'' = \Sigma K''\delta_k,\quad L''' = \Sigma K'''\delta_k \ldots.$$

Beachten wir, daß:

$$r_c' = \frac{\partial r_c}{\partial X'};\quad r_c'' = \frac{\partial r_c}{\partial X''};\quad r_c''' = \frac{\partial r_c}{\partial X'''};\quad \ldots$$

$$r_t' = \frac{\partial r_t}{\partial X'};\quad r_t'' = \frac{\partial r_t}{\partial X''};\quad r_t''' = \frac{\partial r_t}{\partial X'''};\quad \ldots.$$

$$\varrho' = \frac{\partial \varrho}{\partial X'};\quad \varrho'' = \frac{\partial \varrho}{\partial X''};\quad \varrho''' = \frac{\partial \varrho}{\partial X'''};\quad \ldots.$$

dann ist die allgemeine Form der Gleichungen (19) die folgende:

$$L = \int \frac{r_c}{\varepsilon_c} \cdot \frac{\partial r_c}{\partial X} dV_c + \int \frac{r_t}{\varepsilon_t} \cdot \frac{\partial r_t}{\partial X} dV_t +$$

$$+ \int \frac{\varrho}{E} \frac{\partial r_t}{dX} dv_t + \alpha t \left[\int \frac{\partial r_c}{\partial X} dV_c + \int \frac{\partial r_t}{\partial X} dV_t + \int \frac{\partial \varrho}{\partial X} dv \right]. \quad . \quad (20)$$

Nehmen wir nun an, daß in einem Schnitt unter Einwirkung von Kräften, die von Null zu P steigen, die Spannungen der unendlich kleinen Prismen entsprechend anwachsen von Null bis r_c, r_t, ϱ. Es mögen die Formänderungen dabei s_c, s_t, s_f genannt werden; dann sind sie:

$$s_c = \frac{r_c db_c}{\varepsilon_c}; \quad s_t = \frac{r_t db_t}{\varepsilon_t}; \quad s_f = \frac{\varrho df}{E},$$

wo db_c, db_t, df entsprechend die Längen der unendlich kleinen Prismen mit den Schnitten dB_c, dB_t, dF sind, unterworfen den Spannungen r_c, r_t, ϱ.

Im Augenblick, wo die Formänderungen die Größen x, y, z erreichen, welche enthalten sind zwischen Null und s_c, s_t, s_f, wirken auf die Prismen die Kräfte:

$$(r_c)_x dB_c = \frac{\varepsilon_c \,.\, dB_c}{db_c} x; \quad (r_t)_y dB_t = \frac{\varepsilon_t \,.\, dB_t}{db_t} \cdot y; \quad (\varrho)_z dF = \frac{E dF}{df} \cdot z.$$

Wachsen jene Veränderungen von dx, dy, dz, so ist die Arbeit der entsprechenden Kräfte:

$$(r_c)_x dB_c dx = \frac{\varepsilon_c dB_c}{db_c} x dx; \quad (r_t)_y dB_t dy = \frac{\varepsilon_t dB_t}{db_t} y dy;$$

$$(\varrho)_z dF dz = \frac{E dF}{df} z dz,$$

also die Gesamtarbeit in dem Schnitt beim Wachsen der wirkenden Kraft von Null bis P:

$$\frac{\varepsilon_c dB_c}{db_c} \int_0^{s_c} x dx + \frac{\varepsilon_t dB_t}{db_t} \int_0^{s_t} y dy + \frac{E dF}{df} \int_0^{s_f} z dz = \frac{\varepsilon_c dB_c}{db_c} \frac{s_c^2}{2} + \frac{\varepsilon_t dB_t}{db_t} \frac{s_t^2}{2} +$$

$$+ \frac{E dF}{df} \frac{s_f^2}{2} = \frac{r_c^2 db_c \,.\, dB_c}{2 \varepsilon_c} + \frac{r_t^2 db_t \,.\, dB_t}{2 \varepsilon_t} + \frac{\varrho^2 df \,.\, dF}{2 E} =$$

$$= \frac{r_c^2}{2 \varepsilon_c} dV_c + \frac{r_t^2}{2 \varepsilon_t} dV_t + \frac{\varrho^2}{2 E} dv.$$

Berücksichtigen wir auch die Veränderungen der Temperatur, so wird die Gesamtarbeit der äußeren Kräfte A beim Anwachsen der Belastungen von Null bis P und gleichzeitiger Zunahme der Temperatur von t:

$$A = \int \frac{r_c^2}{2 \varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t^2}{2 \varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho^2}{2 E} dv + \alpha t [\int r_c dV_c + \int r_t dV_t + \int \varrho dv]. \; (21)$$

Berechnen wir $\frac{\partial A}{\partial X}$, dann ist:

$$\frac{\partial A}{\partial X}=\int\frac{r_c}{\varepsilon_c}\cdot\frac{\partial r_c}{\partial X}\,dV_c+\int\frac{r_t}{\varepsilon_t}\cdot\frac{\partial r_t}{\partial X}\,dV_c+\int\frac{\varrho}{E}\,\frac{\partial\varrho}{\partial X}\,dv+$$
$$+\alpha t\left[\int\frac{\partial r_c}{\partial X}\,dV_c+\int\frac{\partial r_t}{\partial X}\cdot dV_t+\int\frac{\partial\varrho}{\partial X}\cdot dv\right].$$

Daraus ganz einfach:

$$L=\frac{\partial A}{\partial X}. \qquad (22)$$

§ 7. *Verschiebung δ eines beliebigen Punktes in der Ebene der Kräfte.* Die auf den Stab wirkenden Kräfte bezeichnen wir mit P_1, P_2, P_3 . . ., P_m . . .; ihre Angriffspunkte seien 1, 2, 3 . . ., m . . .; die Verschiebungen in den Richtungen der Kräfte seien δ_1, δ_2, δ_3 . . ., δ_m . . .

Dann heißt die Gleichung der Arbeit:

$$P_1\delta_1+P_2\delta_2+P_3\delta_3+\ldots+P_m\delta_m+\ldots+\Sigma K\delta_k=$$
$$=\int r_c\cdot\frac{\varDelta db_c}{db_c}\cdot dV_c+\int r_t\cdot\frac{\varDelta db_t}{db_t}\cdot dV_t+\int\varrho\cdot\frac{\varDelta df}{df}\cdot dv.$$

Diese Gleichung ist gültig für beliebige Werte von δ, δ_k, $\varDelta db_c$, $\varDelta db_t$, $\varDelta df$ und beliebige Werte der Kräfte P und der Größen X. Man kann aus ihr leicht die Verschiebungen δ_m eines beliebigen Angriffspunktes finden, wenn alle Größen X zu Null gemacht werden, die Kraft $P_m=1$ und die übrigen gleich Null. Wir haben dann den statisch bestimmbaren Zustand des Stabes, bei dem nur die Kraft $P_m=1$ und der dadurch bewirkte Widerstand der Stützen $\overline{K}$ wirken. Die Gleichung der Arbeit heißt dann:

$$\delta_m+\Sigma\overline{K}\delta_k=\int\overline{r}_c\cdot\frac{\varDelta db_c}{db_c}\,dV_c+\int\overline{r}_t\cdot\frac{\varDelta db_t}{db_t}\,dV_t+\int\overline{\varrho}\,\frac{\varDelta df}{df}\cdot dv \quad . \quad (23)$$

und mit Rücksicht auf Gleichungen (3):

$$\delta_m=\int\overline{r}_c\left(\frac{r_c}{\varepsilon_c}+\alpha t\right)dV_c+\int\overline{r}_t\left(\frac{r_t}{\varepsilon_t}+\alpha t\right)dV_t+\int\overline{\varrho}\left(\frac{\varrho}{E}+\alpha t\right)dv-\overline{L}=$$
$$=\int\frac{\overline{r}_c r_c}{\varepsilon_c}\,dV_c+\int\frac{\overline{r}_t r_t}{\varepsilon_t}\,dV_t+\int\frac{\overline{\varrho}\varrho}{E}\,dv+\alpha t\,[\textstyle\int\overline{r}_c dV_c+$$
$$+\textstyle\int\overline{r}_t dV_t+\int\overline{\varrho}dv]-\overline{L}, \qquad (24)$$

wo:

$$\overline{L}=\Sigma\overline{K}\delta_k.$$

Die Ausdrücke für δ_m können wir noch anders finden, durch partielle Differentiation der allgemeinen Arbeitsgleichung (16) in bezug auf P_m:

$$\delta_m+\Sigma\frac{\partial K}{\partial P_m}\cdot\delta_k=\int\frac{\partial r_c}{\partial P_m}\cdot\frac{\varDelta db_c}{db_c}\cdot dV_c+\int\frac{\partial r_t}{\partial P_m}\cdot\frac{\varDelta db_t}{db_t}\cdot dV_t+$$
$$+\int\frac{\partial\varrho}{\partial P_m}\cdot\frac{\varDelta df}{df}\,dv=\int\frac{\partial r_c}{\partial P_m}\left(\frac{r_c}{\varepsilon_c}+\alpha t\right)dV_c+\int\frac{\partial r_t}{\partial P_m}\left(\frac{r_t}{\varepsilon_t}+\alpha t\right)dV_t+$$
$$+\int\frac{\partial\varrho}{\partial P_m}\left(\frac{\varrho}{E}+\alpha t\right)dv=\int\frac{\partial r_c}{\partial P_m}\cdot\frac{r_c}{\varepsilon_c}\,dV_c+\int\frac{\partial r_t}{\partial P_m}\cdot\frac{r_t}{\varepsilon_t}\cdot dV_t+$$
$$+\int\frac{\partial\varrho}{\partial P_m}\cdot\frac{\varrho}{E}\cdot dv+\alpha t\left[\int\frac{\partial r_c}{\partial P_m}\,dV_c+\int\frac{\partial r_t}{\partial P_m}\,dV_t+\int\frac{\partial\varrho}{\partial P_m}\,dv\right].$$

Da mit Rücksicht auf die Gleichung (21):

$$\int \frac{\partial r_c}{\partial P_m} \cdot \frac{r_c}{\varepsilon_c} \cdot d V_c + \int \frac{\partial r_t}{\partial P_m} \cdot \frac{r_t}{\varepsilon_t} \cdot d V_t + \int \frac{\partial \varrho}{\partial P_m} \cdot \frac{\varrho}{E} \cdot d v + \alpha t \left[\int \frac{\partial r_c}{\partial P_m} d V_c + \right.$$

$$\left. + \int \frac{\partial r_t}{\partial P_m} d V_t + \int \frac{\partial \varrho}{\partial P_m} d v \right] = \frac{\partial A}{\partial P_m}$$

folgt, so ist:

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} - \sum \frac{\partial K}{\partial P_m} \cdot \delta_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Mit Hilfe dieser Regeln kann man Verschiebungen beliebiger Punkte berechnen; man kann dann diesen Punkten in der Richtung jener Verschiebung eine beliebige Kraft P anbringen, welche zuletzt gleich Null gemacht wird.

Bei Anwendung der Gleichungen (25) zur Bestimmung von δ kann man bei der Differentiation nach P die Größen X für konstant annehmen.

(Dieser Abschnitt hält sich eng an die Formeln des Herrn Prof. H. Müller-Breslau für Eisenbeton-Bauten; vgl. „Die neueren Methoden", 1904, S. 77—82.)

Abschnitt III.

Allgemeine Formeln für die statisch unbestimmbaren geraden Eisenbetonstäbe.

§ 8. *Im Stabe ist kein Zug da.* Bei Anwendung der Gleichungen des vorigen Abschnittes für gerade Eisenbetonstäbe unterscheiden wir drei Fälle: 1) wenn kein Zug stattfindet, 2) wenn der Stab nur der Wirkung des Biegungsmomentes von zur Achse senkrechten Kräften unterworfen ist, ohne Mitwirkung von Kräften parallel zur Achse, und 3) wenn außer dem Biegungsmomente noch Längskräfte wirken. Diese Unterscheidung ist notwendig, da die Spannungen in einzelnen Fällen ganz verschieden sind.

Im ersten Falle haben wir aus (5):

$$r = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_b$$

$$\varrho = \mu \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_f \right).$$

Die Gegenwirkungen der Stützen K, die Biegungsmomente M in bezug auf den Schwerpunkt und die Längskräfte N des geraden Eisenbetonstabes können wir darstellen in Form:

$$\left.\begin{array}{l} K = K_0 + K' X' + K'' X'' + K''' X''' + \ldots . \\ M = M_0 + M' X' + M'' X'' + M''' X''' + \ldots . \\ N = N_0 + N' X' + N'' X'' + N''' X''' + \ldots . \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (26)$$

wo X', X'', X''' statisch unbestimmbare Größen darstellen. K_0, M_0, N_0 gelten für den Hauptstab, bei dem alle X Null sind; K', M', N' für den Zustand $X' = 1$; K'', M'', N'' für $X'' = 1$; usw.

Die Spannungen beim Zustand $X' = 1$ sind:

$$r' = \frac{N'}{\Omega} + \frac{M'}{I} y_b$$

$$\varrho' = \mu \left(\frac{N'}{\Omega} + \frac{M'}{I} y_f \right);$$

für $X'' = 1$:

$$r'' = \frac{N''}{\Omega} + \frac{M''}{I} y_b$$

$$\varrho'' = \mu \left(\frac{N''}{\Omega} + \frac{M''}{I} y_f \right) \quad \text{usw.}$$

Nun lautet die erste der Gleichungen (19) so:

$$L' = \int \frac{r'}{\varepsilon_c} \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_b \right) dV + \int \frac{\varrho'}{E} \mu \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_f \right) dv + \\ + \alpha t \left[\int r' \, dV + \int \varrho' \, dv \right],$$

wo dV das Differential des Betoninhalts ist, dv das des Eiseninhalts; also:

$$dV = dB \,.\, dx$$
$$dv = dF \,.\, dx,$$

wo dx die unendlich kleine Länge des Beton- oder Eisenprismas ist. Also:

$$L' = \int \int \frac{r'}{\varepsilon_c} \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_b \right) dB \,.\, dx + \int \int \frac{\varrho'}{\varepsilon_c} \left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_f \right) dF \,.\, dx + \\ + \alpha t \left[\int \int r' \, dB \,.\, dx + \int \int \varrho' \, dF \,.\, dx \right]$$

oder:

$$L' = \int \int \frac{r'}{\varepsilon_c} \frac{N}{\Omega} dB \,.\, dx + \int \int \frac{r'}{\varepsilon_c} \frac{M}{I} y_b \, dB \,.\, dx + \int \int \frac{\varrho'}{\varepsilon_c} \frac{N}{\Omega} dF \,.\, dx + \\ + \int \int \frac{\varrho'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{M}{I} y_f \, dF \,.\, dx + \alpha t \left[\int dx \int r' \, dB + \int dx \int \varrho' \, dF \right]$$

oder:

$$L' = \int \frac{N dx}{\varepsilon_c \Omega} \int r' \, dB + \int \frac{N dx}{\varepsilon_c \Omega} \int \varrho' \, dF + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I} \int r' y_b \, dB + \\ + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I} \int \varrho' y_f \, dF + \alpha t \left[\int dx \int r' \, dB + \int dx \int \varrho' \, dF \right]$$

und zuletzt:

$$L' = \int \frac{N dx}{\varepsilon_c \Omega} \left(\int r' \, dB + \int \varrho' \, dF \right) + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I} \left(\int r' y_b \, dB + \int \varrho' y_f \, dF \right) + \\ + \alpha t \left[\int dx \left(\int r' \, dB + \int \varrho' \, dF \right) \right].$$

Wenden wir für den Zustand $X' = 1$ die bekannten Bedingungen des Gleichgewichts an, so finden wir:

$$\int r' dB + \int \varrho' dF = N'$$
$$\int r' y_b dB + \int \varrho' y_f dF = M'.$$

Also:

$$L' = \int \frac{NN'}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{MM'}{\varepsilon_c I} dx + \alpha t \int N' dx$$

und ebenso:

$$L'' = \int \frac{NN''}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{MM''}{\varepsilon_c I} dx + \alpha t \int N'' dx \quad \ldots \quad (27)$$

$$L''' = \int \frac{NN'''}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{MM'''}{\varepsilon_c I} dx + \alpha t \int N''' dx$$

. . . .

Nun folgt aus (26):

$$N' = \frac{\partial N}{\partial X'} \qquad M' = \frac{\partial M}{\partial X'}$$
$$N'' = \frac{\partial N}{\partial X''} \qquad M'' = \frac{\partial M}{\partial X''}$$
$$N''' = \frac{\partial N}{\partial X'''} \qquad M''' = \frac{\partial M}{\partial X'''}$$

. . . .

Also hat die allgemeine Gleichung (27) die Form:

$$L = \int \frac{N}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} \cdot dx + \int \frac{M}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx + \alpha t \int \frac{\partial N}{\partial X} \cdot dx \quad . \quad . \quad (28)$$

Ebenso findet man leicht:

$$A = \int \frac{N^2 dx}{2 \varepsilon_c \Omega} + \int \frac{M^2 dx}{2 \varepsilon_c I} + \alpha t \int N dx. \quad \ldots \quad (29)$$

§ 9. *Gewöhnliche Biegung unter Einwirkung von Kräften nur senkrecht zur inerten Achse.* Nach (15) ist hier:

$$r_c = \frac{M}{I_0} z_{bc}$$
$$r_t = \nu \cdot \frac{M}{I_0} z_{bt}$$
$$\varrho = \mu \cdot \frac{M}{I_0} z_f;$$

dabei ist M das Biegungsmoment im betrachteten Schnitt; I_0 das Trägheitsmoment des Schnittes in bezug auf die inerte Achse; z_{bc}, z_{bt}, z_f die Entfernungen der untersuchten Schichten oder Teilchen von der inerten Achse.

Auch hier können wir die Gleichungen (26) anwenden, wenn wir es mit einem statisch unberechenbaren Stab zu tun haben werden. Es ist also für den Zustand $X' = 1$:

$$r_c' = \frac{M'}{I_0} z_{bc}$$

$$r_t' = \nu \cdot \frac{M'}{I_0} z_{bt}$$

$$\varrho' = \mu \cdot \frac{M'}{I_0} z_f;$$

ebenso für $X'' = 1$:

$$r_c'' = \frac{M''}{I_0} z_{bc}$$

$$r_t'' = \nu \cdot \frac{M''}{I_0} z_{bt}$$

$$\varrho'' = \mu \cdot \frac{M''}{I_0} z_f \quad \text{usw.}$$

Die erste der Gleichungen (19) kann hier so dargestellt werden:

$$L' = \int \frac{r_c'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{M}{I_0} z_{bc} d V_c + \int \frac{r_t'}{\varepsilon_t} \nu \frac{M}{I_0} z_{bt} d V_t + \int \frac{\varrho'}{E} \mu \cdot \frac{M}{I_0} z_f dv +$$
$$+ \alpha t \left[\int r_c' d V_c + \int r_t' d V_t + \int \varrho' dv\right].$$

Nehmen wir in Betracht, daß

$$d V_c = d B_c \,.\, dx$$
$$d V_t = d B_t \,.\, dx$$
$$dv = dF \,.\, dx,$$

wobei wir dx, die Länge der unendlich kleinen Prismen des Betons und Eisens, als für alle Schnitte gleich annehmen wollen, mit Rücksicht darauf, daß im Verhältnis zu den Abmessungen des Schnittes der Krümmungsradius der Achse sehr groß ist. Wir können also schreiben:

$$L' = \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0} \int r_c' z_{bc} d B_c + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0} \int r_t' z_{bt} d B_t +$$
$$+ \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0} \int \varrho' z_f d F + \alpha t \left[\int dx \int r_c' d B_c + \int dx \int r_t' d B_t + \int dx \int \varrho' d F\right]$$

oder:

$$L' = \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0} \left(\int r_c' z_{bc} d B_c + \int r_t' z_{bt} d B_t + \int \varrho' z_f d F\right) +$$
$$+ \alpha t \left[\int dx \left(\int r_c' d B + \int r_t' d B_t + \int \varrho' d F\right)\right].$$

Aus den Fundamentalbedingungen des Gleichgewichts haben wir:

$$\int r_c' z_{bc} d B_c + \int r_t' z_{bt} d B_t + \int \varrho' z_f \, d F = M'.$$

Da wir hierbei die Wirkungen irgendwelcher Längskräfte nicht berücksichtigen, so ist:

$$\int r_c' d B_c + \int r_t' d B_t + \int \varrho' d F = 0.$$

Daher:

$$\left.\begin{aligned} L' &= \int \frac{M M'}{\varepsilon_c I_0} dx \\ L'' &= \int \frac{M M''}{\varepsilon_c I_0} dx \\ L''' &= \int \frac{M M'''}{\varepsilon_c I_0} dx \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Da in unserem Falle:

$$\begin{aligned} M' &= \frac{\partial M}{\partial X'} \\ M'' &= \frac{\partial M}{\partial X''} \\ M''' &= \frac{\partial M}{\partial X'''} \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so ist allgemein:

$$L = \int \frac{M}{\varepsilon_c I_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Ebenso findet man leicht:

$$A = \int \frac{M^2}{2 \varepsilon_c I_0} dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

§ 10. *Zusammengesetzte Biegung.* Wir wenden die Gleichungen (26) auch für diesen Fall an, wobei wir beachten, daß M, M_0, M', M'', M''', . . . die Biegungsmomente in bezug auf den Schwerpunkt des Schnittes sind.

Wir wissen aus den Gleichungen (13), daß

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{M - N y_0'}{I_0'} z_{bc} \\ r_t &= \nu \cdot \frac{M - N y_0'}{I_0'} z_{bt} \\ \varrho &= \mu \cdot \frac{M - N y_0'}{I_0'} z_f, \end{aligned}$$

wo y_0' die Entfernung vom Mittelpunkt der Geraden $N'N'$ (Abb. 4) ist; I_0' das Trägheitsmoment des Schnittes, bezogen auf diese Achse $N'N'$; z_{bc}, z_{bt}, z_f die Entfernungen der untersuchten Teile von der inerten Achse NN. Da hier die Lage der inerten Achse eine Funktion von M und N ist, so hängt sie nach (26) von den statisch unbestimmbaren X ab, ebenso wie y_0', I_0' (was besonders zu beachten ist). Nennen wir r_c', r_t', ϱ' die Spannungen

für den Zustand $X' = 1$ und entsprechend für die übrigen Zustände. Dann ist:

$$L' = \int \frac{r_c'}{\varepsilon_c} \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_{bc} dV_c + \int \frac{r_t'}{\varepsilon_t} \cdot \nu \cdot \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_{bt} dV_t + $$
$$+ \int \frac{\varrho'}{E} \mu \frac{M - Ny_0'}{I_0'} z_f dv + \alpha t \left[\int r_c' dV_c + \int r_t' dV_t + \int \varrho' dv\right].$$

Mit Rücksicht auf

$$dV_c = dB_c dx$$
$$dV_t = dB_t dx$$
$$dv = dF dx,$$

$$\frac{\nu}{\varepsilon_t} = \varepsilon_c \qquad \text{und} \qquad \frac{\mu}{E} = \varepsilon_c$$

können wir schreiben:

$$L' = \int\int \frac{r_c'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{M z_{bc}}{I_0'} dB_c dx + \int\int \frac{r_t'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{M z_{bt}}{I_0'} dB_t dx +$$
$$+ \int\int \frac{\varrho'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{M z_f}{I_0'} dF dx - \int\int \frac{r_c'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{Ny_0'}{I_0'} z_{bc} dB_c dx -$$
$$- \int\int \frac{r_t'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{Ny_0'}{I_0'} z_{bt} dB_c dx - \int\int \frac{\varrho'}{\varepsilon_c} \cdot \frac{Ny_0'}{I_0'} z_f dF dx +$$
$$+ \alpha t \left[\int\int r_c' dB_c dx + \int\int r_t' dB_t dx + \int\int \varrho' dF dx\right]$$

oder:

$$L' = \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0'} \int r_c' z_{bc} dB_c + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0'} \int r_t' z_{bt} dB_t + \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0'} \int \varrho' z_f dF -$$
$$- \int \frac{Ny_0' dx}{\varepsilon_c I_0'} \int r_c' z_{bc} dB_c - \int \frac{Ny_0' dx}{\varepsilon_c I_0'} \int r_t' z_{bt} dB_t -$$
$$- \int \frac{Ny_0' dx}{\varepsilon_c I_0'} \int \varrho' z_f dF + \alpha t \left[\int dx \int r_c' dB_c + \int dx \int r_t' dB_t + \int dx \int \varrho' dF\right]$$

oder:

$$L' = \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0'} \left(\int r_c' z_{bc} dB_c + \int r_t' z_{bt} dB_t + \int \varrho' z_f dF\right) -$$
$$- \int \frac{Ny_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx \left(\int r_c' z_{bc} dB_c + \int r_t' z_{bt} dB_t + \varrho' z_f dF\right) +$$
$$+ \alpha t \left[\int dx \left(\int r_c' dB_c + \int r_t' dB_t + \int \varrho' dF\right)\right].$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\int r_c' dB_c + \int r_t' dB_t + \int \varrho' dF = N'$$
$$\int r_c' z_{bc} dB_c + \int r_t' z_{bt} dB_t + \int \varrho' z_f dF = M_0',$$

wo M_0' das statische Moment der Kraft N' in bezug auf die inerte Achse NN für den entsprechenden Zustand $X' = 1$ ist. Also:

$$L' = \int \frac{M dx}{\varepsilon_c I_0'} \cdot M_0' - \int \frac{Ny_0' dx}{\varepsilon_c I_0'} M_0' + \alpha t \int N' dx \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Zwischen M' und M_0' besteht die Beziehung:

$$M_0' = M' - N' y_0;$$

daher können wir die Gleichung (33) und die entsprechenden anderen so schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
L' &= \int \frac{MM'}{\varepsilon_c I_0'}\,dx - \int \frac{MN' y_0}{\varepsilon_c I_0'}\,dx - \int \frac{M' N y_0'}{\varepsilon_c I_0'}\,dx + \\
&\quad + \int \frac{NN' y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'}\,dx + \alpha t \int N'\,dx. \\
L'' &= \int \frac{MM''}{\varepsilon_c I_0'}\,dx - \int \frac{MN''}{\varepsilon_c I_0'}\,y_0\,dx - \int \frac{M'' N}{\varepsilon_c I_0'}\,y_0'\,dx + \\
&\quad + \int \frac{NN'' y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'}\,dx + \alpha t \int N''\,dx \\
L''' &= \int \frac{MM'''}{\varepsilon_c I_0'}\,dx - \int \frac{MN'''}{\varepsilon_c I_0'}\,y_0\,dx - \int \frac{M''' N}{\varepsilon_c I_0'}\,y_0'\,dx + \\
&\quad + \int \frac{NN''' y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'}\,dx + \alpha t \int N'''\,dx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} . \quad (34)$$

Da nun:

$$\begin{aligned}
M' &= \frac{\partial M}{\partial X'}, & N' &= \frac{\partial N}{\partial X'} \\
M'' &= \frac{\partial M}{\partial X''}, & N'' &= \frac{\partial N}{\partial X''} \\
M''' &= \frac{\partial M}{\partial X'''}, & N''' &= \frac{\partial N}{\partial X'''} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so können wir den Gleichungen (34) folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned}
L = &\int \frac{M}{\varepsilon_c I_0'} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}\,dx - \int \frac{M y_0}{\varepsilon_c I_0'} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}\,dx - \int \frac{N y_0'}{\varepsilon_c I_0'} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}\,dx + \\
&+ \int \frac{N y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'} \cdot \frac{\partial N}{\partial X}\,dx + \alpha t \int \frac{\partial N}{\partial X}\,dx \ldots\ldots\ldots \quad (35)
\end{aligned}$$

Die Formeln (34) und (35) können wir zurückführen auf die Formeln (27) und (28), wenn wir annehmen, daß M und N in einem solchen Verhältnisse stehen, daß keine Zugspannungen vorkommen. Da dann das statische Moment des Schnittes, bezogen auf die X-Achse, gleich Null ist, dabei auch y_0' gleich Null, $y_0 = -\frac{NI}{N\Omega}$ und auch $y_0' = 0$, auch $I_0' = I$, nehmen die Gleichungen (34) folgende Form an:

$$L' = \int \frac{MM'\,dx}{\varepsilon_c I} + \int \frac{NN'\,dx}{\varepsilon_c I} + \alpha t \int N'\,dx \quad \text{usw.}$$

übereinstimmend mit Gleichungen (27).

Abschnitt IV.

Praktische Anwendung der Gleichungen der Formänderungsarbeit gerader Eisenbetonstäbe bei Biegung.

§ 11. *Horizontaler Balken ganz auf den Stützen befestigt.* Betrachten wir zuerst den Fall der Belastung, welche sich gleichmäßig auf die ganze Länge des Balkens verteilt (Abb. 6), ohne Beachtung der Verschiebungen der Stützen und der Temperaturwechsel, wodurch $L = 0$ und $t = 0$ angenommen wird. Die gleichmäßige Verteilung der Belastung bewirkt, daß die Gegenwirkungen der Stützen einander gleich sind, und zwar betrifft jede $\frac{pl}{2}$, wo l die freie Länge des Balkens ist, p die Belastung auf der Längeneinheit.

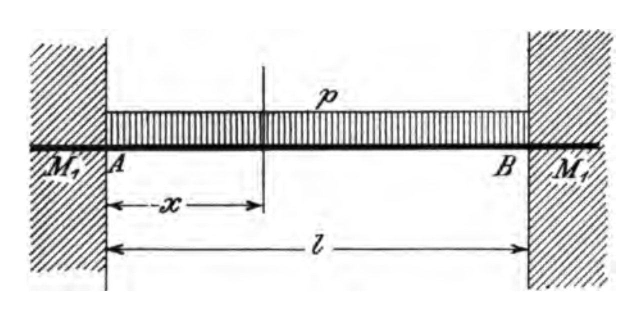


Abb. 6.

Das Moment der Befestigung auf der Stütze M_1 betrachten wir als statisch unbestimmbar, und da keine Längskräfte wirken, wenden wir die Formel (31) an; wir finden:

$$\int \frac{M}{\varepsilon_c I_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} \cdot dx = 0.$$

Nun ist das Biegungsmoment M in der Entfernung x von der linken Stütze:

$$M = \frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2} + M_1 = \frac{px(l-x)}{2} + M_1,$$

Da

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$$

so haben wir:

$$\int_0^l \frac{1}{\varepsilon_c I_0} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx = 0;$$

für die Grenzen des Integrals nehmen wir Null und l, mit Rücksicht auf die gleichmäßige Abhängigkeit des Biegungsmomentes von x auf der ganzen Länge.

Wären also ε_c und I_0 auf der ganzen Länge des Balkens konstant, dann könnten wir schreiben:

$$\int_0^l \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx = 0,$$

woraus sich

$$\frac{pl^3}{4} - \frac{pl^3}{6} + M_1 l = 0$$

und

$$M_1 = -\frac{pl^2}{12}$$

ergäbe, wie für das Moment auf der Stütze bei einem horizontal befestigten homogenen Balken.

Wir wissen aber, daß ε_c und besonders I_0 bei Eisenbetonbalken sehr verschiedene Werte an Balken entlang annehmen kann, wodurch das Biegungsmoment auf der Stütze vom obigen Resultat wesentlich abweichen kann.

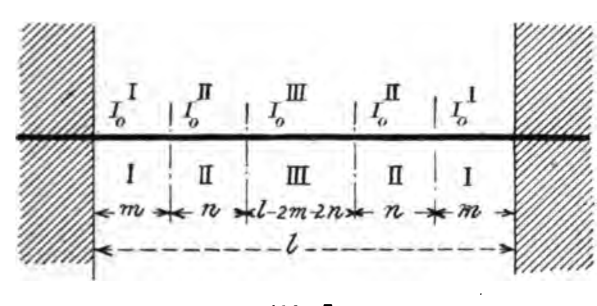


Abb. 7.

Nehmen wir an, daß wir den Balken symmetrisch in 5 Teile zerlegen können (Abb. 7): I und I jede von der Länge m, II und II von der Länge n, und III von der Länge $l - 2m - 2n$; in diesen Teilen wollen wir die Trägheitsmomente $I_0{}^I$, I_{0II}, $I_0{}^{III}$ für konstant annehmen, dagegen ε_c für den ganzen Balken als konstant betrachten. Dann erhält die Gleichung (31) die Form:

$$\int_0^m \frac{1}{\varepsilon_c I_0{}^I} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx + \int_m^{m+n} \frac{1}{\varepsilon_c I_0{}^{II}} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx +$$

$$+ \int_{m+n}^{l-m-n} \frac{1}{\varepsilon_c I_0{}^{III}} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx + \int_{l-m-n}^{l-m} \frac{1}{\varepsilon_c I_0{}^{II}} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx +$$

$$+ \int_{l-m}^{l} \frac{1}{\varepsilon_c I_0{}^I} \left[\frac{px(l-x)}{2} + M_1\right] dx = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung durch $I_0{}^{III}$ und bezeichnen wir $\frac{I_0{}^{III}}{I_0{}^I}$ mit i', $\frac{I_0{}^{III}}{I_{0II}}$ mit i'', dann ist:

$$i'\left\{\int_0^m\left[\frac{px(l-x)}{2}+M_1\right]dx+\int_{l-m}^{l}\left[\frac{px(l-x)}{2}-M_1\right]dx\right\}+$$

$$+i''\left\{\int_m^{m+n}\left[\frac{px(l-x)}{2}+M_1\right]dx+\int_{l-m-n}^{l-m}\left[\frac{px(l-x)}{2}+M_1\right]dx\right\}+$$

$$+\int_{m+n}^{l-m-n}\left[\frac{px(l-x)}{2}+M_1\right]dx=0.$$

Nach Ausführung der Integration haben wir:

$$i'\left[\frac{pm^2}{6}(3l-2m)+2M_1m\right]+$$

$$+i''\left[\frac{pn}{6}(6lm+3ln-6m^2-6mn-2n^2)+2M_1n\right]+$$

$$+\frac{p(l^3-6lm^2-6ln^2-12lmn+4m^3+12mn^2+12m^2n+4n^3)}{12}+$$

$$+M_1(l-2m-2n)=0$$

Daraus finden wir:

$$M_1=-\frac{p\{l^3-2m^2(3l-2m)(1-i')-2n[(3l-2n)(2m+n)-2m(3m+n)](1-i'')\}}{12[l-2m(1-i')-2n(1-i'')]}.$$

Bei $m=n$ ist:

$$M_1=-\frac{p\{l^3-2m^2[(3l-2m)(1-i')+(9l-14m)(1-i'')]\}}{12[l-2m(2-i'-i'')]}.$$

Wäre auch $i'=i''$, dann hätten wir:

$$M_1=-\frac{p[l^3-8m^2(3l-4m)(1-i')]}{12[l-4m(1-i')]}.$$

Wir sehen also, welcher gewaltige Unterschied zwischen den Momenten auf den Stützen bei einem horizontal vollständig befestigten homogenen Balken und einem aus Eisenbeton besteht. Bei entsprechenden Werten von i' und i'' können die absoluten Werte von M_1 bedeutend kleiner als $\frac{pl^2}{12}$ sein. Daraus erklärt sich die Dauerhaftigkeit bei ihren Stützen vieler bestehenden Eisenbetonbauten, welche schon längst in Trümmern lägen, wenn sie wirklich wie homogene Balken einem Momente $\frac{pl^2}{12}$ unterworfen gewesen wären.

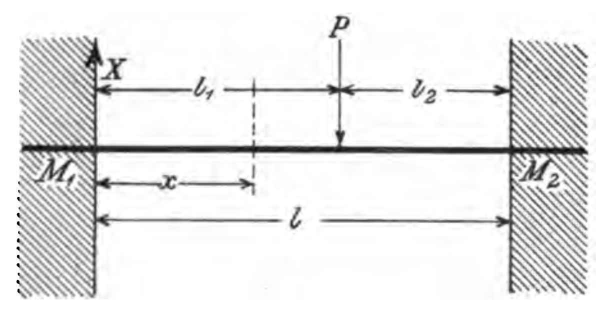


Abb. 8.

Jetzt untersuchen wir nun die Wirkung einer Last P auf die Gegenwirkung und Momente der Stützen unseres Balkens. Die Entfernung der Last von der linken Stütze sei l_1, von der rechten l_2 (Abb. 8).

Für statisch unbestimmbar betrachten wir hier das Moment M_1 und die Wirkung X der linken Stütze. Wir können dann zwei Gleichungen schreiben:

$$\int \frac{M}{\varepsilon_c I_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} \cdot dx = 0$$

$$\int \frac{M}{\varepsilon_c I_0} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} \cdot dx = 0.$$

Bei einem Schnitt links von P ist:

$$M = Xx + M_1,$$

rechts:

$$M = Xx - P(x - l_1) + M_1,$$

und in beiden Fällen:

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = 1; \qquad \frac{\partial M}{\partial X} = x.$$

Die verschiedene Abhängigkeit des Momentes M von x auf der rechten und linken Seite von P zwingt uns, die Integration in zwei Teilen auszuführen: von 0 bis l_1 und von l_1 bis l, wobei im ersten Falle:

$$M = Xx + M_1,$$

im zweiten:

$$M = Xx - P(x - l_1) + M_1$$

genommen wird.

Also:

$$\int_0^{l_1} (Xx + M_1)\, dx + \int_{l_1}^{l} [Xx - P(x - l_1) + M_1]\, dx = 0$$

$$\int_0^{l_1} (Xx + M_1)\, x\, dx + \int_{l_1}^{l} [Xx - P(x - l_1) + M_1]\, x\, dx = 0,$$

wenn wir ε_c und I_0 für die ganze Länge des Balkens konstant annehmen.

Wir finden daraus:

$$\frac{Xl^2}{2} - \frac{Pl_2^2}{2} + M_1 l = 0$$

$$\frac{Xl^3}{3} - \frac{P}{6}(2l^3 - 3l_1 l^2 + l_1^3) + \frac{M_1 l^2}{2} = 0,$$

also leicht:

$$X = \frac{Pl_2^2 (3l_1 + l_2)}{l^3}$$

und

$$M_1 = \frac{Pl_1 l_2^2}{l^2},$$

welche Werte aus der Theorie homogener Balken ebenfalls bekannt sind. Doch sind diese Werte auch hier ganz anders geartet, wenn man I_0, wie zuvor, als veränderliche betrachtet.

§ 12. *Kontinuierlicher Eisenbetonbalken.* Betrachten wir einen kontinuierlichen Balken frei ruhend auf beliebig vielen Stützen, welche in bekannter Weise fallend angeordnet sind. Betrachten wir zwei Nebenöffnungen l_0 und l_1; die Biegungsmomente für die drei Stützen 0, 1, 2 (Abb. 9) seien M_0, M_1, M_2. Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Momenten finden bei der Bedingung, daß die Stütze 1 zum δ niedriger ist, als die gerade Verbindungslinie der Seitenstützen 0 und 2. Wir sehen aus Abb. 9, daß:

$$\delta = y_1 - y_0 \cdot \frac{l_1}{l_0 + l_1} - y_2 \cdot \frac{l_0}{l_0 + l_1}.$$

Nehmen wir an, daß unser Balken unterworfen ist der Wirkung folgender Kräfte: der gleichmäßigen Belastung p_0 in der Oeffnung l_0, einer

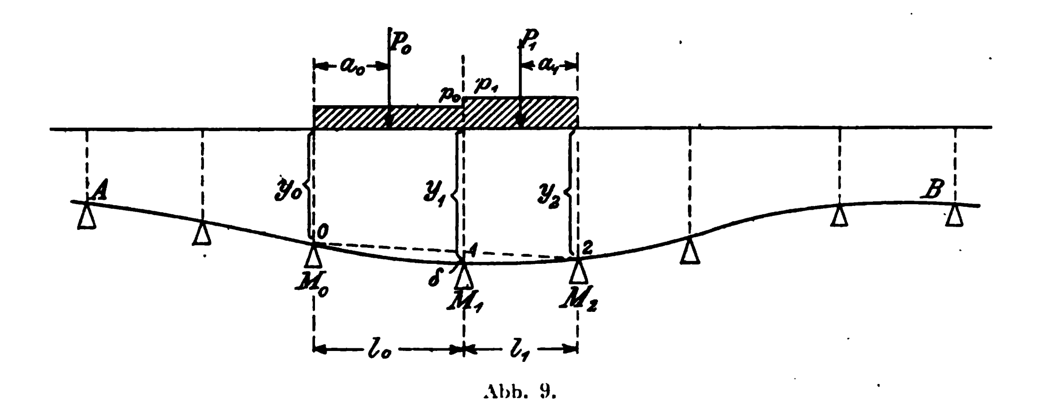


Abb. 9.

ähnlichen Belastung p_1 in der Oeffnung l_1 und entsprechend in beiden Oeffnungen der Einzellasten P_0 und P_1.

Etwaige Temperaturveränderungen beachten wir nicht. Da keine Längskräfte vorhanden sind, wenden wir uns an die Gleichungen (30), von denen die erste lautet:

$$L' = \int \frac{M M'}{\varepsilon_c I_0} dx,$$

wo M das wahre Biegungsmoment in einem Schnitte ist und M' das Biegungsmoment in demselben Schnitte unter der Bedingung, daß keine Außenkräfte vorhanden sind, und daß die statisch unbestimmbare Größe, für welche wir das Moment M_1 betrachten, gleich 1 wird (Zustand $X = M_1 = 1$). Die Momentenfläche für diesen Zustand ist ein Dreieck (Abb. 10) mit der Ordinate 1 über der Stütze 1.

Die Gegenwirkungen k_0' und k_2' der Stützen 0 und 2 sind in diesem Zustande:

$$k_0' = \frac{1}{l_0}; \qquad k_2' = \frac{1}{l_1},$$

wobei beide nach oben gerichtet sind, und die Wirkung k_1' der Mittelstütze ist:

$$k_1' = \frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_1} = \frac{l_0 + l_1}{l_0 l_1}$$

und nach unten gerichtet. Fällt die Mittelstütze um δ, so wird die virtuelle Arbeit der Gegenwirkungen für den Zustand $X = M_1 = 1$:

$$L' = k_1' \delta = \frac{l_0 + l_1}{l_0 l_1} \delta = \frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}:$$

daraus die Bedingung:

$$\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1} = \int \frac{M M'}{\varepsilon_c I_0} dx.$$

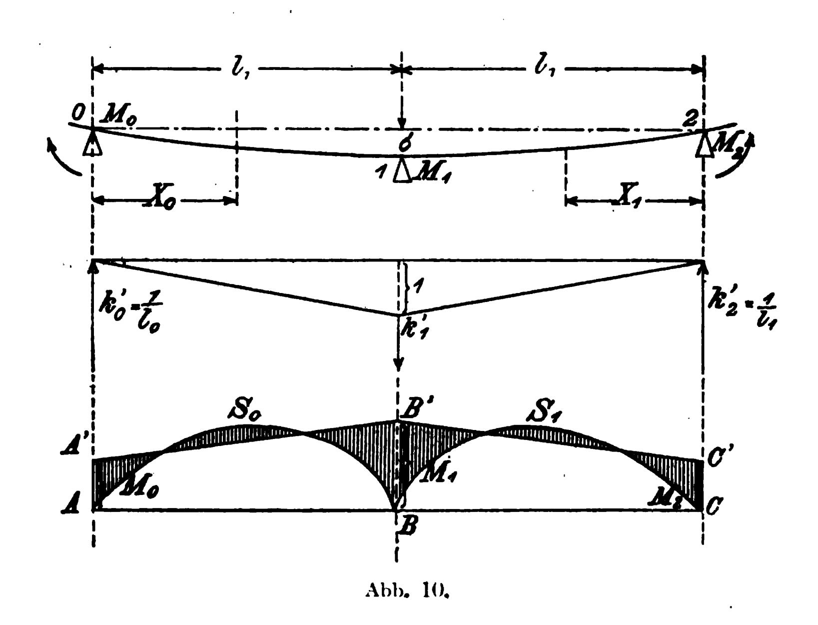


Abb. 10.

Für die Oeffnung l_0 in der Entfernung x_0 von der Stütze 0:

$$M' = \frac{x_0}{l_0},$$

also für diese Oeffnung:

$$\int \frac{M M'}{\varepsilon_c I_0} dx = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \frac{M x_0}{\varepsilon_c I_0} dx_0.$$

Ebenso für die Oeffnung l_1:

$$\int \frac{M M'}{\varepsilon_c I_0} dx = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M x_1}{\varepsilon_c I_0} dx_1,$$

wo x_1 die Entfernung des Schnittes von der Stütze 2 ist.

Nehmen wir an, daß in allen Schnitten ε_c und I_0 konstant sind. Wir erhalten dann:

$$\varepsilon_c I_0 \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = \frac{1}{l_0}\int_0^{l_0} M x_0\, dx_0 + \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} M x_1\, dx_1 \,. \quad . \qquad 35)$$

Hierin bedeutet das erste Integral das statische Moment der wirklichen Fläche der Momente für die Oeffnung l_0, bezogen auf die Stützachse 0; das zweite Integral ein ähnliches für die Oeffnung l_1, bezogen auf die Stützachse 2.

Die wirkliche Momentenfläche für die Oeffnung l_0 besteht aus zwei Teilen: 1) aus dem Trapez $AA'BB'$ mit den entsprechenden Höhen M_0 und M_1 bei den Stützen 0 und 1, und 2) aus der Momentenfläche AS_0B, entsprechend einem gewöhnlichen Balken mit der Oeffnung l_0, welcher frei auf den Stützen 0 und 1 liegt und ebenso belastet ist wie die Oeffnung l_0 des hier gegebenen Balkens. Das statische Moment des Trapezes $AA'BB'$ in bezug auf die linke Stützachse ist:

$$M_0 \cdot \frac{l_0}{2} \cdot \frac{l_0}{3} + M_1 \cdot \frac{l_0}{2} \cdot \frac{2 l_0}{3} = \frac{l_0^2}{6}(M_0 + 2 M_1).$$

und das statische Moment der Ebene AS_0B für die Belastung, wie auf Abb. 10, ist:

$$\frac{P_0 a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{6} + \frac{p_0 l_0^4}{24}.$$

Diese beiden Momente geben zusammen

$$\int_0^{l_0} M x_0\, dx_0 = \frac{l_0^2}{6}(M_0 + 2 M_1) + \frac{P_0 a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{6} + \frac{p_0 l_0^4}{24}.$$

Ebenso finden wir leicht:

$$\int_0^{l_1} M x_1\, dx_1 = \frac{l_1^2}{6}(2 M_1 + M_2) + \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{6} + \frac{p_1 l_1^4}{24}.$$

Daraus erhalten wir

$$\varepsilon_c I_0 \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = \frac{l_0}{6}(M_0 + 2 M_1) + \frac{P_0 a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{6 l_0} + \\ + \frac{p_0 l_0^3}{24} + \frac{l_1}{6}(2 M_1 + M_2) + \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{6 l_1} + \frac{p_1 l_1^3}{24}$$

und

$$6 \varepsilon_c I_0 \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) = M_0 l_0 + 2 M_1 (l_0 + l_1) + M_2 l_1 + \\ + \frac{P_0 a_0 (l_0^2 - a_0^2)}{l_0} + \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{1}{4}(p_0 l_0^3 + p_1 l_1^3).$$

Wir haben eine allgemein bekannte Formel erhalten, welche die Momente für drei benachbarte Stützen eines kontinuierlichen homogenen Balkens

verbindet. Doch ist auch diese Formel nur dann gültig, wenn ε_c und I_0 konstant sind. Für ε_c wollen wir wirklich einen konstanten Mittelwert nehmen; dagegen können wir I_0 nur auf Teilstrecken konstant nehmen. Ein Beispiel mag dieses erläutern. Es sei die Oeffnung l_0 in 3 Teile geteilt — zwei an den Seiten von der Länge l_0 mit dem Trägheitsmoment $I_0{}^{II}$ und

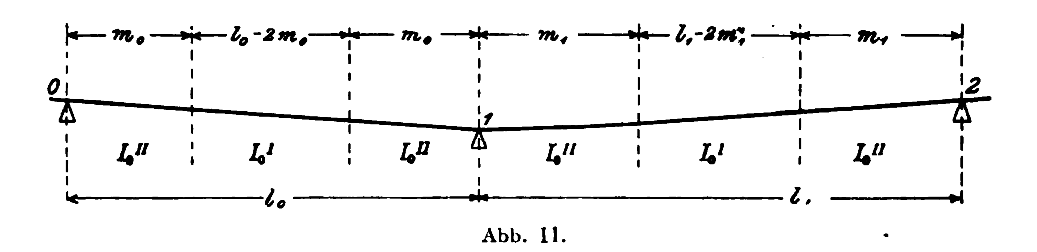


Abb. 11.

ein Teil in der Mitte mit dem Trägheitsmoment $I_0{}^I$ (Abb. 11); ebenso sollen in der Oeffnung l_1 zwei Seitenteile von der Länge m_0 die Trägheitsmomente $I_0{}^{II}$ haben und der Mittelteil $I_0{}^I$. Gleichung (35) erhält hier folgende Gestalt:

$$\varepsilon_c \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{l_0}\left(\int_0^{m_0} \frac{1}{I_0{}^{II}} M x_0{}' \, d x_0{}' + \int_{m_0}^{l_0 - m_0} \frac{1}{I_0{}^I} M x_0{}'' \, d x_0{}'' + \int_{l_0 - m_0}^{l_0} \frac{1}{I_0{}^{II}} M x_0{}''' \, d x_0{}'''\right) +$$

$$+ \frac{1}{l_1}\left(\int_0^{m_1} \frac{1}{I_0{}^{II}} M x_1{}' \, d x_1{}' + \int_{m_1}^{l_1 - m_1} \frac{1}{I_0{}^I} M x_1{}'' \, d x_1{}'' + \int_{l_1 - m_1}^{l_1} \frac{1}{I_0{}^{II}} M x_1{}''' \, d x_1{}'''\right).$$

Nennen wir

$$\frac{I_0{}^I}{I_0{}^{II}} = i,$$

dann ist

$$\varepsilon_c I_0{}^I \left(\frac{y_1 - y_0}{l_0} + \frac{y_1 - y_2}{l_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{l_0}\left[\int_{m_0}^{l_0 - m_0} M x_0{}'' \, d x_0{}'' + i \left(\int_0^{m_0} M x_0{}' \, d x_0{}' + \int_{l_0 - m_0}^{l_0} M x_0{}''' \, d x_0{}'''\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{l_1}\left[\int_{m_1}^{l_1 - m_1} M x_1{}'' \, d x_1{}'' + i \left(\int_0^{m_1} M x_1{}' \, d x_1{}' + \int_{l_1 - m_1}^{l_1} M x_1{}''' \, d x_1{}'''\right)\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Das erste Integral ist das statische Moment eines Teiles der wirklichen Momentenfläche auf der Länge $l_0 - 2\,m_0$ für die Oeffnung l_0 in bezug auf die Stützachse 0. Aehnlich bedeuten die anderen Integrale die Teilmomente der Oeffnungen in bezug auf die entsprechenden Stützachsen. Kennt man die Momentenfläche, so kann man auch leicht alle Integrale bestimmen und so die gewünschte Abhängigkeit erhalten.

§ 13. *Eine Rohrbrücke aus Eisenbeton* (Abb. 12) mit rechteckigem Schnitt und ganz festen Verbindungen in den Knoten A, B, C, D stellt ein statisch unbestimmbares System vor. Wenn diese Brücke mit einer ziemlich dicken Schicht Erde bedeckt ist, so kann man die Belastung der Wände durch Erddruck auf der ganzen Höhe h als konstant annehmen und etwa mit q auf die Längeneinheit bezeichnen; die Belastung der oberen und unteren mit p.

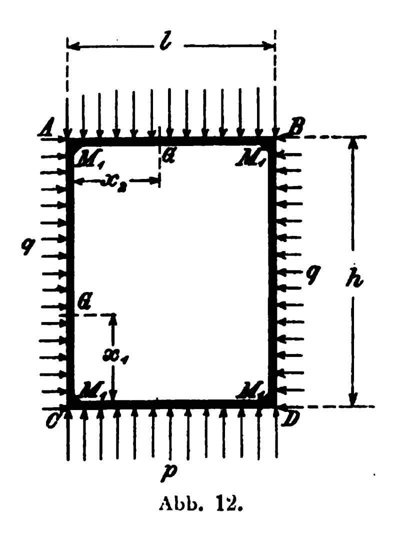


Abb. 12.

Wegen der Symmetrie der Belastung wirken in allen Knoten gleiche Momente M_1, die wir für statisch unbestimmbar ansehen.

In solchen Rohrbrücken sind die Belastungen der Horizontalplatten gewöhnlich so viel stärker als die der vertikalen, daß auf den ersten Blick die Vermutung entsteht, daß in den letzten im Gegensatz zu den ersten keine Zugkräfte auftreten werden. Es stellen also die Vertikalplatten (AC, BD) den Fall § 8 vor, und die Horizontalplatten (AB, CD) den Fall des § 10. Daher muß, wenn man Temperaturwechsel nicht beachtet, M_1 folgende Bedingungen erfüllen:

$$\int_0^h \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{AC}}{\partial M_1} dx_1 + \int_0^h \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_1} dx_1 + \int_0^l \frac{M_{AB}}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_1} dx_2 -$$

$$- \int_0^l \frac{M_{AB} y_0}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial N_{AB}}{\partial M_1} dx_2 - \int_0^l \frac{N_{AB} y_0'}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_1} dx_2 +$$

$$+ \int_0^l \frac{N_{AB} y_0 y_0'}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial N_{AB}}{\partial M_1} dx_2 = 0,$$

wo die ersten zwei Integrale sich auf Stab AC beziehen, die übrigen auf AB. Dabei sind ε_c der Elastizitätskoeffizient für Beton bei Druck; Ω der Ganzschnitt und I das Trägheitsmoment des Stabes AC, bezogen auf eine Achse, welche senkrecht zu den Kräften durch den Schwerpunkt geht; ähnlich stellen ε_c', I_0' die entsprechenden Größen für den Stab AB dar. Das Biegungsmoment irgend eines Schnittes G des Stabes AC in der Entfernung x_1 von C ist:

$$M_{AC} = M_0 + M_1,$$

wo M_0 das Biegungsmoment eines gewöhnlichen, frei in A und C gestützten Balkens ist. Die drückende Kraft ist:

$$N_{AC} = \frac{p\,l}{2}$$

wegen der Gleichheit der Momente in A und C. Also für Stab A:

$$\frac{\partial N_{AC}}{\partial M_1} = 0, \qquad \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_1} = 1.$$

Daher:

$$\int_0^h \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{AC}}{\partial M_1} dx_1 = 0$$

$$\int_0^h \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{AC}}{\partial M_1} dx_1 = \frac{1}{\varepsilon_c I} \left(\int_0^h M_0 dx_1 + M_1 h\right),$$

wenn man ε_c und I auf der ganzen Höhe h als konstant betrachten darf.

Betrachten wir den Stab AB, so finden wir, daß für einen beliebigen Schnitt G in der Entfernung x_2 von A das Biegungsmoment gleich

$$M_{AB} = M_0' + M_1$$

ist, wo M_0' das Biegungsmoment für einen gewöhnlichen, auf den Stützen A und B frei liegenden Balken ist.

Die drückende Kraft ist hier

$$N_{AB} = \frac{qh}{2},$$

also ist für Stab AB

$$\frac{\partial N_{AB}}{\partial M_1} = 0, \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_1} = 1.$$

Daher:

$$\int_0^l \frac{M_{AB}\, y_0}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial N_{AB}}{\partial M_1} dx_2 = 0, \qquad \int_0^l \frac{N_{AB}\, y_0 y_0'}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial N_{AB}}{\partial M_1} dx_2 = 0,$$

$$\int_0^l \frac{M_{AB}}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_1} dx_2 = \int_0^l \frac{M_0' dx_2}{\varepsilon_c' I_0'} + \int_0^l \frac{M_1 dx_2}{\varepsilon_c' I_0'} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_c'} \left(\int_0^l \frac{M_0' dx_2}{I_0'} + M_1 \int_0^l \frac{dx_2}{I_0'} \right),$$

$$\int_0^l \frac{N_{AB}\, y_0'}{\varepsilon_c' I_0'} dx_2 = \frac{qh}{2\varepsilon_c'} \int_0^l \frac{y_0'}{I_0'} dx_2,$$

und die Bedingung, welche von dem Moment M_1 erfüllt werden muß, lautet nun so:

$$\frac{1}{\varepsilon_c I} \int_0^h M_0 dx_1 + \frac{h}{\varepsilon_c I} M_1 + \frac{1}{\varepsilon_c'} \int_0^l \frac{M_0' dx_2}{I_0'} + \frac{M_1}{\varepsilon_c'} \int_0^l \frac{dx_2}{I_0'} + \frac{qh}{2\varepsilon_c'} \int_0^l \frac{y_0'}{I_0'} dx_2 = 0,$$

woraus:

$$M_1 = -\frac{\int\limits_0^h M_0\,dx_1 + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c'}\int\limits_0^l \frac{M_0'\,dx_2}{I_0'} + \frac{q h \varepsilon_c I}{2\varepsilon'}\int\limits_0^l \frac{y_0'}{I_0'}\,dx_2}{h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c'}\int\limits_0^l \frac{dx_2}{I_0'}}.$$

Das erste Integral dieser Formel ist der Inhalt der Ebene der Momente für den geraden Balken AC oder:

$$\int\limits_0^h M_0\,dx_1 = \frac{q h^3}{12},$$

folglich:

$$M_1 = -\frac{\frac{q h^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c'}\int\limits_0^l \frac{M_0\,dx_2}{I_0'} + \frac{q h \varepsilon_c I}{2\varepsilon_c'}\int\limits_0^l \frac{y_0'\,dx_2}{I_0'}}{h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c'}\int\limits_0^l \frac{dx_2}{I_0'}} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Zur genauen Bestimmung von M_1 müßten wir die Abhängigkeit der Größen I_0' und y_0' von x_2 finden, was gar nicht leicht ist. Manchmal kann man diese Größen als konstant für die ganze Länge l betrachten, und dann ist:

$$M_1 = -\frac{\frac{q h^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'}\frac{p l^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{q h l y_0'}{2}}{h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Mitunter kann man auch die Platte AB in Abschnitte mit darin konstanten I_0' und y_0' teilen; in allen Fällen aber wird man bei Berechnung des Momentes M_1 einer Brücke mit bekannten Abmessungen auf Grund der Arbeitsbedingungen und praktischen Daten jene Größen y_0' und I_0' annähernd bestimmen, dieselben in (38) hineinstellen, M_1 finden und erst dann sich überzeugen, ob y_0' und I_0' auf Grund der Gleichung (11) und Abhängigkeit y_0 und y_0' richtig angenommen waren.

Ist M_1 bestimmt, so kann man leicht M_{AC} und M_{AB} bestimmen:

$$M_{AC} = \frac{q h^2}{8} + M_1$$

$$M_{AB} = \frac{p l^2}{8} + M_1.$$

§ 14. *Betoneiserne Balkenbrücke.* Betrachten wir eine solche, gestützt auf zwei gleichen Säulen CA und DB, die mit dem Balken CD in den beiden Knoten C und D steif vereinigt sind (Abb. 13). Die Säulen seien

pfahlförmig tief in die Erde gegraben, dermaßen, daß sie in den Punkten A und B als stark befestigt gelten können. Der Horizontalbalken sei dann unterworfen: 1) der gleichmäßig verteilten Belastung p auf die Längeneinheit, 2) konzentrierten Vertikalkräften P, 3) manchen unbeträchtlichen Horizontalkräften durch die ebenso gerichtete Wirkung auf die Säulen und durch die Befestigung des Systems in den Punkten A, B, C und D.

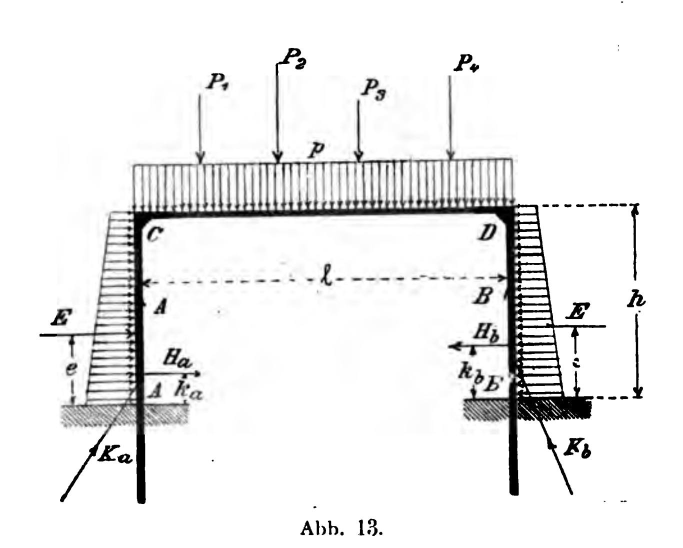


Abb. 13.

Die Säulen sind belegt 1) mit Längsdruckkräften vom Balken CD und 2) dem Seitendruck der Erde, dessen Gesamtresultanten E in der Entfernung e über den befestigten Punkten A und B wirken mögen.

Unsere Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der Reaktionen K_a und K_b, dann können die Momente M und die Längskräfte N für einen beliebigen Schnitt des Balkens oder der Säulen leicht gefunden werden. Wir zerlegen K_a in eine horizontale und eine vertikale Komponente H_a und A, und nennen wir die Entfernung von H_a zum befestigten Punkt A mit k_a (nach oben von A positiv zu rechnen).

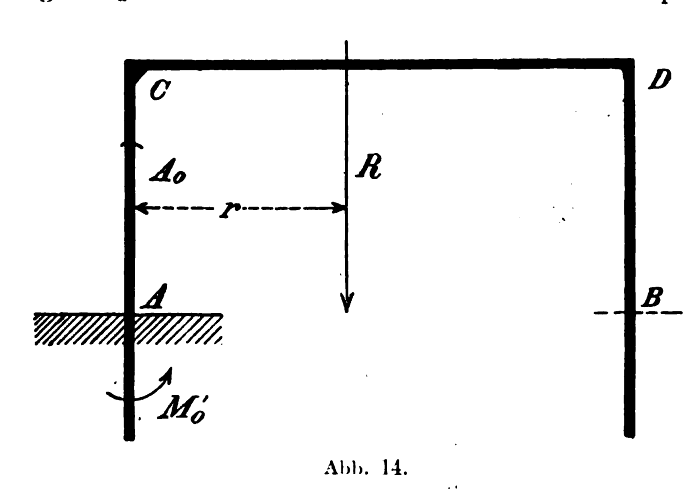


Abb. 14.

Wir wollen dann

$$M_A = H_a k_a$$

das Befestigungsmoment bei A nennen. Aehnlich zerlegen wir K_b in H_b und B und nennen

$$M_B = H_b k_b.$$

Zur genauen Bestimmung von K_a und K_b müssen wir sechs Unbekannte finden: A, B, H_a, H_b, M_A und M_B. Da wir nur drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen können, müssen wir die drei übrigen Gleichungen aus der Elastizität finden. Machen wir nun zuerst unsere Brücke statisch

bestimmbar, indem wir die Befestigung ganz aufheben bei einer der Stützen, etwa B. Wir haben dann drei Stäbe AC, CD und DB, ganz steif in C und D verbunden. Es sei dann R (Abb. 14) die Resultante aller Kräfte, welche auf das System wirken; wegen der Gleichmäßigkeit der horizontalen Drücke auf die Säulen wird diese Kraft vertikal gerichtet sein, etwa in der Entfernung r von A; auf der Stütze A wirkt dann entgegen $A_0 = R$ und ein Moment $M_0' = Rr$. Bei gleichzeitiger Wirkung dieser Kräfte und der äußeren Belastung können in den Schnitten des Systems Biegungsmomente M_0 entstehen.

Wir müssen jetzt bedenken, welche Kräfte und Biegungsmomente in A und B anzulegen sind (Abb. 15), damit die Bedingungen erfüllt werden, unter denen die Brücke wirklich arbeitet. Im Punkt B des Hauptsystems müssen wir dann anlegen die Längswirkung von B, den Horizontaldruck H_b

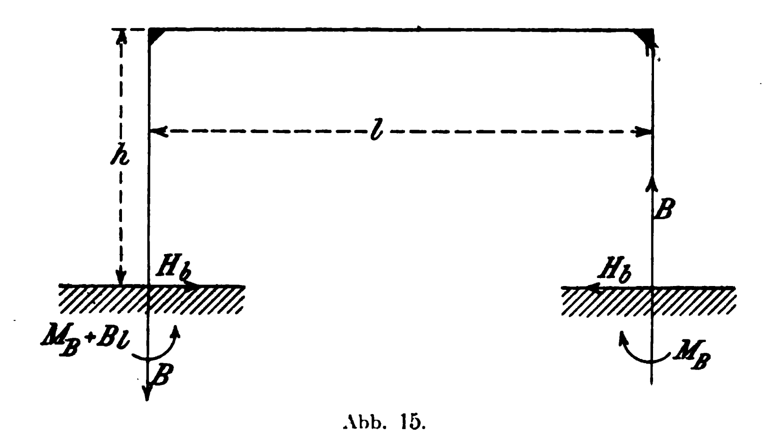


Abb. 15.

und das Biegungsmoment M_b. Da das angelegte Kräftesystem sich selbst in Gleichgewicht halten soll, so muß in A, wie leicht zu sehen, ebenfalls der Horizontaldruck H_b, die nach unten gerichtete Längswirkung B und das Biegungsmoment $M_B + Bl$ vorhanden sein. Bestimmen wir M_B, H_b und B aus den Gleichungen der Elastizität, dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} A &= A_0 - B \\ H_a &= H_b \\ M_A &= M_0' + M_B + Bl \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

und die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten. Die Auffindung von H_b, M_B und B kann nun vereinfacht werden durch Einführung eines Hilfssystems zu dem untersuchten. Wir befestigen an den Stab DB im Schnitt B ein Hilfsdreieck $OB'B''$ (Abb. 16). Die Kräfte B und H_b übertragen wir nach der Spitze des Dreiecks O und die Wirkung des Moments M_B ersetzen wir durch die eines anderen Z, welcher am Hilfsdreieck so wirkt, daß

$$M_B = H_b z - Bw - Z, \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

wo die Bedeutungen von z und w aus der Abbildung zu ersehen sind.

Sehen wir jetzt den Punkt O so zu wählen, daß die drei Größen H_b, B und Z, aus je einer Gleichung mit einer Unbekannten bestimmt werden können. Ziehen wir durch O ein rechtwinkliges Koordinatenachsenpaar, die positive X-Achse nehmen wir entgegen H_b, die positive Y-Achse gleichgerichtet $+ B$. Im Schnitt G mit den Koordinaten x und y ist dann der Einfluß der drei Größen B, H_b und Z auf das Biegungsmoment so auszudrücken:

$$- Z - Bx - H_b\, y.$$

Das Moment der äußeren Kräfte im Teile BDG muß man positiv nehmen, wenn sie diesen Teil in der Richtung des Uhrzeigers zu drehen

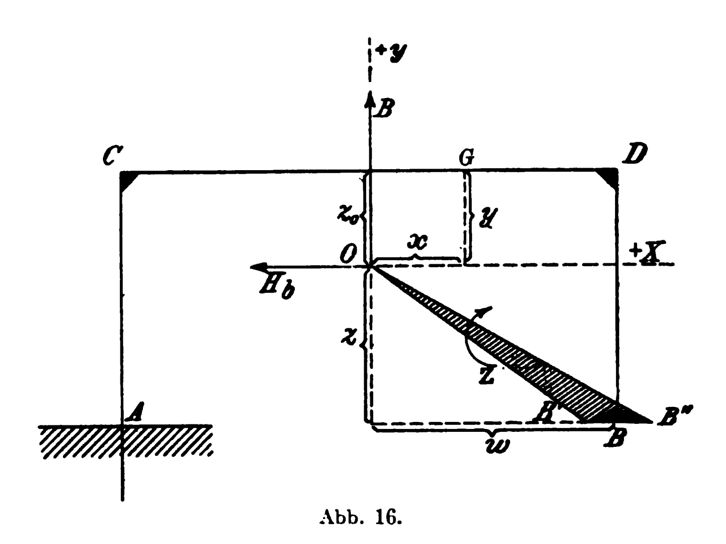


Abb. 16.

bestrebt sind; ebenso rufen augenscheinlich die äußeren Kräfte, welche im Teile ACG wirken ein positives Drehungsmoment hervor.

Also wird das Biegungsmoment im Schnitt G im ganzen

$$M = M_0 - Z - Bx - H_b y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

sein, wo M_0 das Moment an dieser Stelle des Hauptsystems (Abb. 14) nur unter der Wirkung der äußeren Kräfte sein wird.

Was Längskräfte anbetrifft, so bemerken wir, daß auf den Stab CD die Kraft H_a wirkt, auf AC die Kraft $N_{AC} = A = A_0 - B$ und auf DB $N_{DB} = B$. Die Längskraft H_a ist gegen A und B klein; für die statisch unbestimmbaren Größen Z, B und H_b ist auch ihr Einfluß so klein, daß man sie gar nicht zu berücksichtigen braucht, N_{AC} und N_{DB} aber müssen durchaus mit in Betracht gezogen werden.

Bei Balkenbrücken aus Eisenbeton ist das Uebergewicht der Vertikalkräfte, welche auf den Balken CD wirken, über die Längskräfte aus dem Erdendruck, die auf Biegung der Säulen drängen, so groß, daß in den Säulen AC und DB nie Zugkräfte entstehen können, dagegen im Balken CD

hat man nur einfache Biegung anzunehmen. Daher müssen die Größen Z, B, H_b drei Gleichungen zufriedenstellen.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{AC}}{\partial Z} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{AC}}{\partial Z} dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} \cdot \frac{\partial M_{CD}}{\partial Z} dx + \\
&\qquad + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{DB}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{DB}}{\partial Z} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{DB}}{\partial Z} dy = 0 \\
&\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{AC}}{\partial B} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{AC}}{\partial B} dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} \cdot \frac{\partial M_{CD}}{\partial B} dx + \\
&\qquad + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{DB}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{DB}}{\partial B} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{DB}}{\partial B} dy = 0 \\
&\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{AC}}{\partial H_b} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{AC}}{\partial H_b} dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} \cdot \frac{\partial M_{CD}}{\partial H_b} dx + \\
&\qquad + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{DB}}{\varepsilon_c \Omega} \cdot \frac{\partial N_{DB}}{\partial H_b} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} \cdot \frac{\partial M_{DB}}{\partial H_b} dy = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

In diesen Gleichungen entsprechen ε_c, Ω, I den Säulen, ε_c', I_0 dem Balken; die Bedeutungen sind dieselben wie früher (§§ 3 bis 4), dann sind

$$\left.\begin{aligned}
M_{AC} &= (M_0)_{AC} - Z + B(l - w) - H_b y \\
M_{CD} &= (M_0)_{CD} - Z - Bx - H_b z_0 \\
M_{DB} &= (M_0)_{DB} - Z - Bw - H_b y
\end{aligned}\right\}, \quad . \; . \; . \quad (43)$$

wo $(M_0)_{AC}$, $(M_0)_{CD}$, $(M_0)_{DB}$ die Biegungsmomente in den entsprechenden Stäben des Hauptsystems sind. Wir sehen also, daß

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{AC}}{\partial Z} = 0; && \frac{\partial N_{AC}}{\partial B} = -1; && \frac{\partial N_{AC}}{\partial H_b} = 0 \\
&\frac{\partial N_{DB}}{\partial Z} = 0; && \frac{\partial N_{DB}}{\partial B} = +1; && \frac{\partial N_{DB}}{\partial H_b} = 0 \\
&\frac{\partial M_{AC}}{\partial Z} = -1; && \frac{\partial M_{AC}}{\partial B} = l - w; && \frac{\partial M_{AC}}{\partial H_b} = -y \\
&\frac{\partial M_{CD}}{\partial Z} = -1; && \frac{\partial M_{CD}}{\partial B} = -x; && \frac{\partial M_{CD}}{\partial H_b} = -z_0 \\
&\frac{\partial M_{DB}}{\partial Z} = -1; && \frac{\partial M_{DB}}{\partial B} = -w; && \frac{\partial M_{DB}}{\partial H_b} = -y.
\end{aligned}$$

Dadurch werden die Gleichungen (42) sehr vereinfacht und lauten nun

$$-\int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} dy - \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} dx - \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} dy = 0$$

$$-\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{AC}}{\varepsilon_c \Omega} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} (l-w)\, dy - \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} x\, dx +$$
$$+ \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_{DB}}{\varepsilon_c \Omega} dy - \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} w\, dy = 0$$
$$-\int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{AC}}{\varepsilon_c I} y\, dy - \int_{w-l}^{+w} \frac{M_{CD}}{\varepsilon_c' I_0} z_0\, dx - \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_{DB}}{\varepsilon_c I} y\, dy = 0.$$

Multiplizieren wir alle diese Gleichungen mit $\varepsilon_c I$, kehren die Vorzeichen um und berücksichtigen, daß $N_{AC} = A_0 - B$ und $N_{DB} = B$ ist.

Wir erhalten dann

$$\int_{-z}^{+z_0} M_{AC} dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} M_{CD} dx + \int_{-z}^{+z_0} M_{DB} dy = 0$$
$$\int_{-z}^{+z_0} \frac{I}{\Omega} (A_0 - B)\, dy - \int_{-z}^{+z_0} (l-w) M_{AC} dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} M_{CD} x\, dx -$$
$$- \int_{-z}^{+z_0} \frac{I}{\Omega} B dy + \int_{-z}^{+z_0} M_{DB} w\, dy = 0$$
$$\int_{-z}^{+z_0} M_{AC} y\, dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} M_{CD} z_0\, dx + \int_{-z}^{+z_0} M_{DB} y\, dy = 0.$$

Mit Rücksicht auf (43) folgt daraus:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{AC} - Z + B(l-w) - H_b y]\, dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} [(M_0)_{CD} - Z - Bx - H_b z_0]\, dx + \\
&\qquad + \int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{DB} - Z - Bw - H_b y]\, dy = 0 \\
&\int_{-z}^{+z_0} \frac{IA_0}{\Omega} dy - 2\int_{-z}^{+z_0} \frac{IB}{\Omega} dy - \int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{AC} - Z + B(l-w) - H_b y](l-w)\, dy + \\
&+ \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} [(M_0)_{CD} - Z - Bx - H_b z_0]\, x\, dx + \int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{DB} - Z - Bw - H_b y]\, w\, dy = 0 \\
&\int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{AC} - Z + B(l-w) - H_b y]\, y\, dy + \int_{w-l}^{+w} \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} [(M_0)_{CD} - Z - Bx - H_b z_0]\, z_0\, dx + \\
&\qquad + \int_{-z}^{+z_0} [(M_0)_{DB} - Z - Bw - H_b y]\, y\, dy = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Wir wählen nun die Lage von O (Abb. 16) so, daß die Bedingungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{aligned} -\int_{-z}^{+z_0}(l-w)\,dy+\int_{w-l}^{+w}\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\,x\,dx+\int_{-z}^{+z_0}w\,dy=0 \\ \int_{-z}^{+z_0}y\,dy+\int_{w-l}^{+w}\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\,z_0\,dx+\int_{-z}^{+z_0}y\,dy=0 \\ -\int_{-z}^{+z_0}y(l-w)\,dy+\int_{w-l}^{+w}\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\,z_0 x\,dx+\int_{-z}^{+z_0}yw\,dy=0 \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ (45)$$

Betrachten wir zuerst Ω, ε_c, I, ε_c', I_0 als konstant. Schreiben wir den Achsen der Säulen AC und DB das Gewicht eins zu, und der Achse von CD das Gewicht $\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}$, so fordern die ersten beiden Gleichungen, daß für ein solches System die statischen Momente in bezug auf die X- wie die Y-Achse Null seien, es muß also Punkt O im Schwerpunkte des so geformten Systems genommen werden.

Die dritte Gleichung (45) fordert dann das Verschwinden des Zentrifugalmomentes in bezug auf die beiden Achsen, d. h. es müssen dieselben die Hauptachsen des umgeformten Systems sein. Da unser System symmetrisch ist in bezug auf die Y-Achse, so wird letztere auch Hauptachse sein, so daß die letzte Gleichung (45) erfüllt sein wird. Es ist klar, daß dann

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \frac{h^2}{2h+\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\,l} \\ w &= \frac{l}{2} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\ (46)$$

Bei einer solchen Lage des Punktes O gestalten sich die Gleichungen (44) so:

$$Z\left[\int_{-z}^{+z_0}dy+\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}dx+\int_{-z}^{+z_0}dy\right]=\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\,dy+\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\,dx+$$
$$+\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\,dy$$

$$B\left[\int_{-z}^{+z_0}(l-w)^2\,dy+\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}x^2\,dx+\int_{-z}^{+z_0}w^2\,dy\right]-\frac{I}{\Omega}\left[A_0\int_{-z}^{+z_0}dy-2B\int_{-z}^{+z_0}dy\right]-$$
$$-\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}(l-w)\,dy+\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\,x\,dx+\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\,w\,dy$$

$$H_b\left[\int_{-z}^{+z_0} y^2 dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w} z_0^2 dx + \int_{-z}^{+z_0} y^2 dy\right] = \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, y\, dy +$$

$$+ \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, z_0\, dx + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, y dy$$

oder

$$Z\left[2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l\right] = \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, dx + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB} dy$$

$$B\left[2h\left(w^2 - wl + \frac{l^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l\left(w^2 - wl + \frac{l^2}{3}\right)\right] = \frac{Ih}{\Omega}[A_0 - 2B] -$$

$$-\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}(l - w)\, dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, x\, dx + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, w\, dy$$

$$H_b\left[\frac{2(z_0^3 + z^3)}{3} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0^2\, l\right] = \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, y\, dy +$$

$$+ \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, z_0\, dx + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, y\, dy.$$

Nun ist $w = \frac{l}{2}$, also

$$\left.\begin{aligned}
Z &= \frac{\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, dy + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, dx}{2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l} \\
B &= \frac{\frac{IA_0 h}{\Omega} - \frac{l}{2}\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, dy + \frac{l}{2}\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, x\, dx}{\frac{l^2}{12}\left(6h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l\right) + \frac{2Ih}{\Omega}} \\
H_b &= \frac{\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{AC}\, y\, dy + \int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\, y\, dy + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\, dx}{\frac{2}{3}(z_0^3 + z^3) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0^2\, l.}
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Wir bestimmen jetzt die Bedeutungen der sechs Integrale in diesen Gleichungen. $\int_{-z}^{+z}(M_0)_{AC} dy$ ist die Fläche der Momente für die Schnitte des Stabes AC im Hauptsystem (Abb. 14). Diese Schnitte unterliegen

Biegungsmomenten von a) Erdendruck auf den Stab AC, b) konzentrierten Kräften, welche auf den Balken CD wirken, c) gleichmäßig verteilter Belastung des Balkens CD und d) Erdendruck auf den Stab DB.

Betrachten wir einen Schnitt V des Stabes AC in Entfernung y vom Knoten C. Ist h_0 die Höhe der Erdschicht über C, mit eingerechnet die Schicht, welche die Wirkung der gleichmäßigen Belastung ersetzen kann, dann ist bekanntlich die Resultante E_y für den Druck auf CV gleich

$$E_y = \frac{b\gamma}{2} y (y + 2 h_0) \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2},$$

wo b die Breite des drückenden Erdprismas ist, γ das spezifische Gewicht der drückenden Erdmasse, schließlich φ der natürliche Neigungswinkel. Die Entfernung e_y des Angriffspunktes von E_y bis V ist

$$e_y = \frac{y (y + 3 h_0)}{3 (y + 2 h_0)}.$$

Also ist das Moment im Schnitte V

$$M_y = -\frac{b\gamma y^2}{6} (y + 3 h_0) \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2},$$

wenn wir bei den Vorzeichen die Regel befolgen, welche wir mit dem Hilfssystem (Abb. 16) eingeführt hatten. Durch diese Bedeutung des Momentes ist die Fläche UCA der Biegungsmomente, die im Stabe AC durch Erddruck hervorgerufen worden sind:

$$-\frac{b\gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} \int_0^h y^2 (y + 3 h_0)\, dy = -\frac{b\gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} \left(\frac{h^4}{4} + h_0 h^3\right) =$$

$$= -\frac{b\gamma h^3}{24} (h + 4 h_0) \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Die Entfernung c des Schwerpunktes dieser Fläche von C ist

$$c = \frac{\frac{b\gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} \int_0^h y^3 (y + 3 h_0)\, dy}{\frac{b\gamma h^3}{24} (h + 4 h_0) \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2}} = \frac{4 \int_0^h y^3 (y + 3 h_0)\, dy}{h^3 (h + 4 h_0)} =$$

$$= \frac{4 h^4 \left(\frac{h}{5} + \frac{3 h_0}{4}\right)}{h^3 (h + 4 h_0)} = \frac{h \left(\frac{4}{5} h + 3 h_0\right)}{h + 4 h_0},$$

das heißt, es ist die Entfernung dieses Schwerpunktes von O (Abb. 16) gleich mit dem entsprechenden Vorzeichen:

$$v = z_0 - c = z_0 - \frac{h \left(\frac{4}{5} h + 3 h_0\right)}{h + 4 h_0} = -\frac{h \left(\frac{4}{5} h + 3 h_0\right) - z_0 (h + 4 h_0)}{h + 4 h_0}$$

Also ist das statische Moment der Momentfläche in bezug auf die X-Achse:

$$\frac{b\gamma h^3}{24}\left[h\left(\frac{4}{5}h+3h_0\right)-z_0(h+4h_0)\right]\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Die gleichmäßige Belastung p ruft im ganzen Stabe gleichmäßige Biegungsmomente hervor, nämlich $-\frac{pl^2}{2}$; jede konzentrierte Kraft P mit der Entfernung a von AC bedingt das Biegungsmoment $-Pa$, also ruft allgemein die Belastung des Balkens CD im Stabe AC die Biegungsmomente

$$-\left(\Sigma Pa+\frac{pl^2}{2}\right)$$

hervor, also wird die Fläche der Momente aus der Belastung des Balkens sich darstellen lassen durch das Rechteck $U'U''C'A'$; ihre Fläche ist

$$-h\left(\Sigma Pa+\frac{pl^2}{2}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

ihr statisches Moment für die X-Achse

$$h\left(\frac{h}{2}-z_0\right)\left(\Sigma Pa+\frac{pl^2}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Der Stab DB ist belastet durch Erddruck, dessen Resultante

$$E=\frac{b\gamma h}{2}(h+2h_0)\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}$$

ist. Die Entfernung e ihres Angriffspunktes von B ist

$$e=\frac{h(h+3h_0)}{3(h+2h_0)}.$$

Die Fläche der Biegungsmomente, welche durch die letzte Kraft im Stabe AC hervorgerufen werden, stellt sich dar als zwei Dreiecke $A''U'''u$ (positiv) und $uC''U^{IV}$ (negativ).

Die Gesamtfläche beider ist

$$\frac{Ee^2}{2}-\frac{E(h-e)^2}{2}=\frac{E}{2}h(2e-h)=-\frac{Eh}{2}(h-2e)=$$

$$=-\frac{b\gamma h^2}{4}(h+2h_0)\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\cdot\frac{h^2}{3(h+2h_0)}=-\frac{b\gamma h^4}{12}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}; \quad (52)$$

das statische Moment beider für die X-Achse ist

$$-\frac{Ee^2}{2}\left(z-\frac{e}{3}\right)-\frac{E(h-e)^2}{2}\left(z_0-\frac{h-e}{3}\right)=$$

$$=-\frac{E}{2}\left[e^2\left(z-\frac{e}{3}\right)+(h-e)^2\left(z_0-\frac{h-e}{3}\right)\right]=$$

$$=-\frac{b\gamma h}{4}(h+2h_0)\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\left[e^2\left(z-\frac{e}{3}\right)+(h-e)^2\left(z_0-\frac{h-e}{3}\right)\right]. \quad (53)$$

Wenn wir jetzt (48), (50) und (52) zusammenziehen, dann erhalten wir

$$\int_{-z}^{+z_0} (M_0)_{AC}\, dy = -h\left[\frac{b\gamma h^2 (3h+4h_0)}{24}\,\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2} + \Sigma Pa + \frac{pl^2}{2}\right]; \quad (54)$$

aus (49), (51) und (53) finden wir dann

$$\int_{-z}^{+z_0} (M_0)_{AC}\, y\, dy = \frac{b\gamma h}{24}\,\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\left\{h^2\left[h\left(\frac{4}{5}h+3h_0\right) - z_0(h+4h_0)\right] -\right.$$

$$\left. -6(h+2h_0)\left[e^2\left(z-\frac{e}{3}\right)+(h-e)^2\left(z_0-\frac{h-e}{3}\right)\right]\right\} +$$

$$+ h\left(\frac{h}{2}-z_0\right)\left(\Sigma Pa + \frac{pl^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Wenden wir uns jetzt an den Stab *DB* (Abb. 18). Ein Schnitt *V* dieses Stabes unterliegt einem Biegungsmoment durch Erddruck auf den Teil *VB*, dessen Resultante

$$E_y = \frac{b\gamma y}{2}[y+2(h-y+h_0)]\,\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2} = \frac{b\gamma y}{2}[2(h+h_0)-y]\,\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}$$

ist, und

$$e_y = \frac{y[y+3(h-y+h_0)]}{3[y+2(h-y+h_0)]} = \frac{y[3(h+h_0)-2y]}{3[2(h+h_0)-y]}\ .$$

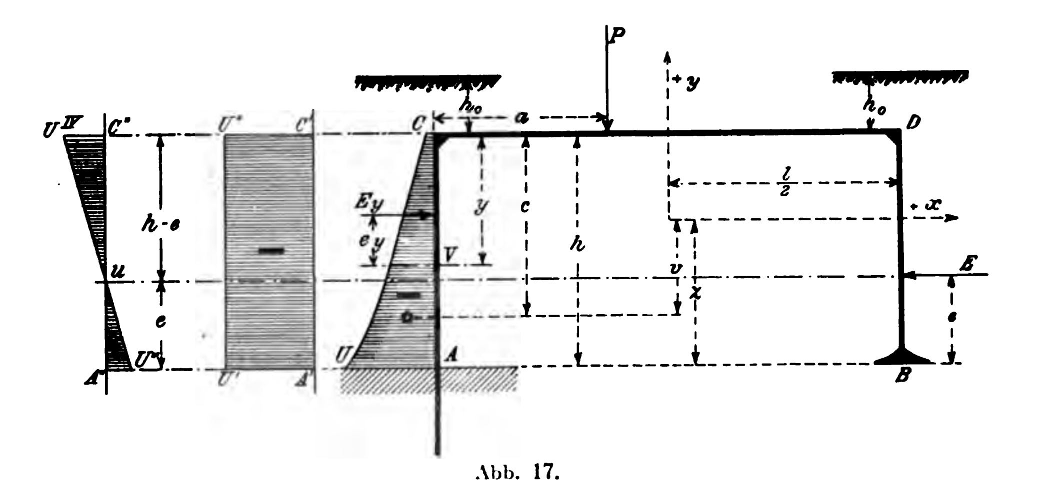


Abb. 17.

Also ist das Moment in *V*:

$$M_v = -\frac{b\gamma y}{2}[2(h+h_0)-y]\left\{y - \frac{y[3(h+h_0)-2y]}{3[2(h+h_0)-y]}\right\}\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2} =$$

$$= -\frac{b\gamma y^2}{6}[3(h+h_0)-y]\,\mathrm{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\ ,$$

folglich die Fläche der Biegungsmomente für DB:

$$\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\,dy = -\frac{b\gamma}{6}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\int_0^h y^2\,[3\,(h+h_0)-y]\,dy =$$

$$= -\frac{b\gamma h^3}{24}(3\,h+4\,h_0)\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Die Entfernung des Schwerpunktes dieser Fläche von B ist

$$e = \frac{\frac{b\gamma}{6}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\int_0^h 3\,[y^3\,(h+h_0)-y]\,dy}{\frac{b\gamma h^3}{24}(3\,h+4\,h_0)\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{4\int_0^h y^3\,[3\,(h+h_0)-y]\,dy}{h^3\,(3\,h+4\,h_0)} = \frac{h\left[3\,(h+h_0)-\frac{4}{5}\,h\right]}{3\,h+4\,h_0};$$

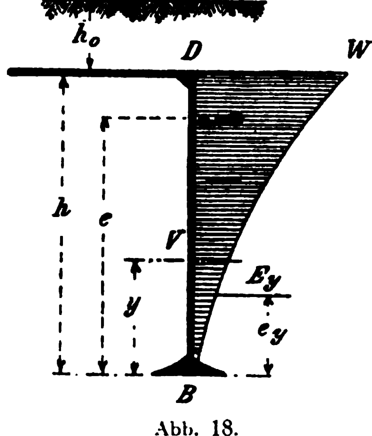


Abb. 18.

die Entfernung von O (Abb. 17) ist

$$e - z = \frac{h\left[3\,(h+h_0)-\frac{4}{5}\,h\right]}{3\,h+4\,h_0} - z =$$

$$= \frac{h\left[3\,(h+h_0)-\frac{4}{5}\,h\right]-z\,(3\,h+4\,h_0)}{3\,h+4\,h_0}.$$

Also ist das statische Moment der Fläche BDW für die X-Achse:

$$\int_{-z}^{+z_0}(M_0)_{DB}\,y\,dy =$$

$$= -\frac{b\gamma h^3}{24}\left\{h\left[3\,(h+h_0)-\frac{4}{5}\,h\right]-z\,(3\,h+4\,h_0)\right\}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}. \quad (57)$$

Was den Balken CD anbetrifft, so findet man dafür leicht:

$$\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\,dx = -\left(\frac{\Sigma\,Pa^2}{2}+\frac{pl^3}{6}\right) \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

und

$$\int_{w-l}^{+w}(M_0)_{CD}\,x\,dx = \frac{\Sigma\,Pa^2\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{3}\right)}{2}+\frac{pl^4}{24} \quad \ldots \quad (59)$$

Beachten wir die Bedeutung der Integrale aus (54), (55), (56), (57), (58), (59), dann finden wir leicht die Bedeutung des Systems von Gleichungen (47):

$$
\left.
\begin{aligned}
Z &= \frac{\frac{b\gamma h^3(3h+4h_0)}{12}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2} + h\Sigma Pa + \frac{pl^2h}{2} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\left(\frac{\Sigma Pa^2}{2} + \frac{pl^3}{6}\right)}{2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\, l} \\
B &= \frac{\frac{Ih}{\Omega}(\Sigma P + pl) + \frac{hl}{2}\left(\Sigma Pa + \frac{pl^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\left[\frac{\Sigma Pa^2\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3}\right)}{2} + \frac{pl^4}{24}\right]}{\frac{2Ih}{\Omega} + \frac{l^2}{12}\left(6h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\, l\right)} \\
H_b &= \frac{\frac{b\gamma h}{12}\operatorname{tg}^2\frac{90-\varphi}{2}\left\{2h^2\left[h\left(\frac{2}{5}h+h_0\right) - z_0(h+2h_0)\right] - 3(h+2h_0)\left[e^2\left(z-\frac{e}{3}\right)+(h-e)^2\left(z_0-\frac{h-e}{3}\right)\right]\right\} + h\left(\frac{h}{2}-z_0\right)\left(\Sigma Pa+\frac{pl^2}{2}\right) - \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}z_0\left(\frac{\Sigma Pa^2}{2}+\frac{pl^3}{6}\right)}{\frac{2}{3}(z_0^3+z^3) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}z_0^2\, l}
\end{aligned}
\right\} \quad (60)
$$

Nun kennen wir Z, B, H_b, und es wird leicht sein, nach den Gleichungen (43) das Biegungsmoment in einem beliebigen Schnitte unseres eingliedrigen Brückensystems zu bestimmen, ebenso die Längskräfte, drückende und ziehende.

Wenn I_0 nicht als konstant angesehen werden dürfte, dann müßten wir den Balken CD in Stücke einteilen, für die ungefähr konstante Mittelwerte von I_0 angenommen werden können, und verfahren dann wie in den §§ 12 und 13.

§ 15. *Vielgliedrige Balkenbrücke.* Wir wenden uns am Schlusse dieses Abteils zu einem der allgemeinsten und wichtigsten Fälle der Praxis, zur vielgliedrigen Balkenbrücke (Abb. 19).

Das charakteristische Merkmal solcher Brücken aus Eisenbeton ist eine steife, keine Verschiebungen zulassende Befestigung der Hauptbalken

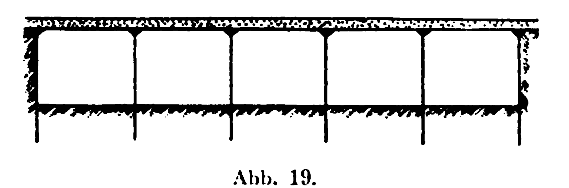


Abb. 19.

an den Säulen, welche sich auf Fundamentplatten stützen oder entsprechend tief eingepfahlt sind.

Von dieser Brücke teilen wir ein Glied mit den beschwerenden äußeren Kräften ab (Abb. 20); damit die Arbeitsbedingungen für dieses Glied nicht abgeändert werden, müssen die Wirkungen der übrigen Glieder durch entsprechende Kräfte ersetzt werden. Es werden da sechs Faktoren vor-

handen sein: 1) zwei Biegungsmomente M' und M'', 2) zwei Vertikalkräfte A' und A'', zuletzt 3) zwei Längskräfte N' und N''.

Bei der Ausrechnung der Elastizitätsgleichungen können wir die letzten Kräfte vernachlässigen, so klein sind sie im Vergleich mit den übrigen vier

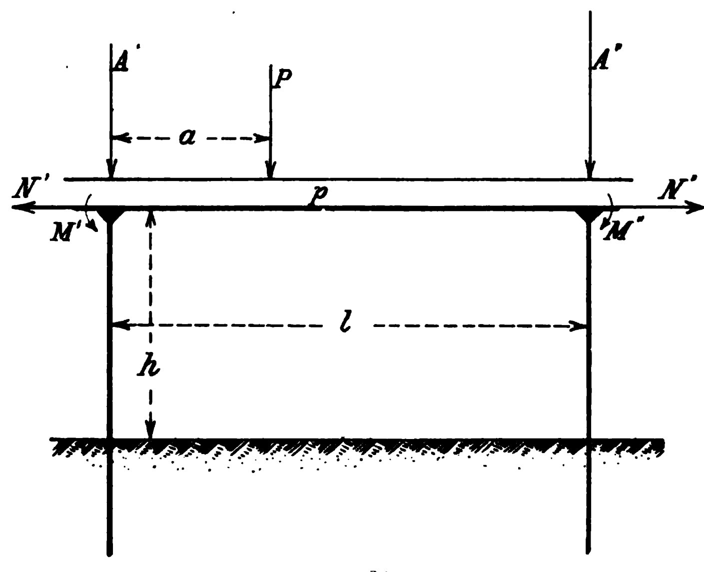


Abb. 20.

Kräften, außerdem vereinfachen sich dadurch die Resultate sehr bedeutend.

Beim Vergleich mit den Resultaten des vorigen Paragraphen sehen wir, daß dessen Ausführungen auch hier gelten, wenn man noch die Faktoren M', M'', A' und A'' mit in Betracht zieht.

Man hat dann leicht:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a)} \quad A_0 = \Sigma P + pl + A' + A'' \\
&\qquad M_0' = \Sigma Pa + \frac{pl^2}{2} + A''l - M' + M'' \\
&\text{b)} \quad A = A_0 - B \\
&\qquad H_a = H_b \\
&\qquad M_A = M_0' + M_B + Bl \\
&\text{c)} \quad M_B = H_b z - Bw - Z \\
&\text{d)} \quad M = M_0 - Z - Bx - H_b y \\
&\text{e)} \quad z_0 = \frac{h^2}{2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l} \\
&\qquad z = h - z_0 \\
&\qquad w = \frac{l}{2}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (61)$$

und dann

$$
\left.
\begin{aligned}
Z &= \frac{-h\left(\Sigma Pa + \frac{pl^2}{2} - M' + M''\right) - \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\left(\Sigma Pa^2 + \frac{pl^3}{6} + M'' l\right)}{2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\, l} \\
B &= \frac{\frac{I A_0 h}{\Omega} + \frac{hl}{2}\left(\Sigma Pa + \frac{pl^2}{2} - M' + M''\right) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\left[\frac{\Sigma Pa^2\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{3}\right)}{2} + \frac{pl^4}{24}\right]}{\frac{l^2}{12}\left(6h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon' I_0}\, l\right) + \frac{2Ih}{\Omega}} \\
H_0 &= \frac{h\left(\frac{h}{2} - z_0\right)\left(\Sigma Pa + \frac{pl^2}{2} - M' + M''\right) - \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\, z_0 \left(\Sigma Pa^2 + \frac{pl^3}{6} + M'' l\right)}{\frac{2}{3}(z_0^3 + z^3) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0}\, z_0^2 l.}
\end{aligned}
\right\} \quad (62)
$$

Der weitere Gang der Berechnung der Biegungsmomente über den Stützen und in den Befestigungspunkten der Säulen wird am besten zu ersehen sein aus einem Zahlenbeispiele, das wir im nächsten Abschnitt V durchzuführen gedenken.

Abschnitt V.

§ 16. *Ein Balken auf Stützen eingeklemmt.* In einem solchen Balken existieren immer sogenannte Wendeschnitte, bei denen das Biegungsmoment sein Vorzeichen ändert, also worin es gleich Null wird. In Eisenbetonbalken, welche auf Stützen fest eingeklemmt sind, müssen wir die Entfernung eines solchen Schnittes von der Stütze mit m messen (vergl. § 11), denn da ändert sich ebenfalls das Vorzeichen des Trägheitsmomentes.

Betrachten wir den Fall, wo i' und i'' ungleich sind, dagegen $m = n$. Dann haben wir aus

$$
M_1 = -\frac{p\{l^3 - 2m^2[(3l - 2m)(1 - i') + (9l - 14m)(1 - i'')]\}}{12[l - 2m(2 - i' - i'')]},
$$

wo M_1 das Moment an der Stütze ist,

$$
\frac{plm}{2} - \frac{pm^2}{2} + M_1 = 0,
$$

aus dem Ausdruck für das Biegungsmoment in einem beliebigen Schnitt eines eingeklemmten Balkens, welcher überall gleichmäßig belastet ist. Daraus

$$
m(l - m) = \frac{l^3 - 2m^2[(3l - 2m)(1 - i') + (9l - 14m)(1 - i'')]}{6[l - 2m(2 - i' - i'')]},
$$

aus welcher Gleichung bei bekannten anderen Elementen m, die Lage des Wendeschnittes gefunden werden kann. Da aber die Gleichung dann kubisch

ist, was die Auflösung langwierig macht, so bedienen wir uns lieber der folgenden Tabelle, die i' in Abhängigkeit von i'' und m darstellt:

Tabelle der Bedeutungen von i'.

i''	$m = 0{,}23\,l$	$m = 0{,}22\,l$	$m = 0{,}21\,l$	$m = 0{,}20\,l$	$m = 0{,}19\,l$	$m = 0{,}18\,l$	$m = 0{,}17\,l$	$m = 0{,}16\,l$	$m = 0{,}15\,l$
1,55	1,0222	1,1775	1,3602	1,5773	1,8471	2,1506	2,5328	3,0030	3,5884
1,50	0,9944	1,1483	1,3297	1,5455	1,8141	2,1164	2,4975	2,9666	3,5509
1,45	0,9665	1,1190	1,2991	1,5137	1,7711	2,0822	2,4621	2,9302	3,5134
1,40	0,9386	1,0898	1,2685	1,4819	1,7380	2,0480	2,4268	2,8937	3,4759
1,35	0,9107	1,0605	1,2380	1,4400	1,7050	2,0138	2,3914	2,8573	3,4384
1,30	0,8828	1,0313	1,2074	1,4082	1,6719	1,9796	2,3561	2,8208	3,4009
1,25	0,8549	1,0020	1,1769	1,3864	1,6389	1,9454	2,3207	2,7844	3,3634
1,20	0,8270	0,9728	1,1463	1,3546	1,6059	1,9111	2,2854	2,7480	3,3259
1,15	0,7992	0,9435	1,1158	1,3228	1,5728	1,8769	2,2500	2,7115	3,2884
1,10	0,7713	0,9143	1,0852	1,2909	1,5398	1,8427	2,2147	2,6751	3,2509
1,05	0,7434	0,8850	1,0547	1,2591	1,5067	1,8085	2,1793	2,6386	3,2134
1,00	0,7155	0,8558	1,0241	1,2273	1,4737	1,7743	2,1440	2,6022	3,1759
0,95	0,6876	0,8265	0,9935	1,1955	1,4407	1,7401	2,1086	2,5657	3,1384
0,90	0,6597	0,7973	0,9630	1,1637	1,3746	1,7059	2,0733	2,5293	3,1009
0,85	0,6318	0,7580	0,9324	1,1319	1,3416	1,6717	2,0379	2,4928	3,0634
0,80	0,6039	0,7288	0,9019	1,1000	1,3085	1,6375	2,0026	2,4304	3,0259
0,75	0,5760	0,6995	0,8713	1,0682	1,2755	1,6033	1,9672	2,3940	2,9884
0,70	0,5482	0,6703	0,8408	1,0364	1,2425	1,5691	1,9319	2,3575	2,9509
0,65	0,4923	0,6410	0,8102	1,0046	1,1094	1,5349	1,8965	2,3211	2,9134
0,60	0,4644	0,6118	0,7797	0,9728	1,0764	1,5007	1,8612	2,2847	2,8759
0,55	0,4365	0,5825	0,7491	0,9409	1,0433	1,4665	1,8259	2,2483	2,8384
0,50	0,4086	0,5533	0,7185	0,9011	1,0103	1,4323	1,7906	2,2119	2,8009

Der Gebrauch jener Tabelle ist zu ersehen aus einem Rechenbeispiele.

Ein **T**-förmiger Balken mit der Länge l und einem Schnitte wie in Abb. 21 ist auf ihrer Länge gleichmäßig belastet mit p; der Balken ist ganz horizontal auf Stützen gelegt. Die Armierung besteht aus drei Teilen: a) geraden Unterlagen f_i, b) geraden Oberlagen f_s und c) gebogenen Einlagen f_c. Die Biegungen der letzten machen wir so, daß ihr oberer horizontaler Teil sich auf die Länge m zieht und erst im Wendeschnitte ss nach unten geht; dem geneigten Teile der Einlagen geben wir ebenfalls die Länge m, wie wir in unseren Gleichungen annahmen; dann haben wir drei Hauptschnitte: I. wo die unteren Betonschichten auf Druck arbeiten, II. den Wendeschnitt, bei dem die oberen Schichten auf Zug zu arbeiten beginnen, und III. den Mittelschnitt. Wir müssen die Trägheitsmomente dieser drei Teile bestimmen. Dazu brauchen wir die genauere Bestimmung: des Elastizitäts-Koeffizienten für Beton bei Druck, die Untersuchung, ob

der Koeffizient für Beton bei Zug zu berücksichtigen ist, und wie groß er dann genommen werden muß.

Was die erste Frage anbetrifft, so bemerken wir, daß wir bei Berechnung des Stützenmomentes M_1 angenommen hatten, ε_c sei konstant für die ganze Länge des Balkens. Es ist klar, daß für diese Größe ihr Mittelwert angenommen werden muß.

Den größten Wert hat ε_c dort, wo die Druckspannungen des Betons sehr klein werden, also in der Nähe des Wendeschnittes ss. Aus den klassischen Untersuchungen von Bach wissen wir, daß bei einer Betonmischung $1 : 2^1/_2 : 5$ der kleinste Wert von μ etwa gleich 7 ist. Den kleinsten Wert für ε_c, also den größten für μ, müssen wir aus dem Schnitt mit größter Druckspannung bestimmen; da wir immer annehmen, daß die Biegung eines Eisenbetonbalkens in der Phase II^b zu berechnen ist, so nehmen wir den größten Wert μ für diese Phase, also bekanntlich $\mu = 15$. Wir müssen also den Mittelwert $\mu = 11$ annehmen.

Für die zweite Frage bemerken wir zunächst, daß bei Berechnung des Reaktionsmomentes die Berücksichtigung der Zugarbeit des Betons ebenso wichtig und motiviert ist, wie ihre Vernachlässigung bei der Berechnung des Balkens auf Grund der Spannungen im gefährlichen Schnitt allein; denn wo bei Eintritt des Eisens in flüssigen Zustand die Phase II^b für den gefährlichen Schnitt als beendet zu betrachten ist, werden andere Schnitte je nach der Lage noch die Phasen I, II^a und teilweise II^b durchmachen. Solange wir nun die Stützmomente nicht kennen, ist es uns nicht möglich, die Grenzen der einzelnen Phasen anzugeben. Jedenfalls befänden sich die Schnitte des Teiles I ebensowohl in der Phase I wie II^a und II^b, da der gefährliche Schnitt der durch die Stütze ist. Da wir aber I_0^{I} für die ganze Länge von I als konstant annehmen wollen, so müssen wir für ε_t, also auch für ν den Mittelwert dieser Größen annehmen. Das größte $\nu = 1$ ist augenscheinlich an den Stellen, wo $\varepsilon_t = \varepsilon_c$; das kleinste ν entspricht den höchsten Spannungen der Phase II^a, also ist es auf Grund der Untersuchungen von Considère und der französischen Regierungskommission etwa gleich 0,1, also der Mittelwert $\nu = 0{,}55$.

Die Bestimmung eines konstanten ν für die Teile II und III ist schwierig, weil dort die größten Spannungen sehr von den Einzelfällen der Größen des Schnittes und der Armierung abhängen. Besonders schwierig wäre eine Abgrenzung von II und III auf Grund der verschiedenen ν. Der Einfachheit halber nehmen wir nun ν für beide Teile gleich. Auch da ist das größte ν an den Grenzen von II gleich 1; das kleinste ist in den Mittelschnitten III. Auf Grund einer Reihe von Untersuchungen, die ich im Mai 1905 in der Experimentalstation des Polytechnikums zu Warschau angestellt habe, kann ich die wichtige Tatsache mitteilen, daß die reduzierten Verlängerungen der unteren Betonschichten im Mittelschnitt des Teiles III

in einem Balken vom Typus der Abb. 21 in dem Momente, wo im Stützschnitt die Phase II^b zu Ende ist, gleich sind den Verlängerungen, bei denen unarmierter Beton reißt. Dadurch dürfen wir das kleinste ν für die Teile II und III gleich 0,44 nehmen, also einen Mittelwert von $\nu = 0,72$.

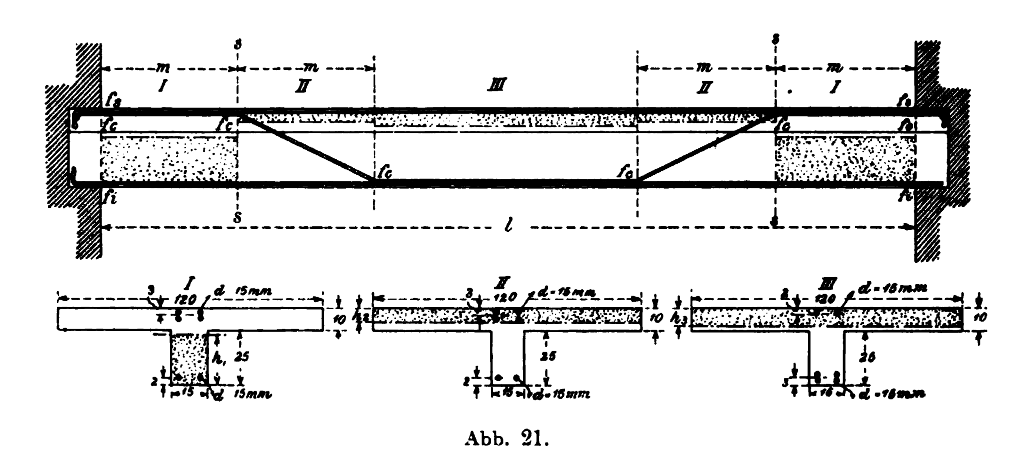


Abb. 21.

Wenden wir uns jetzt an die Bestimmung von I_0^I, also des mittleren Trägheitsmomentes für den Teil I in bezug auf die neutrale Achse dieses Teiles. Die Entfernung dieser Achse vom unteren Rande des Balkens nennen wir h_1; dann bei $\mu = 11$ und $\nu = 0,55$ finden wir leicht das statische Moment des Teiles I (Abb. 21) für den unteren Rand:

$$3,375\,h_1^2 + 24944,425;$$

der Ganzschnitt ist

$$6,75\,h_1 + 982,85;$$

die Lage der neutralen Achse ergibt sich aus der Division dieser Größen, also

$$\frac{3,375\,h_1^2 + 24944,425}{6,75\,h_1 + 982,85} = h_1$$

oder

$$h_1^2 + 291,2\,h_1 - 7390,97 = 0$$

und daraus

$$h_1 = 23,5.$$

Jetzt finden wir leicht:

$$I_0^I = 0,55\left(\frac{120\,.\,10^3}{12} + 120\,.\,10\,.\,6,5^2\right) +$$

$$+ 0,55\left(\frac{15\,.\,1,5^3}{12} + 15\,.\,1,5\,.\,0,75^2\right) + 11\,.\,7,07\,.\,8,5^2 +$$

$$+ \frac{15\,.\,23,5^3}{12} + 15\,.\,23,5\,.\,11,75^2 + 11\,.\,3,53\,.\,21,5^2 = 121\,146\ \text{cm}^4.$$

Ebenso für den Schnitt II:

$$h_2 = 7{,}8 \text{ cm}$$

$$(I_0^{II})' = 118\,146 \text{ cm}^4$$

wenn wir $\mu = 11$ und $\nu = 0{,}72$ annehmen, und für den Schnitt III:

$$h_3 = 9{,}3 \text{ cm}$$

$$I_0^{III} = 135\,434 \text{ cm}^4.$$

Das Trägheitsmoment I_0^{III} für den Schnitt III dient gleichzeitig auch für den ganzen Teil III; für den ganzen Teil II, wir müssen den Mittelwert I_0^{II} zwischen $(I_0^{II})'$ und I_0^{III} nehmen, also:

$$I_0^{II} = 126\,790 \text{ cm}^4.$$

Daraus finden wir:

$$i'' = \frac{135\,434}{126\,790} = 1{,}068$$

$$i' = \frac{135\,434}{121\,146} = 1{,}1179.$$

Mit Hilfe der Interpolationsmethode und der Tafel der Werte von i' findet man leicht $m = 0{,}2075\, l$; somit ist der Ausdruck des Stützmomentes:

$$M_1 = -\frac{pl^2}{12} \frac{\{1 - 2 \,.\, 0{,}2075^2 [(3 - 2 \,.\, 0{,}2075)(1 - 1{,}1179) + (9 - 14 \,.\, 0{,}2075)(1 - 1{,}068)]\}}{[1 - 2 \,.\, 0{,}2075 (2 - 1{,}1179 - 1{,}068)]}$$

oder nach Ausführung

$$M_1 = -0{,}96 \cdot \frac{pl^2}{12}$$

und

$$M_1 = -\frac{pl^2}{12{,}5}.$$

Also wird das größte positive Biegungsmoment im Mittelschnitt

$$M = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{12{,}5} = +\frac{9\,pl^2}{200}.$$

Fast genau dieselben Resultate erhält man für den **T**-Balken, dessen Mittelschnitt auf Abb. 22 gegeben ist. Wir nehmen die Verteilung der Armatur dieses Balkens nach Abb. 21 und erhalten

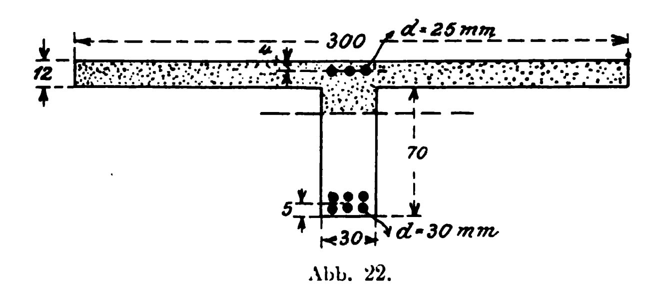


Abb. 22.

$$i'' = 1{,}085; \qquad i' = 1{,}1643; \qquad m = 0{,}2057\, l;$$

$$M_1 = -0{,}98 \frac{pl^2}{12}.$$

Aehnlich erhält man für die Platte der Abb. 23:

$$i'' = 1{,}0066; \qquad i' = 1{,}1584; \qquad m = 0{,}2036\, l;$$

$$M_1 = -0{,}97 \frac{p l^2}{12}.$$

Die obigen Resultate zeigen, daß in solchen Stäben die hervorgerufenen Biegungsmomente sich sehr wenig von denen homogener Stäbe unterscheiden. Projektiert man also Eisenbetonbalken dieses Typus bei gänzlicher Befestigung auf den Stützen und zuerst unbekannten Dimensionen, so

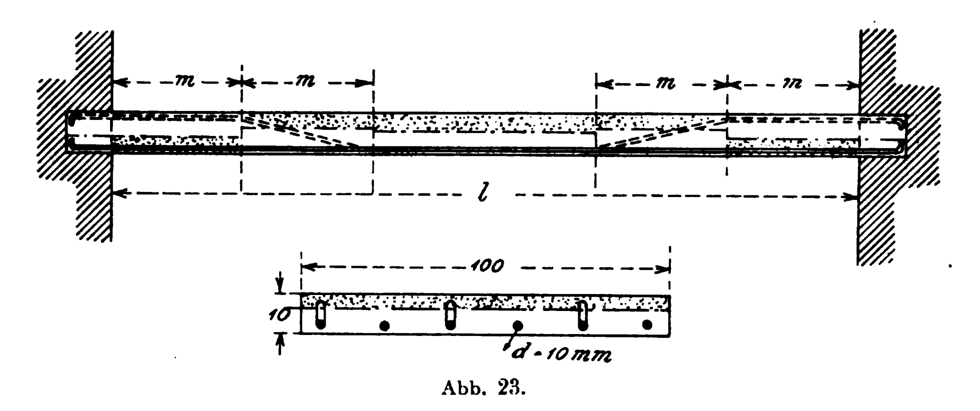


Abb. 23.

muß man das Biegungsmoment wie bei homogenen Balken nehmen und die mittleren Schnitte bei gleichmäßiger Belastung auf das Moment $+\frac{p l^2}{20}$ rechnen. Man beachte jedoch, daß in Wirklichkeit nur sehr selten eine vollständige Befestigung des Balkens vorkommt, daher die Berechnung des Mittelschnittes auf das Moment $+\frac{p l^2}{20}$ für die Praxis sehr gewagt sein würde. Der Grad der Befestigung wird in jedem Falle anders sein, je nach dem Bedingen und der Ausführung der Stützen und hauptsächlich nach den elastischen Eigenschaften der befestigenden Teile und des Balkenmaterials. So kann man auch wegen des vollständigen Mangels an entsprechenden theoretischen Untersuchungen und ihrer Schwierigkeit eine allgemein gültige Formel, die das Biegungsmoment des Mittelschnittes in den verschiedensten Fällen der Praxis angibt; jedenfalls scheint der jetzt allgemein gebräuchliche Wert $+\frac{p l^2}{10}$ nicht zu klein genommen zu sein; vielmehr drückt sich darin eine gewisse Vorsicht aus, welche in diesem Falle sehr am Platze ist, da man nie sicher sein kann, ob der Grad der Befestigung des Balkens sich nicht später infolge von Veränderungen der Konstruktion ebenfalls ändert. Dennoch sollte nach meiner Meinung das Stützmoment immer so genommen werden, als ob der Balken ganz befestigt wäre; dies wird von vielen Spezialisten zu wenig beachtet, die sich in diesem Falle durch willkürliche Annahmen leiten lassen.

Die angegebenen Formeln und Berechnungen zeigen gleichzeitig, daß die Resultate vom Typus des Balkens abhängen. Richten wir bei unserem Balken starke Kragsteine auf den Stützen ein, so können wir sicher sein, daß das Biegungsmoment $+\frac{pl^2}{12}$ überschritten wird; schwächen wir den Schnitt auf den Stützen ab, so erhalten wir immer kleine Stützmomente. Alles hängt hier also ab vom System der Konstruktion, und die unbeschränkte Anwendung in allen Fällen der Resultate, die man für einen besonderen Typus erhält, ist nicht zu empfehlen. Ich schmeichle mir aber, daß die angegebenen Formeln, Beispiele und Erklärungen einfach und durchsichtig genug sind, um den Lesern in den einschlägigen Fällen zum Ziele zu verhelfen.

Abb. 24.

§ 17. *Kontinnierlicher Balken.* Betrachten wir einen Balken mit zwei gleichen Öffnungen l, frei ruhend auf den Stützen 0, 1, 2 und einer Belastung p unterworfen, welche auf beide Hälften gleichmäßig verteilt ist. Angenommen, wir kennen das Trägheitsmoment I_0^{II} auf einer Länge m nach beiden Seiten von der Stütze 1; in den übrigen Teilen des Balkens wollen wir ebenfalls ein konstantes Trägheitsmoment I_0^{I} annehmen; lassen wir auch die ungleichmäßige Senkung der Stützen außer acht, ebenso Temperaturveränderungen. Die Elastizitätsgleichung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\int_0^{l-m} Mx'\,dx' + i\int_{l-m}^{l} Mx''\,dx'' = 0,$$

wo

$$i = \frac{I_0^{I}}{I_0^{II}}.$$

Das erste Integral ist das statische Moment der wirklichen Ebene der Biegungsmomente auf der Länge $l - m$ in bezug auf das Lot durch die Stütze 0. Wegen der Symmetrie des Balkens und seiner Belastung wird die wirkliche Momentenfläche (Abb. 25) auch symmetrisch sein und für jede

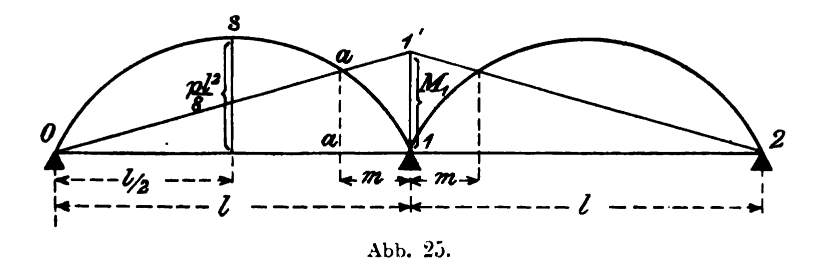


Abb. 25.

Öffnung aus zwei Teilen bestehen: 1) aus dem Dreieck $0\,1\,1'$ mit der Höhe M_1 auf Stütze 1 und 2) aus der Parabel $0\,S\,1$ mit der größten Ordinate $\frac{p l^2}{8}$ in der Mitte. Der Wendeschnitt $a\,a$ liegt im Schnitt der Seite $0\,1'$ des Dreiecks mit der Parabel. Aus Gründen, die schon im vorigen Paragraphen genügend erörtert worden sind, muß dieser Schnitt immer als Abgrenzung der Teile des Balkens mit den Trägheitsmomenten I_0^{I} und I_0^{II} gelten. Da der Wert der Ordinate $a\,a$ aus dem Dreiecke $0\,1\,1'$ gleich ist

$$\frac{M_1\,(l-m)}{l}$$

und aus der Parabel

$$\frac{p m\,(l-m)}{2},$$

diese Werte aber gleich sein müssen, so hat man

$$m = \frac{2\,M_1}{p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Das statische Moment des Dreiecks $O\,a\,a$, bezogen auf die Achse durch O, wird

$$\frac{M_1\,(l-m)^3}{3\,l},$$

und das statische Moment des Teiles $O s a a$ ist

$$\frac{p\,(l-m)^3\,(l+3\,m)}{24}.$$

Aus der algebraischen Summe derselben erhalten wir

$$\int_0^{l-m} M x'\,d x' = \frac{M_1\,(l-m)^3}{3\,l} + \frac{p\,(l-m)^3\,(l+3\,m)}{24};$$

ebenso leicht

$$\int_{l-m}^{l} M x''\,d x'' = \frac{M_1 m\,[3\,l\,(l-m)+m^2]}{3\,l} + \frac{p\,[l^4-(l-m)^3\,(l+3\,m)]}{24}.$$

Daher nimmt die Elastizitätsgleichung die Form

$$\frac{M_1\,(l-m)^3}{3\,l} + i \cdot \frac{M_1\,m\,[3\,l\,(l-m)+m^2]}{3\,l} + \frac{p\,(l-m)^3\,(l+3\,m)}{24} +$$
$$+ i \cdot \frac{p\,[l^4-(l-m)^3\,(l+3\,m)]}{24} = 0$$

an oder

$$\frac{M_1}{l}\,\{(l-m)^3 + i m\,[3\,l\,(l-m)+m^2]\} +$$
$$+ \frac{p}{8}\,\{(l-m)^3\,(l+3\,m) + i\,[l^4-(l-m)^3\,(l+3\,m)]\} = 0;$$

daraus

$$M_1 = -\frac{pl}{8} \cdot \frac{(l-m)^3(l+3m) + i[l^4 - (l-m)^3(l+3m)]}{(l-m)^3 + im[3l(l-m)+m^2]}$$

oder

$$M_1 = -\frac{pl}{8} \cdot \frac{il^4 + (l-m)^3(l+3m)(1-i)}{l^3 - m[3l(l-m)+m^2](1-i)} \quad \ldots \quad (64)$$

Da aus Gleichung (63)

$$M_1 = -\frac{plm}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

folgt, erhalten wir

$$4m = \frac{il^4 + (l-m)^3(l+3m)(1-i)}{l^3 - m[3l(l-m)+m^2](1-i)}$$

und

$$i = \frac{4ml^3 - 4m^2[3l(l-m)+m^2] - (l-m)^3(l+3m)}{l^4 - 4m^2[3l(l-m)+m^2] - (l-m)^3(l+3m)}$$

oder, wenn $m = \beta l$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} i &= 1 + \frac{1-4\beta}{\beta^2(\beta^2 - 4\beta + 6)} \\ M_1 &= -\beta\frac{pl^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Auf Grund dieser Gleichungen gebe ich unten eine Tabelle an, die den Spezialisten beim Projektieren vielleicht einigen Nutzen bringen kann. Ich bemerke nochmals, daß bei der Berechnung von i immer die Arbeit des Betons beim Zug berücksichtigt und ein entsprechendes μ genommen werden muß, will man nicht in einen Fehler verfallen wie Herr O. Gottschalk im Artikel „Stützenmoment des kontinuierlichen Eisenbetonbalkens“ (Beton u. Eisen 1905, IV. 90). Indem er ohne vorherige Untersuchung den Grundsatz der kleinsten Arbeit auf den in diesen Paragraphen untersuchten Fall anwandte, bestimmt er die Trägheitsmomente so, als ob alle Schnitte des Balkens die Phase II^b durchmachen könnten. Grund dafür ist die fehlerhafte Ausdehnung auf alle Schnitte eines Grundsatzes für die Berechnung nur eines einzigen, nämlich des gefährlichen Schnittes, und die Folge davon — eine zu kleine Bedeutung des Stützmomentes.

§ 18. *Rohrbrücke.* Im § 13 untersuchten wir einen der allgemeinen Fälle der Arbeit einer Rohrbrücke, und zwar, wenn in den Vertikalplatten keine Zugspannungen vorhanden sind, welche jedoch in den Horizontalplatten auftreten. Dieser Fall kann auf den ersten Blick bei Plattenbrücken eintreten, wenn z. B. l viel größer als h ist. Dennoch können wir beim Projektieren von Rohrbrücken nie von vornherein das Vorzeichen der Spannungen in den Platten angeben. So muß man auch in den Vorberechnungen immer

β	i	M_1	β	i	M_1
0,30	0,5456	$1,20\ \frac{pl^2}{8}$	0,22	1,4797	$0,88\ \frac{pl^2}{8}$
0,29	0,6136	$1,16\ \frac{pl^2}{8}$	0,21	1,6972	$0,84\ \frac{pl^2}{8}$
0,28	0,6913	$1,12\ \frac{pl^2}{8}$	0,20	1,9542	$0,80\ \frac{pl^2}{8}$
0,27	0,7802	$1,08\ \frac{pl^2}{8}$	0,19	2,2600	$0,76\ \frac{pl^2}{8}$
0,26	0,8823	$1,04\ \frac{pl^2}{8}$	0,18	2,6268	$0,72\ \frac{pl^2}{8}$
0,25	1	$\frac{pl^2}{8}$	0,17	3,0701	$0,68\ \frac{pl^2}{8}$
0,24	1,1362	$0,96\ \frac{pl^2}{8}$	0,16	3,6112	$0,64\ \frac{pl^2}{8}$
0,23	1,2946	$0,92\ \frac{pl^2}{8}$	0,15	4,2787	$0,60\ \frac{pl^2}{8}$

die komplizierten Fälle der Wirkung der Kräfte vermeiden, indem man in der ersten Annäherung entweder die gewöhnliche Biegung ohne Mitwirkung von Längskräften annimmt oder den Fall des außerzentralen Druckes ohne Zugkräfte. Nehmen wir an, wir hätten eine gegebene platte Rohrbrücke mit $h = 1$ m, $l = 2$ m und es sei der Boden dieser Brücke 8 m tief unter der Deckschicht gelegen, darin die Schicht mitgerechnet, welche die Wirkung der beweglichen Belastung ersetzt (Abb. 26). Betrachten wir 1 m der Länge der Brücke und nehmen wir an, daß wir es mit einem Aufschutt zu tun haben, dessen spezifisches Gewicht $\gamma = 1,8$ sei; es sei ferner die Neigung der natürlichen Böschung $\varphi = 35^\circ$, der gesamte Druck auf die Seitenwand ist dann

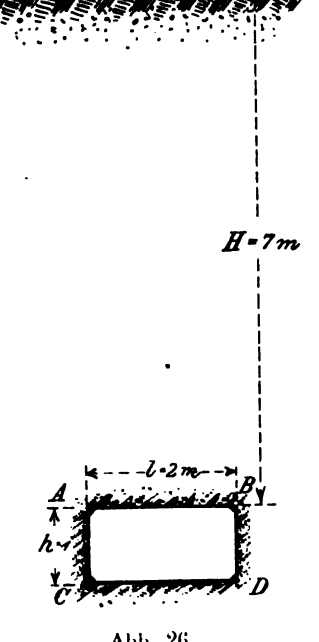


Abb. 26.

$$\frac{\gamma}{2}\, h\,(h + 2\,H)\,\mathrm{tg}^2\,\frac{90 - \varphi}{2} =$$

$$900 \,.\, 1\,(1 + 14) \,.\, 0,27 = 3645 \text{ kg}$$

und auf 1 cm Höhe der Wand

$$q = 36,35 \text{ kg}.$$

Die Horizontalplatte ist belastet durch

$$\gamma\, l\, H = 1800 \,.\, 2 \,.\, 7 = 25200 \text{ kg}$$

und auf 1 cm der Länge durch

$$p = 126 \text{ kg}.$$

Danach werden die Vertikalplatten gedrückt von einer Kraft

$$N_{AC} = 12\,600 \text{ kg}$$

und die Horizontalplatten durch

$$N_{AB} = 1822{,}5 \text{ kg}.$$

Infolge des großen Uebergewichts der Kraft N_{AC} über die Kraft N_{AB} nehmen wir an, daß in den Vertikalplatten die Entstehung von Zugspannungen ausgeschlossen ist, und in den horizontalen Platten vernachlässigen wir bei der ersten Annäherung die Wirkung der Längskraft N_{AB}. Dann wird die Formel (38) für das Biegungsmoment in den Ecken

$$M_1 = -\frac{\frac{q h^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} \cdot \frac{p l^3}{12}}{h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l},$$

wo ε_c und ε_c' die Elastizitätskoeffizienten des gedrückten Betons in der Vertikal- bezw. Horizontalplatte: I ist das Trägheitsmoment des Schnittes der Vertikalplatte, bezogen auf die Achse durch den Schwerpunkt, und I_0 ist

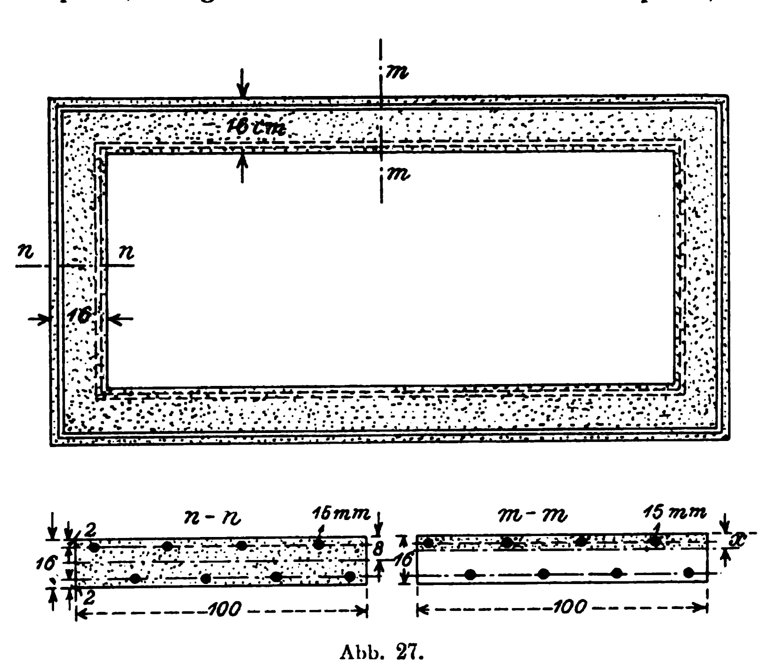


Abb. 27.

das Trägheitsmoment des Schnittes der Horizontalplatte, bezogen auf die neutrale Achse. Nehmen wir an, daß die Schnitte der Brücke wie in Abb. 27 eingerichtet sind, und wenden wir uns vor allen zum Schnitt $n\,n$ der Vertikalplatte.

Bei einem zweckmäßigen Bau der Brücke müssen die Vertikal- und Horizontalplatten alle denselben Sicherheitsgrad besitzen, was mit den Bemerkungen in den früheren Zahlenbeispielen und der Annahme, daß in den Vertikalplatten keine Zugspannungen vorkommen, uns zur Festsetzung des Verhältnisses μ zwischen dem Elastizitätskoeffizienten des Eisens und Betons 15 für die Vertikalplatten und 11 für die Horizontalplatten zwingt, weswegen

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c'} = \frac{11}{15}.$$

Wegen der Symmetrie der Armierung haben wir

$$I = \frac{100 \cdot 16^3}{12} + 15 \cdot 14{,}14 \cdot 6^2 = 41\,768 \text{ cm}^4.$$

Wir schreiten zur Berechnung I_0 für den Schnitt $m\,m$ und stützen uns auf die Bemerkungen bei den früheren Zahlenbeispielen, und zwar, daß die Zugarbeit des Betons berücksichtigt werden muß, indem $\nu = 0{,}55$ genommen wird. Nennen wir die Entfernung der neutralen Achse von der oberen Kante des Schnittes x; dann ist das statische Moment des Schnittes in bezug auf dieselbe Kante

$$\frac{100\,x^2}{2} + \frac{0{,}55 \cdot 100\,(16^2 - x^2)}{2} + 11 \cdot 7{,}07 \cdot 16 =$$
$$= 50\,x^2 + 27{,}5\,(256 - x^2) + 1244{,}32 = 22{,}5\,x^2 + 8284{,}32;$$

der ganze Schnitt ist

$$100\,x + 0{,}55 \cdot 100\,(16 - x) + 11 \cdot 14{,}14 = 45\,x + 1035{,}54.$$

Zur Bestimmung von x hat man dann die Gleichung

$$\frac{22{,}5\,x^2 + 8284{,}32}{45\,x + 1035{,}54} = x$$

und daraus

$$22{,}5\,x^2 + 1035{,}54\,x - 8284{,}32 = 0$$
$$x^2 + 46\,x - 368{,}2 = 0$$
$$x = -23 + 30 = 7 \text{ cm}$$

und

$$I_0 = 100 \cdot 7\left(\frac{7^2}{12} + 3{,}5^2\right) + 0{,}55 \cdot 100 \cdot 9\left(\frac{9^2}{12} + 4{,}5^2\right) +$$
$$+ 11 \cdot 7{,}07\,(5^2 + 7^2) = 11\,433 + 13\,365 + 5755 = 30\,553 \text{ cm}^4.$$

Daher

$$\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} = \frac{11 \cdot 41\,768}{15 \cdot 30\,553} = 1$$

und dadurch das Biegungsmoment in den Ecken

$$M_1 = -\frac{\frac{q\,h^3}{12} + \frac{p\,l^3}{12}}{h + l} = -\frac{36{,}45 \cdot 100^3 + 126 \cdot 200^3}{12\,(100 + 200)} = -290\,125 \text{ kgcm}$$

und das Biegungsmoment in der Mitte der Horizontalplatte

$$M_l = \frac{126 \cdot 200^2}{8} - 290\,125 = 339\,875 \text{ kgcm.}$$

Wir kennen jetzt die Zahlenwerte des größten positiven und negativen Momentes und müssen prüfen, ob diese Größen in der ersten Annäherung sehr verschieden sind von den genaueren Werten aus der Formel (38):

$$M_1 = -\frac{\frac{qh^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{pl^3}{12} + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'} \cdot \frac{qhly_0'}{2}}{h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0'}\, l}.$$

In dieser Formel hat man y_0', eine Größe, welche abhängig ist von der Entfernung y_0 der neutralen Achse des Schnittes von seinem Schwerpunkte. Aus der Formel (11) und Abb. 4 ist

$$y_0 = \frac{MS - NT'}{M\Omega - NS}$$

für den Schnitt, auf welchen das Biegungsmoment M und die Längskraft N wirken; da y_0' nach dem Ausdruck der Formel (38) für die ganze Länge des Balkens konstant sein muß, wird auch y_0 konstant sein, wodurch M

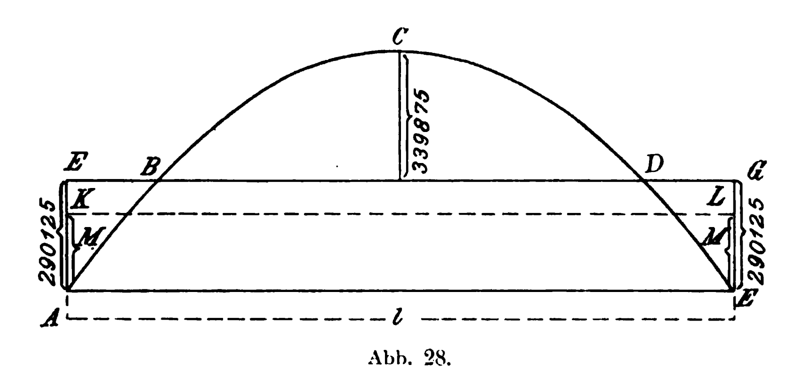


Abb. 28.

für die ganze Offnung der Platte notwendigerweise auf eine konstante gebracht werden muß, und zwar einen Mittelwert zwischen dem höchsten und kleinsten Moment in dieser Öffnung. Bekanntlich hat die Momentenfläche für die Horizontalplatte der Rohrbrücke die Gestalt der Abb 28, wobei

$$BD = l \sqrt{\frac{339\,875}{630\,000}} = 0{,}7345\, l.$$

Daher ist der absolute Wert der Momentenfläche

$$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}7345\, l \cdot 339\,875 + 290\,125\, l - \frac{2}{3} \cdot 630\,000\, l = 202\,863\, l.$$

Wir müssen zur Bestimmung von y_0 ein konstantes M haben und ersetzen daher diese Ebene durch ein Rechteck, dessen eine Seite l ist und die andere 202 863, wir wählen also für unsere Ziele

$$M = 202\,863 \text{ kgcm}.$$

Indem wir die Zeichnung des Schnittes $m\,m$ (Abb. 27 u. 29) auf die Zeichnung 4 übertragen und für μ und ν die bekannten Größen $\mu = 11$ und $\nu = 0{,}55$ annehmen, erhalten wir leicht

$$\Omega = 1395{,}54 + 45\,y_0$$
$$S = 1440 - 22{,}5\,y_0^2$$
$$I' = 29\,253 + 15\,y_0^3,$$

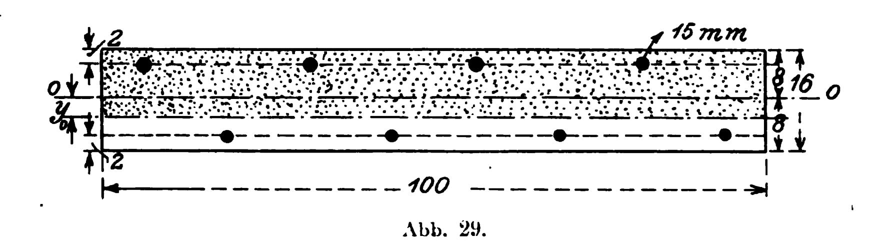


Abb. 29.

wobei S und I' genommen werden in bezug auf die Achse OO durch den Schwerpunkt. Da $N = N_{AB} = 1822{,}5$ kg, so erhalten wir zur Bestimmung von y_0 folgende Gleichung dritten Grades:

$$y_0 = \frac{202\,863\,(1440 - 22{,}5\,y_0^2) - 1822{,}5\,(29\,253 + 15\,y_0^3)}{202\,863\,(1395{,}54 + 45\,y_0) - 1822{,}5\,(1440 - 22{,}5\,y_0^2)};$$

$$15\,769{,}6\,y_0 + 5008\,y_0^2 - 1440\,y_0 + 22{,}5\,y_0^3 - 160\,272 + 2504{,}25\,y_0^2 +$$
$$+ 29\,253 + 15\,y_0^3 = 0;$$

$$37{,}5\,y_0^3 + 7512{,}75\,y_0^2 + 14\,329{,}6\,y_0 - 131\,019 = 0,$$
$$y_0^3 + 200{,}34\,y_0^2 + 382{,}12\,y_0 - 3493{,}84 = 0.$$

Diese löst man in bekannter Weise auf und findet nacheinander

$$y_0 = 3{,}3,$$
$$\Omega = 1544$$
$$S = 1195$$
$$I' = 29\,792.$$

Wir wissen nun, daß

$$y_0' = \frac{S}{\Omega} = \frac{1195}{1544} = 0{,}77$$

$$I_0' = I' - \frac{S^2}{\Omega} = 29\,792 - \frac{1195^2}{1544} = 28\,867.$$

Jetzt sind wir imstande, den genaueren Wert von M_1 aus der genaueren Formel (38) zu bestimmen:

$$M_1 = -\frac{\frac{36,45 \,.\, 100^3}{12} + \frac{11}{15} \,.\, \frac{41\,768}{28\,867} \,.\, \frac{126 \,.\, 200^3}{12} + \frac{11}{15} \,.\, \frac{41\,768}{28\,867} \,.\, \frac{36,45 \,.\, 100 \,.\, 200 \,.\, 0,77}{2}}{100 + \frac{11}{15} \,.\, \frac{41\,768}{28\,867} \,.\, 200},$$

und nach Ausführung:

$$M_1 = -\,307\,075 \text{ kgcm.}$$

Auf Grund des letzten Biegungsmomentes könnte man jetzt wieder mit einer dritten Annäherung alle einschlägigen Größen berechnen und daraus wieder einen neuen Wert für M_1 bestimmen, der aber so wenig von dem zuletzt bestimmten sich unterscheiden wird, daß jener Wert für die weiteren Berechnungen als wirkliche Größe des negativen Biegungsmomentes in den Ecken unserer Brücke angenommen werden kann. Das Biegungsmoment in der Mitte der Horizontalplatte ist dann

$$M_l = +\,322\,925 \text{ kgcm,}$$

und das Biegungsmoment in der Mitte der Vertikalplatte wird negativ gleich

$$M_h = -\,307\,075 + \frac{36,45 \,.\, 100^2}{8} = -\,261\,512 \text{ kgcm.}$$

Wir müssen uns nun überzeugen, ob unsere Fundamentalannahme, daß in den Vertikalplatten keine Zugspannungen eintreten, sich auch bewahrheiten wird. Dann müßte nämlich

$$\frac{N_{AC}}{\Omega'} > \frac{M_1 \,.\, 8}{I}$$

stattfinden, wo Ω' der Ganzschnitt der Vertikalplatte ist und 8 die Entfernung der äußeren Betonschicht von der Achse durch den Mittelpunkt ist.

$$\Omega' = 1600 + 15 \,.\, 14,14 = 1812 \text{ cm}^2.$$

Also

$$\frac{N_{AC}}{\Omega'} = \frac{12\,600}{1812} = 6,96$$

und

$$\frac{8\,M_1}{I} = \frac{8 \,.\, 307\,075}{41\,768} = 58,82.$$

Wenn wir statt M_1 den kleinsten absoluten Wert des Biegungsmomentes in der Vertikalplatte, also M_h nehmen, so wird auch dann die obige Ungleichheit nicht stattfinden; es trifft also unsere Fundamentalannahme gar nicht zu. Im § 13 habe ich allgemein einen solchen Fall aufgelöst und in diesem Beispiele die Rohrbrücke so gewählt, daß trotz aller begünstigenden Umstände (hier also beträchtlicher Tiefe der Brückenlage und Uebergewicht

der einen Längskraft über die andere) dennoch keine Entstehung in irgend einer Platte der Druckspannungen allein ohne Zugspannungen erwartet werden kann. Immer wird der Einfluß des Biegungsmomentes viel größer sein als der Einfluß der drückenden Längskräfte; ganz frei vom Zug würden also sehr kleine Teile der Platten in der Nähe der Wendeschnitte sein, in denen die Biegungsmomente nur kleinere absolute Werte haben. Alle obigen Bemerkungen legen die Notwendigkeit einer anderen Auflösung der Aufgabe klar, und zwar in folgender Weise: Die Biegungsmomente in den Ecken bestimmen wir nach den Formeln

$$M_1 = -\frac{q h^3 + \frac{\varepsilon_c I_0}{\varepsilon_c' I_0'} p l^3}{12\left(h + \frac{\varepsilon_c I_0}{\varepsilon_c' I_0'} l\right)},$$

wo I_0 und I_0' die Trägheitsmomente der Schnitte der Vertikal- und Horizontalplatte in bezug auf die neutrale Achse sind. Da beide Platten in bezug auf die Spannungen jetzt gleichen Bedingungen unterworfen sein werden, so wollen wir bei Bestimmung von I_0 und I_0' dem Verhältnis μ zwischen den Elastizitätskoeffizienten des Eisens und Betons gleiche Werte für beide Platten geben, und zwar $= 11$, da wir die Trägheitsmomente für die ganze Länge der Platten konstant annehmen. Dann nimmt die letzte Formel folgende Gestalt an:

$$M_1 = -\frac{q h^3 + \frac{I_0}{I_0'} p l^3}{12\left(h + \frac{I_0}{I_0'} l\right)}.$$

Vergessen wir nicht, daß I_0 und I_0' bestimmt werden müssen bei Berücksichtigung der Arbeit des Betons auf Zug mit dem Verhältnis $\nu = 0{,}55$. Die Vergleichung des letzten Momentes mit Berücksichtigung des Falles einer zusammengesetzten Biegung ist der kleinen Differenzen wegen entbehrlich. Man muß nur das zuletzt gefundene Moment um etwa 20 vH. größer nehmen, wodurch eine gewisse nicht zentrale Wirkung der Längskräfte berücksichtigt wird. Es ist klar, daß bei Bestimmung der Spannungen in den gefährlichen Schnitten schon die zusammengesetzte Biegung mit in Betracht gezogen werden muß, die Arbeit des Betons auf Zug dagegen nicht; für μ nimmt man den Wert 15.

§ 19. *Balkenbrücke.* Betrachten wir auf Grund der Leitsätze des § 14 eine Balkenbrücke mit der Öffnung $l = 10$ m und der Höhe $h = 6$ m. Diese Brücke sei gleichmäßig belastet mit 1000 kg/m² an Vertikalkräften (eigenes Gewicht, Pflaster oder Aufschutt und bewegliche Belastung). Die Höhe h_0 des Erdaufschuttes, welcher die Wirkung der Belastung über der Höhe h ersetzen kann, sei 0,5 m. Von der ganzen Brücke, die einige

parallele Hauptträger besitzen kann, betrachten wir nun einen Träger mit seinen Säulen und einem Schnitt in der Mitte des Gliedes etwa von der Form in Abb. 30. Bezeichnen wir das konstante Trägheitsmoment I_0 für

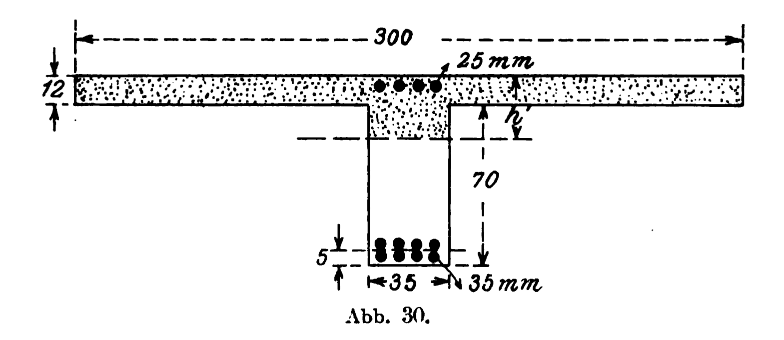


Abb. 30.

den Teil unter der Einwirkung der positiven Momente und nehmen wir in diesem ganzen Teile aus Gründen, die schon im § 16 erörtert worden sind, $\mu = 11$ und $\nu = 0{,}55$; wir finden dann gleich

$$h' = 24{,}9 \text{ cm}$$
$$I_0 = 4\,602\,525 \text{ cm}^4.$$

Nehmen wir an, daß die Teile des Trägers, die der Einwirkung negativer Momente unterliegen, dasselbe Trägheitsmoment besitzen, was ein konstantes $I_0 = 4\,602\,525 \text{ cm}^4$ für den ganzen Träger ergibt. Es habe die Säule, die diesem Träger entspricht, einen Schnitt wie in Abb. 31 (ohne Beachtung der Dünnwände) zur Verbindung der Säule mit den anderen. Aus im vorigen erwähnten Gründen muß man hier $\mu = 15$ setzen, dann hat man

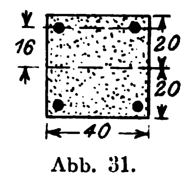


Abb. 31.

$$\Omega = 1894 \text{ cm}^2$$
$$I = 288\,712 \text{ cm}^4,$$

und für die Formeln des § 14:

$$\frac{Ih}{\Omega} = \frac{288\,712 \,.\, 600}{1894} = 91\,461 \text{ cm}^3,$$

$$\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} = \frac{11 \,.\, 288\,712}{15 \,.\, 4\,602\,525} = 0{,}046\,;$$

gleichzeitig finden wir aus Gleichungen (46):

$$w = 500 \text{ cm}$$

$$z_0 = \frac{(600)^2}{2 \,.\, 600 + 0{,}046 \,.\, 1000} = 289 \text{ cm},$$

und daraus

$$z = 600 - 289 = 311 \text{ cm}.$$

Nehmen wir auch an, daß 1) die Träger in einer Entfernung 4 m von Achse zur Achse verteilt sind:

$$b = 400 \text{ cm}$$
$$p = 50 \text{ kgcm},$$

2) sei der Grund vom spezifischen Gewicht 1,8 und natürlicher Neigung $\varphi = 35^\circ$, also

$$\gamma = 0{,}0018$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} = 0{,}27;$$

außerdem heißt es

$$e = \frac{600}{3} \cdot \frac{600 + 3 \cdot 50}{600 + 2 \cdot 50} = 214 \text{ cm}.$$

Jetzt finden wir aus den Gleichungen (60) folgende Werte für die statisch Unbestimmbaren:

$$Z = -18\,553\,000 \text{ kgcm}$$
$$B = 25\,000 \text{ kg}$$
$$H_b = -26\,610 \text{ kg}.$$

Versuchen wir jetzt zuerst die Biegungsmomente für die Stäbe unserer Brücke zu bestimmen; wir wenden uns zu diesem Zwecke an die Gleichungen (43). Auf Grund der Formel des § 14 hat man

$$(M_0)_{AC} = -\frac{b\gamma (z_0 - y)^2}{6} (z_0 - y + 3 h_0) \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} - \frac{p l^2}{2} -$$
$$- \frac{b\gamma h}{6} [h (2 h + 3 h_0) - 3 (z_0 - y) (h + 2 h_0)] \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2}$$

oder

$$(M_0)_{AC} = -\left\{ \frac{p l^2}{2} + \frac{b\gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} [(z_0 - y)^3 + 3 h_0 (z_0 - y)^2 - \right.$$
$$\left. - 3 h (h + 2 h_0) (z_0 - y) + h^2 (2 h + 3 h_0)] \right\}.$$

Die letzte Formel gibt für das Biegungsmoment im Schnitt A (Abb. 17) bei $y = -z$:

$$(M_0)_A = -\left\{ \frac{p l^2}{2} + \frac{b\gamma}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} [h^3 + 3 h^2 h_0 - \right.$$
$$\left. - 3 h^2 (h + 2 h_0) + h^2 (2 h + 3 h_0)] \right\}$$

oder

$$(M_0)_A = -\frac{p l^2}{2},$$

weil der Erddruck als auf beiden Seiten und entgegengesetzt gerichtet sich aufhebt, folglich in Zahlen

$$(M_0)_A = -\frac{50 \cdot (1000)^2}{2} = -25\,000\,000 \text{ kgcm.}$$

Allgemein wird in unserem statisch unbestimmbaren System der Stäbe

$$M_A = (M_0)_A - Z + B(l - w) + H_b z,$$

also in Zahlen

$$M_A = -25000000 + 18553000 + 12500000 - 8275710 = -2222710 \text{ kgcm.}$$

Das Biegungsmoment im Schnitt C bei $y = +z_0$ für das Hauptsystem der Stäbe

$$(M_0)_C = -\left\{\frac{pl^2}{2} + \frac{b\gamma h^2(2h + 3h_0)}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2}\right\}$$

oder in Zahlen

$$(M_0)_C = -40\,746\,400 \text{ kgcm.}$$

Für das statisch unbestimmbare System der Stäbe

$$M_C = (M_0)_C - Z + B(l - w) - H_b z_0$$

oder in Zahlen

$$M_C = -40746400 + 18553000 + 12500000 + 7690290 = -2003120 \text{ kgcm.}$$

Wenden wir uns nun an das Biegungsmoment im Balken CD; aus den Formeln (43) heißt es

$$M_{CD} = (M_0)_{CD} - Z - Bx - H_b z_0.$$

Das Moment $(M_0)_{CD}$ für das Hauptsystem der Stäbe ist als Funktion von x

$$(M_0)_{CD} = -\left\{\frac{p\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{2} + \frac{b\gamma h^2(2h + 3h_0)}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2}\right\} =$$

$$= -\left\{25\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + 15\,746\,400\right\} \text{ kgcm,}$$

daraus findet man für das Moment M_{CD}

$$M_{CD} = -25\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - 15\,746\,400 + 18\,553\,000 - 25\,000\,x +$$

$$+ 7\,690\,290 = -25\left[\frac{l^2}{4} - lx + x^2 + 1000\,x\right] + 10\,496\,890.$$

Da nun $l = 1000$ cm ist, so finden wir

$$M_{CD} = -25\,(250\,000 + x^2) + 10\,496\,890 = 4\,246\,890 - 25\,x^2 \text{ kgcm.}$$

Also ist das größte positive Moment im Balken CD bei $x = 0$ gleich 4 246 890 kgcm, der Wendeschnitt ist bei

$$x = \frac{\sqrt{4\,246\,890}}{5} = 412 \text{ cm},$$

also 88 cm von der Stütze entfernt. Die Säule BD ist wegen der Symmetrie im ganzen System denselben Einwirkungen unterworfen wie die Säule AC. Wir halten somit die Momentenfläche für die Stäbe des statisch unbestimmbaren Systems wie in Abb. 32; darin ist

$$EA = BE' = M_A = -2\,222\,710 \text{ kgcm}$$
$$FC = DF' = M_C = -2\,003\,110 \quad „$$
$$CG = DG' = -2\,003\,110 \quad „$$
$$IH = +4\,246\,890 \quad „$$

Die Kurve CHD ist eine Parabel, welche die Momentenfläche für den Balken CD begrenzt, auf den die gleichmäßige Belastung einwirkt für den Fall, daß dieser Balken frei auf den Stützen ruht und nicht in den Enden C und D steif mit den Säulen verbunden ist. Aehnlich ist die Krumme CKA von der einen Seite die Begrenzung der Ebene $CKAL$ der Biegungsmomente für die Säule CA unter der Einwirkung des Erddruckes für den Fall, daß dieser Balken in den Endpunkten frei gestützt ist. Das größte Biegungsmoment, ausgedrückt durch die Ordinate KL, würde dann entstehen im Schnitt

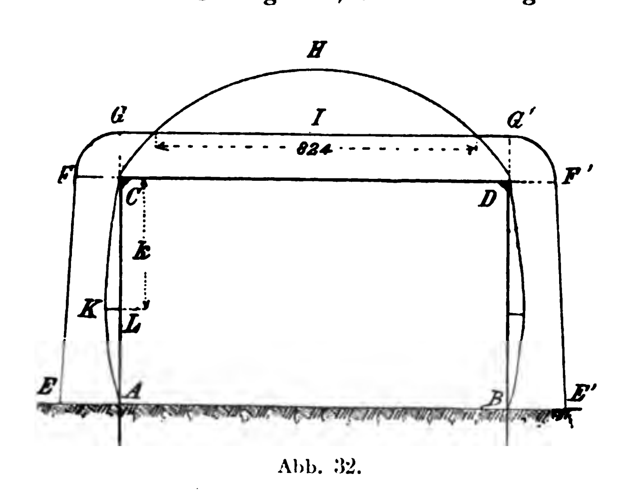


Abb. 32.

$$k = \sqrt{\frac{h^2}{3} + h_0\,(h + h_0)} - h_0 = 341 \text{ cm},$$

und wäre gleich

$$KL = + \frac{bk\gamma}{600} \operatorname{tg}^2 \frac{90 - \varphi}{2} \left[h\,(h + 3\,h_0) - k\,(k + 3\,h_0)\right] = +31\,224 \text{ kgcm}.$$

Wir können nun folgende Bemerkungen machen: 1) Das positive Biegungsmoment im Mittelschnitte des Hauptbalkens ist bei uns $+\frac{pl^2}{11{,}8}$; da wir bei den Vorrechnungen keine Längskraft für den Hauptbalken berücksichtigen, wird der allgemein angenommene Wert $+\frac{pl^2}{10}$ in einer ein-

gliedrigen Brücke unseres Typus als vollständig entsprechend anzusehen sein. 2) Das negative Biegungsmoment in den Stützschnitten des Hauptbalkens ist bei uns $-\frac{pl^2}{25}$; bisher wurde bei Eisenbetonbauten dieses Moment angenommen auf Grund von Mutmaßungen aus praktisch erhaltenen Resultaten. Hier sehen wir nun, daß mit Rücksicht auf die Längskraft im Hauptbalken bei den Vorrechnungen der Wert des größten negativen Momentes in den Stützen des Hauptbalkens numerisch halb so groß ist als das positive in der Mitte und $= -\frac{pl^2}{20}$. 3) Besondere Beachtung erfordern die beträchtlichen Biegungsmomente in den Säulen; bis jetzt wurden diese Momente einfach vernachlässigt, und jetzt sieht man deren Wirkung an vielen Brücken dieses Typus, bei denen auf den Seitenwänden außerhalb der äußeren Säulen von oben sich Risse gebildet haben, die jetzt die Seitenwände von den Säulen trennen. Den Wert des größten Biegungsmomentes in den Säulen kann man annähernd absolut ebenso groß nehmen wie das negative auf den Stützen beim Hauptbalken, also $\frac{pl^2}{20}$. 4) Man begnüge sich nie mit den Vorrechnungen, überzeuge sich vielmehr durch Bestimmung auf Grund jener Vorrechnungen der Dimensionen der Schnitte und der Armierung, und nach Berechnung der genauen Werte, daß diese die zulässigen Grenzen nicht überschreiten.

§ 20. *Eisenbetonbrücke von drei gleichen Oeffnungen.* Nehmen wir an, daß alle drei Glieder aus gleichen Balken bestehen und auf ebensolchen

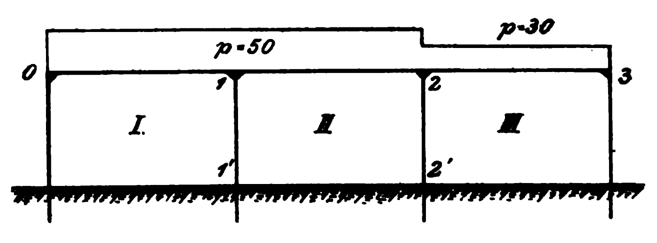


Abb. 33.

Säulen ruhen wie die eingliedrige Brücke des vorigen Paragraphen. Demnach erhalten einige Ausdrücke der Gleichungen (62) folgende Werte:

$$z_0 = 289 \text{ cm}$$
$$z = 311 \text{ „}$$
$$w = 500 \text{ „}$$
$$\frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} = 0{,}046$$
$$\frac{Ih}{\Omega} = 91\,461 \text{ cm}^3$$

$$2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l = 1246 \text{ cm}$$

$$\frac{l^2}{12}\left(6h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} l\right) + \frac{2Ih}{\Omega} = 304\,016\,255 \text{ cm}^3$$

$$\frac{2}{3}(z_0^3 + z^3) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0^2 l = 39\,987\,166 \text{ cm}^3.$$

Die Glieder I und II seien überall gleichmäßig mit 50 kgcm, das Glied III mit 30 kgcm. Wir wenden nun Gleichungen (62) im Anschluß an § 15 auf das abgeteilte Glied I an und nennen M_{IIl} und A_{IIl} ein entsprechendes Biegungsmoment und Vertikalkraft, welche die Wirkung des übrigen Teiles der Brücke auf das Glied I ersetzen, und erhalten

$$\begin{aligned} Z_I &= -12\,346\,174 + 0{,}5185\, M_{IIl} \text{ kgcm} \\ B_I &= 25\,000 + 0{,}0003008\, A_{IIl} + 0{,}0009868\, M_{IIl} \text{ kg} \\ H_{bI} &= 1359 - 0{,}0001674\, M_{IIl} \text{ kg}, \end{aligned}$$

wo die einschlägigen Größen die aus §§ 14 und 15 bekannten Bedeutungen für das Glied I haben. Aehnlich nennen wir M_{Ip}, M_{IIIl} und A_{Ip}, A_{IIIl} die entsprechenden Momente und Kräfte, welche die Einwirkung der Glieder I und III auf das abgeteilte Glied II ersetzen, und erhalten aus (62)

$$\begin{aligned} Z_{II} &= -12\,346\,174 - 0{,}5185\, M_{IIIl} + 0{,}4815\, M_{Ip} \text{ kgcm} \\ B_{II} &= 25\,000 + 0{,}0003008\,(A_{Ip} + A_{IIIl}) - 0{,}0009868\,(M_{Ip} - M_{IIIl}) \text{ kg} \\ H_{bII} &= 1359 - 0{,}0001674\, M_{IIIl} - 0{,}0001651\, M_{Ip} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Genau ebenso haben wir beim abgeteilten Gliede III

$$\begin{aligned} Z_{III} &= -7\,407\,090 + 0{,}4815\, M_{IIp} \text{ kgcm} \\ B_{III} &= 15\,000 + 0{,}0003008\, A_{IIp} - 0{,}0009868\, M_{IIp} \text{ kg} \\ H_{bIII} &= 815 - 0{,}0001651\, M_{IIp} \text{ kg}, \end{aligned}$$

wo M_{IIp} und A_{IIp} entsprechend Moment und Kraft für die Wirkung der übrigen Teile auf Glied III darstellen. Aus den Werten Z, B und H_b können wir in jedem Gliede die Biegungsmomente in den Hauptträgern bei den Knoten 0, 1, 2, 3 ebenso in den Schnitten der Befestigung der Säulen die Biegungsmomente wie auch die Längskräfte in den Mittelsäulen auf Grund der Gleichungen (61) bestimmen. Demnach, das Glied I betrachtend, erhalten wir

$$\begin{aligned} M_1^I &= -0{,}9265\, M_{IIl} - 0{,}1504\, A_{IIl} - 546\,577 \\ M_{1'}^I &= -0{,}0270\, M_{IIl} - 0{,}1504\, A_{IIl} + 268\,823, \end{aligned}$$

wo M_1^I sich auf den Knoten 1 des Gliedes I bezieht und $M_{1'}^I$ auf den Endpunkt 1'. Für das Glied II haben wir

$$\begin{aligned} M_1^{II} &= -0{,}9272\, M_{Ip} + 0{,}0603\, M_{IIIl} + 0{,}1504\,(A_{Ip} + A_{IIIl}) - 546\,577 \\ M_2^{II} &= +0{,}0196\, M_{Ip} - 0{,}9265\, M_{IIIl} - 0{,}1504\,(A_{Ip} + A_{IIIl}) - 546\,577 \\ M_{1'}^{II} &= -0{,}0262\, M_{Ip} - 0{,}0402\, M_{IIIl} + 0{,}1504\,(A_{Ip} + A_{IIIl}) + 268\,823 \\ M_{2'}^{II} &= -0{,}0394\, M_{Ip} - 0{,}0270\, M_{IIIl} - 0{,}1504\,(A_{Ip} + A_{IIIl}) + 268\,823\,; \end{aligned}$$

für das Glied *III*

$$M_2^{\mathrm{III}} = -0{,}9272\,M_{\mathrm{II}p} + 0{,}1504\,A_{\mathrm{II}p} - 328\,445$$
$$M_{2'}^{\mathrm{III}} = -0{,}0262\,M_{\mathrm{II}p} + 0{,}1504\,A_{\mathrm{II}p} + 160\,555.$$

Es ist klar, daß

$$M_1^{\mathrm{I}} = M_{\mathrm{I}p}$$
$$M_1^{\mathrm{II}} = M_{\mathrm{II}l}$$
$$M_2^{\mathrm{II}} = M_{\mathrm{II}p}$$
$$M_2^{\mathrm{III}} = M_{\mathrm{III}l}$$
$$M_{1'}^{\mathrm{I}} = M_{1'}^{\mathrm{II}}$$
$$M_{2'}^{\mathrm{II}} = M_{2'}^{\mathrm{III}}$$

und

$$B_{\mathrm{I}} = 50\,000 + A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{III}l} - B_{\mathrm{II}}$$
$$B_{\mathrm{II}} = 30\,000 + A_{\mathrm{II}p} - B_{\mathrm{III}},$$

daher hat man zur Bestimmung der acht Kräfte und Momente 8 Gleichungen I. Grades:

$$M_{\mathrm{I}p} + 0{,}9265\,M_{\mathrm{II}l} + 0{,}1504\,A_{\mathrm{II}l} + 546\,577 = 0$$
$$M_{\mathrm{II}l} + 0{,}9272\,M_{\mathrm{I}p} - 0{,}0603\,M_{\mathrm{III}l} - 0{,}1504\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{III}l}) + 546\,577 = 0$$
$$M_{\mathrm{II}p} - 0{,}0196\,M_{\mathrm{I}p} + 0{,}9265\,M_{\mathrm{III}l} + 0{,}1504\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{III}l}) + 546\,577 = 0$$
$$M_{\mathrm{III}l} + 0{,}9272\,M_{\mathrm{II}p} - 0{,}1504\,A_{\mathrm{II}p} + 328\,445 = 0$$
$$0{,}0270\,M_{\mathrm{II}l} - 0{,}0262\,M_{\mathrm{I}p} - 0{,}0402\,M_{\mathrm{III}l} + 0{,}1504\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{II}l} + A_{\mathrm{III}l}) = 0$$
$$0{,}0270\,M_{\mathrm{III}l} + 0{,}0394\,M_{\mathrm{I}p} - 0{,}0262\,M_{\mathrm{II}p} + 0{,}1504\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{II}l} + A_{\mathrm{III}l}) - 108\,268 = 0$$
$$0{,}0009868\,(M_{\mathrm{I}p} - M_{\mathrm{II}l} - M_{\mathrm{III}l}) - 0{,}0003008\,A_{\mathrm{II}l} + 0{,}9996992\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{III}l}) = 0$$
$$0{,}0009868\,(M_{\mathrm{I}p} + M_{\mathrm{II}p} - M_{\mathrm{III}l}) - 0{,}0003008\,(A_{\mathrm{I}p} + A_{\mathrm{III}l}) + 0{,}9996992\,A_{\mathrm{II}p} - 10\,000 = 0.$$

Die Auflösung obiger Gleichungen gibt die Möglichkeit der Bestimmung aller Größen, die für die Untersuchung der Festigkeit unseres Systems in den wirklichen Bedingungen seiner Arbeit von Bedeutung sind.

Abschnitt VI.

Bestimmung der Verschiebungen der Punkte in geraden Eisenbetonstäben.

§ 21. Zur Bestimmung einer Verschiebung δ_m des Angriffspunktes einer Kraft P_m fanden wir in § 7 den Ausdruck (24):

$$\delta_m = \int \frac{r_c \bar{r}_c}{\varepsilon_c}\,dV_c + \int \frac{r_t \bar{r}_t}{\varepsilon_t}\,dV_t + \int \frac{\varrho \bar{\varrho}}{E}\,dv +$$
$$+ \alpha t\,[\int \bar{r}_c\,dV_c + \int \bar{r}_t\,dV_t + \int \bar{\varrho}\,dv] - L.$$

Wenn im Stabe kein Zug vorhanden ist, so hat man aus den Formeln (5) und den Ergebnissen des § 8 die obige Gleichung so darzustellen:

$$\delta_m = \int \frac{N\bar{N}}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{M\bar{M}}{\varepsilon_c I} dx + \alpha t \int \bar{N} dx - \bar{L}.$$

Ist der Stab einer gewöhnlichen Biegung unter der Einwirkung von Kräften senkrecht zur neutralen Achse allein unterworfen, so ist

$$\delta_m = \int \frac{M\bar{M}}{\varepsilon_c I} dx - L;$$

bei zusammengesetzter Biegung

$$\delta_m = \int \frac{M\bar{M}}{\varepsilon_c I_0'} dx - \int \frac{N\bar{M}y_0}{\varepsilon_c I_0'} dx - \int \frac{M\bar{N}y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx + \int \frac{N\bar{N}y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx +$$
$$+ \alpha t \int \bar{N} dx - L.$$

Will man die Verschiebungen δ eines beliebigen Punktes in der Ebene der Kräfte in beliebiger Richtung untersuchen, so legen wir in diesem Punkt eine Kraft 1 an, die wir ebenso richten, denken uns alle äußeren Kräfte und event. statisch unbestimmbare Größen entfernt und bestimmen unter diesen Bedingungen die Längskräfte $\bar{N}$, die Biegungsmomente $\bar{M}$ und die Stützwirkungen $\bar{K}$, mit deren Hilfe die obigen Formeln angewandt werden.

§ 22. Bestimmen wir die Biegung eines Horizontalbalkens, welcher ganz auf Stützen befestigt und der Wirkung einer gleichmäßig auf der ganzen Länge l des Balkens verteilten Belastung p für die Einheit der Länge unterworfen ist (Abb. 6). Nehmen wir an, daß der gegebene Balken in fünf Teile (Abb. 7) zerlegt werden kann, für welche die Trägheitsmomente einzeln konstant angenommen werden können, nach § 11. Wir haben hier mit gewöhnlicher Biegung zu tun, und es ist $\bar{L} = 0$, wir haben also allgemein:

$$\delta = \int \frac{M\bar{M}}{\varepsilon_c I} dx.$$

Das Biegungsmoment M in einer Entfernung x von der linken Stütze (Abb. 6) ist

$$M = \frac{px(l-x)}{2} + M_1,$$

wo M_1 das Moment der Befestigung des Balkens auf den Stützen ist. Zur Bestimmung von $\bar{M}$ denken wir uns die Belastung p weggenommen und in der Mitte des Balkens eine Vertikalkraft 1 eingesetzt; wir ersetzen dann auch den Balken durch einen statisch ausdrückbaren Stab, indem wir die Befestigung an den Stützen wegnehmen. Dann ist für die linke Hälfte des Balkens

$$\bar{M} = \frac{x}{2},$$

für die rechte

$$M = \frac{l-x}{2};$$

also

$$\delta = \int \frac{px^2(l-x) + 2M_1x}{4\varepsilon_c I}\,dx + \int \frac{px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)}{4\varepsilon_c I}\,dx,$$

wo das erste Integral für das linke, das zweite für die rechte Seite des Balkens gilt. Nehmen wir die ruckweise, unstetige Veränderung des Trägheitsmomentes wie in Abb. 7 an, so haben wir

$$\delta = \int_0^m \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{I}}}\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx + \int_m^{m+n} \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{II}}}\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx +$$

$$+ \int_{m+n}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{III}}}\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l-m-n} \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{III}}}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx +$$

$$+ \int_{l-m-n}^{l-m} \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{II}}}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx + \int_{l-m}^{l} \frac{1}{4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{I}}}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $4\varepsilon_c I_0^{\mathrm{III}}$ mit der Annahme, daß ε_c überall konstant bleibt; wir erhalten

$$4\delta\varepsilon_c I_0^{\mathrm{III}} = i'\left\{\int_0^m\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx + \int_{l-m}^{l}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx\right\} +$$

$$+ i''\left\{\int_m^{m+n}\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx + \int_{l-m-n}^{l-m}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx\right\} +$$

$$+ \int_{m+n}^{\frac{l}{2}}\left[px^2(l-x) + 2M_1x\right]dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l-m-n}\left[px(l-x)^2 + 2M_1(l-x)\right]dx$$

bei der Bezeichnung

$$\frac{I_0^{\mathrm{III}}}{I_0^{\mathrm{I}}} = i' \quad \text{und} \quad \frac{I_0^{\mathrm{III}}}{I_0^{\mathrm{II}}} = i''.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$4\delta\varepsilon_c I_0^{\mathrm{III}} = i'm^2\left[\frac{pm}{6}(4l-3m) + 2M_1\right] +$$

$$+ i''n\left\{\frac{p}{6}\left[(3m^2 + 3mn + n^2)(4l-3m) - 3(m+n)^3\right] + 2M_1(2m+n)\right\} +$$

$$+ \frac{5pl^4}{96} + \frac{M_1l^2}{2} - 2(m+n)^2\left[\frac{pl(m+n)}{3} - \frac{p(m+n)^2}{4} + M_1\right]$$

zur Bestimmung von δ.

Bei $m = n$ hat man

$$4\,\delta\varepsilon_c I_0^{\rm III} = m^2 \left\{ i' \left[\frac{pm}{6} (4l - 3m) + 2M_1 \right] + i'' \left[\frac{pm}{6} (28l - 45m) + 6M_1 \right] - \right.$$

$$\left. - 8 \left[pm \left(\frac{2}{3} l - m \right) + M_1 \right] \right\} + \frac{5pl^4}{96} + \frac{M_1 l^2}{2}\,.$$

Wäre außerdem $i' = i''$, so ist:

$$4\,\delta\varepsilon_c I_0^{\rm III} = 8m^2 \left[pm \left(\frac{2}{3} l - m \right) + M_1 \right] (i' - 1) + \frac{5pl^4}{96} + \frac{M_1 l^2}{2}\,.$$

Könnte auch das Trägheitsmoment für die ganze Länge einem konstanten I gleichgesetzt werden, so hätte man

$$\delta = \frac{5pl^4 + 48 M_1 l^2}{384\,\varepsilon_c I}\,.$$

Wenn im letzten Falle der Balken ganz auf den Stützen befestigt ist, also

$$M_1 = -\frac{pl^2}{12}\,,$$

so erhalten wir die gutbekannte Formel

$$\delta = \frac{pl^4}{384\,\varepsilon_c I}\,.$$

Ist der Balken auf den Stützen frei in Ruhe, so muß man selbstverständlich

$$M_1 = 0$$

nehmen.

§ 23. Bestimmen wir die Biegung des Hauptträgers der Brücke des § 14 ohne Berücksichtigung des Erddruckes mit gleichmäßiger p auf die Längeneinheit.

Wir finden leicht aus den Gleichungen (60), daß die statisch unausdrückbaren Größen gleich werden:

$$Z = -\frac{pl^2}{6} \cdot \frac{3h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} \cdot l}{2h + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} \cdot l}$$

$$B = \frac{pl}{2}$$

$$H_b = \frac{pl^2}{6} \cdot \frac{3h\left(\frac{h}{2} - z_0\right) - \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0 l}{\frac{2}{3}(z_0^3 + z^3) + \frac{\varepsilon_c I}{\varepsilon_c' I_0} z_0^2 l}\,.$$

In den Säulen (Abb. 17) wirkt ein Biegungsmoment

$$M_s = -\frac{p\,l^2}{2} - Z + B\frac{l}{2} - H_b y$$

oder wegen des Wertes von B:

$$M_s = -\frac{p\,l^2}{4} - Z - H_b y;$$

im Hauptträger ist

$$M_d = -\frac{p}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - Z - \frac{p\,l\,x}{2} - H_b z_0$$

$$M_d = -\frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,x^2}{2} - Z - H_b z_0 .$$

Die Längskraft N in den Säulen ist

$$N = \frac{p\,l}{2};$$

für den Hauptträger beachten wir eine solche nicht: Wir entfernen jetzt die Belastung p vom Hauptträger des Hauptsystems der Stäbe, setzen in die Mitte dieses Trägers die Kraft Eins und berechnen die Biegungsmomente und die Längskräfte in den einzelnen Stäben. Es ist dann

$$M_s = -\frac{l}{2}$$

$$M_d = +x$$

$$N = 1;$$

folglich

$$\delta = \int_{-z}^{+z_0} \frac{p\,l}{2\varepsilon_c \Omega}\,dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{l}{2\varepsilon_c I}\left(\frac{p\,l^2}{4} + Z + H_b y\right) dy - \int_{-\frac{l}{2}}^{0} \frac{x}{\varepsilon_c' I_0}\left(\frac{p\,l^2}{8} + \frac{p\,x^2}{2} + Z + H_b z_0\right) dx$$

und

$$\delta = \frac{p\,l\,h}{2\varepsilon_c \Omega} + \frac{l\,h}{2\varepsilon_c I}\left[\frac{p\,l^2}{4} + Z + \frac{H_b}{2}(z_0 - z)\right] + \frac{l^2}{8\varepsilon_c' I_0}\left(\frac{3\,p\,l^2}{16} + Z + H_b z_0\right).$$

Kennt man die einschlägigen Größen, so ist δ leicht zu bestimmen. Der erste Ausdruck in der letzten Formel zeigt den Einfluß der Verkürzung der Säulen auf die Biegung des Hauptträgers, der zweite den Einfluß der Ablenkung dieser Säulen von der lotrechten Linie wegen der Belastung des Hauptbalkens, und erst der dritte Ausdruck nimmt auf den Balken selbst Bezug. Bemerken wir, daß bei $h = 0$ die Biegung des Hauptträgers der eines homogenen, vollständig horizontal befestigten Balkens mit einer gleichmäßigen Belastung gleich sein muß. Da

$$h = 0, \quad z_0 = 0, \quad Z = -\frac{p\,l^2}{6},$$

so ist

$$\delta = \frac{l^2}{8\,\varepsilon_c'\,I_0}\left(\frac{3\,p\,l^2}{16} - \frac{p\,l^2}{6}\right) = \frac{p\,l^4}{384\,\varepsilon_c'\,I_0},$$

wie zu erwarten war.

§ 24. Nehmen wir ein Hauptsystem von Stäben für unsere eingliedrige Brücke und legen wir die Koordinatenachsen wie in Abb. 17; wir wählen dann

$$Z = 1, \quad B = 1, \quad H_b = 1.$$

Bestimmen wir als Funktion der Abszisse ξ die Vertikalverschiebungen δ', δ'', δ''' einzelner Punkte des Hauptbalkens entsprechend der Wirkung

$$Z = 1, \quad B = 1, \quad H_b = 1.$$

Bei $Z = 1$ haben die Stäbe gar keine Längskräfte, und das Biegungsmoment ist überall konstant gleich — 1.

Legt man in den Punkt des Hauptträgers mit der Abszisse ξ eine Vertikalkraft 1, dann ist das Biegungsmoment in der linken Säule

$$M_s = -\left(\frac{l}{2} + \xi\right)$$

und im Hauptträger

$$M_d = -(\xi - x),$$

wo x die Abszisse des untersuchten Schnittes des Hauptträgers, links von der Kraft, ist. Daraus hat man

$$\delta' = \int_{-z}^{+z_0} \frac{\frac{l}{2} + \xi}{\varepsilon_c I}\,dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\xi} \frac{\xi - x}{\varepsilon_c' I_0}\,dx.$$

folglich

$$\delta' = \frac{h\,(l + 2\,\xi)}{2\,\varepsilon_c I} + \frac{l^2 + 4\,\xi\,(l + \xi)}{8\,\varepsilon_c'\,I_0}.$$

Bei $B = 1$ hat man in der linken Säule eine Längskraft — 1 und ein Biegungsmoment $+\frac{l}{2}$, und im Hauptträger ist dieses Moment — x.

Legen wir in den Punkt des Hauptträgers mit der Abszisse ξ eine Kraft 1 und beachten wir die Gleichheit der Momente M_s und M_d, auch das $N = 1$ in der linken Säule. Wir finden leicht:

$$\delta'' = -\int_{-z}^{+z_0} \frac{dy}{\varepsilon_c\,\Omega} - \int_{-z}^{+z_0} \frac{\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + \xi\right) dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\xi} \frac{x\,(\xi - x)}{\varepsilon_c'\,I_0}\,dx,$$

folglich

$$\delta'' = -\frac{h}{\varepsilon_c \Omega} - \frac{hl(l+2\xi)}{4\varepsilon_c I} - \frac{l^3+3l^2\xi-4\xi^3}{24\varepsilon_c' I_0}.$$

Bei $H_b = 1$ hat man keine Längskräfte in den Stäben, dafür ein Moment $-y$ in der linken Säule und $-z_0$ im Hauptträger. Da wir die Momente M_s und M_t kennen, so haben wir leicht

$$\delta''' = \int_{-z}^{+z_0} \frac{\left(\frac{l}{2}+\xi\right)y}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\xi} \frac{z_0(\xi - x)}{\varepsilon_c' I_0} dx;$$

folglich

$$\delta''' = \frac{(l+2\xi)(z_0^2 - z^2)}{4\varepsilon_c I} + \frac{(l+2\xi)^2 z_0}{8\varepsilon_c' I_0}.$$

Die Ausdrücke für δ', δ'', δ''' werden uns dienen zur Bestimmung der Linien des Einflusses der Lage der Kraft P für die statisch unausdrückbaren Größen Z, B, H_b.

Abschnitt VII.

Die Einflußlinien für die statisch unbestimmbaren Größen in den gebogenen Eisenbetonstäben.

§ 25. Betrachten wir ein Eisenbetonsystem, auf das nur eine Kraft P wirkt, und versuchen wir die statisch unbestimmbaren Größen X', X'' .... bei beliebiger Lage der Kraft zu bestimmen.

Beachten wir keine Temperaturänderungen und wenden wir uns an die Gleichungen (19), die folgende Gestalt annehmen:

$$L' = \int \frac{r_c' r_c}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t' r_t}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho}{E} dv$$

$$L'' = \int \frac{r_c'' r_c}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t'' r_t}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho}{E} dv$$

. . . .

unter der Bedingung, daß die Spannungen r_c, r_t, ϱ in den Formen der Gleichungen (17) dargestellt werden können. Bezeichnen wir in diesen Gleichungen die von den statisch Unbestimmbaren abhängigen Größen entsprechend durch $(r_c)_x$, $(r_t)_x$, $(\varrho)_x$, so daß die Gleichungen (17) die Gestalt

$$r_c = r_c^0 + (r_c)_x;$$
$$r_t = r_t^0 + (r_t)_x;$$
$$\varrho = \varrho^0 + \varrho_x$$

annehmen. Auf Grund der letzten Bedeutungen können wir schreiben

$$L' = \int \frac{r_c' r_c^0}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t' r_t^0}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho^0}{E} dr + \int \frac{r_c' r_{cx}}{\varepsilon_c} dV_c +$$
$$+ \int \frac{r_t' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho_x}{E} dr$$

$$L'' = \int \frac{r_c'' r_c^0}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t'' r_t^0}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho^0}{E} dr + \int \frac{r_c'' r_{cx}}{\varepsilon_c} dV_c +$$
$$+ \int \frac{r_t'' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho_x}{E} dr.$$

. . . .

Wenn dem Zustande $X' = 1$ die Projektion der Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft P auf diese δ' entspricht, dem Zustande aber $X'' = 1$ die Projektion δ'' usw., so können wir auf Grund der Gleichung für die Formänderungsarbeit

$$\int \frac{r_c' r_c^0}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t' r_t^0}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho^0}{E} dr = P\delta'$$

$$\int \frac{r_c'' r_c^0}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t'' r_t^0}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho^0}{E} dr = P\delta''$$

. . . .

setzen und daraus

$$L' = P\delta' + \int \frac{r_c' r_{cx}}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho' \varrho_x}{E} dr$$

$$L'' = P\delta'' + \int \frac{r_c'' r_{cx}}{\varepsilon_c} dV_c + \int \frac{r_t'' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV_t + \int \frac{\varrho'' \varrho_x}{E} dr$$

. . . .

Wollen wir diese Gleichungen weiter entwickeln, so müssen wir die Spannungen ausdrücken als Funktionen der Biegungsmomente und Längskräfte, welche aus den Gleichungen (26) zu bestimmen sind. In diesen Gleichungen bezeichnen wir die von den statisch Unbestimmbaren X entsprechend durch M_x und N_x, also nehmen wir

$$M = M_0 + M_x$$
$$N = N_0 + N_x.$$

Unterliegt der Stab gleichzeitiger Einwirkung der Längskräfte und Biegungsmomente ohne Zug, so hat man aus den Formeln (5):

$$r_{cx} = \frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_x}{I} y_b;$$

$$\varrho = \mu \left(\frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_x}{I} y_f \right).$$

Auf Grund der Integrationen des § 8 finden wir leicht

$$L' = P\delta' + \int \frac{N' N_x}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{M' M_x}{\varepsilon_c I} dx$$

$$L'' = P\delta'' + \int \frac{N'' N_x}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int \frac{M'' M_x}{\varepsilon_c I} dx$$

. . . . ,

wenn wir die Integrale

$$\int \frac{r_t' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV_t, \qquad \int \frac{r_t'' r_{tx}}{\varepsilon_t} dV \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

für die gezogenen Betonschichten vernachlässigen. Im Falle der gewöhnlichen Biegung haben wir leicht (siehe § 9)

$$L' = P\delta' + \int \frac{M' M_x}{\varepsilon_c I_0} dx$$

$$L'' = P\delta'' + \int \frac{M'' M_x}{\varepsilon_c I_0} dx$$

. . . .

Bei zusammengesetzter Biegung mit Berücksichtigung der Spannungen finden wir aus den Formeln (13) — siehe § 10 —

$$L' = P\delta' + \int \frac{M' M_x}{\varepsilon_c I_0'} dx - \int \frac{N' M_x y_0}{\varepsilon_c I_0'} dx -$$

$$- \int \frac{M' N_x y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx + \int \frac{N' N_x y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx$$

$$L'' = P\delta'' + \int \frac{M'' M_x}{\varepsilon_c I_0'} dx - \int \frac{N'' M_x y_0}{\varepsilon_c I_0'} dx -$$

$$- \int \frac{M'' N_x y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx + \int \frac{N'' N_x y_0 y_0'}{\varepsilon_c I_0'} dx$$

. . . .

Da in den letzten drei Gruppen der Gleichungen alle Integrale von der Lage der Kraft P unabhängig sind, so werden uns diese Gleichungen in jedem Spezialfalle erlauben, die Einflußlinien für die statisch Unbestimmbaren X', X'' . . . . bezeichnen zu können, sobald wir die Verschiebungen δ', δ'' usw. in ihrer Abhängigkeit von der Lage der Kraft P zu bestimmen imstande sein werden. Betrachten wir also einen gebogenen Stab, so können wir die gesuchten Einflußlinien finden, wenn wir nur für die einzelnen Zustände $X' = 1$, $X'' = 1$ . . . . bereits die Linien der Biegungen bestimmt haben werden.

§ 26. Für einen Eisenbetonbalken, der auf Stützen ganz befestigt ist und veränderliche Trägheitsmomente in seinen Schnitten hat (Abb. 7), wollen wir die Einflußlinien für die statisch unbestimmbaren Größen bestimmen;

es seien diese hier das Moment M_1 der Befestigung des Balkens auf der linken Stütze und dasselbe Moment M_2 für die rechte. Da wir es mit einer gewöhnlichen Biegung zu tun haben, so wenden wir das System zweier Gleichungen an:

$$L' = P\delta' + \int \frac{M' M_x}{\varepsilon_c I_0} dx$$

$$L'' = P\delta'' + \int \frac{M'' M_x}{\varepsilon_c I_0} dx$$

entsprechend der Anzähl unserer Größen M_1 und M_2. Es ist klar, daß

$$M_x = M' M_1 + M'' M_2;$$

also, angenommen, daß $L' = 0$, $L'' = 0$, so haben wir

$$P\delta' + \int \frac{M'^2 M_1 + M' M'' M_2}{\varepsilon_c I_0} dx = 0$$

$$P\delta'' + \int \frac{M' M'' M_1 + M''^2 M_2}{\varepsilon_c I_0} = 0$$

oder

$$P\delta' + M_1 \int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx + M_2 \int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx = 0$$

$$P\delta'' + M_1 \int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx + M_2 \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx = 0.$$

Aus jenen haben wir leicht

$$M_1 = P \frac{\delta'' \int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx - \delta' \int \frac{M''^2 dx}{\varepsilon_c I_0}}{\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx - \left(\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx \right)^2}$$

$$M_2 = P \frac{\delta' \int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx - \delta'' \int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx}{\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx - \left(\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx \right)^2}$$

und zur Bestimmung von M_1 und M_2 daraus müssen wir untersuchen, wie $M_1 = 1$ und $M_2 = 1$ einwirken auf das Hauptsystem, also einen auf zwei Stützen freiliegenden Balken.

Bei $M_1 = 1$ haben wir natürlich $M' = \frac{l-x}{l}$, und bei $M_2 = 1$ hat man $M'' = \frac{x}{l}$; daher nehmen die Integrale für M_1 und X die gleiche Gestalt

$$\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx = \int \frac{(l-x)^2}{l^2 \varepsilon_c I_0} dx;$$

$$\int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx = \int \frac{x^2}{l^2 \varepsilon_c I_0} dx;$$

$$\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx = \int \frac{(l-x)x}{l^2 \varepsilon_c I_0} dx$$

an. Wegen der Veränderlichkeit der Trägheitsmomente der Schnitte — siehe § 11 — finden wir leicht

$$\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx = \frac{1}{l^2 \varepsilon_c I_0^{III}} \left[2i' \int_0^m (l-x)^2 dx + 2i'' \int_m^{m+n} (l-x)^2 dx + \int_{m+n}^{l-m-n} (l-x)^2 dx \right];$$

$$\int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx = \frac{1}{l^2 \varepsilon_c I_0^{III}} \left[2i' \int_0^m x^2 dx + 2i'' \int_m^{m+n} x^2 dx + \int_{m+n}^{l-m-n} x^2 dx \right];$$

$$\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx = \frac{1}{l^2 \varepsilon_c I_0^{III}} \left[2i' \int_0^m x(l-x)\, dx + \int_m^{m+n} x(l-x)\, dx + \int_{m+n}^{l-m-n} x(l-x)\, dx \right].$$

Wir kennen nun die drei Werte der Integrale, berechnen in Zahlen

$$\frac{\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx}{\varepsilon_c I_0^{III} \left[\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx - \left(\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx \right)^2 \right]} = \alpha$$

$$\frac{\int \frac{M''}{\varepsilon_c I_0} dx}{\varepsilon_c I_0^{III} \left[\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} dx \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx - \left(\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx \right)^2 \right]} = \beta$$

$$\frac{\int \frac{M'}{\varepsilon_c I_0} dx}{\varepsilon_c I_0^{III} \left[\int \frac{M'^2}{\varepsilon_c I_0} \int \frac{M''^2}{\varepsilon_c I_0} dx - \left(\int \frac{M' M''}{\varepsilon_c I_0} dx \right)^2 \right]} = \gamma$$

und erhalten den einfachen Ausdruck für die statisch Unbestimmbaren

$$M_1 = P(\alpha\delta'' - \beta\delta')\, \varepsilon_c I_0^{III}$$
$$M_2 = P(\alpha\delta' - \gamma\delta'')\, \varepsilon_c I_0^{III}.$$

Aus diesen Ausdrücken sieht man, daß zum Zeichnen der Linien des Einflusses der Lage der Kraft P auf die statisch Unbestimmbaren erst die Linien der Biegung des Hauptstabes unter den Faktoren $M_1 = 1$ und $M_2 = 1$ bestimmen müssen. Man weiß allgemein, daß die Differentialgleichung der Biegungslinie eines einfachen Eisenbetonbalkens die Gestalt

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{\varepsilon_c I_0}$$

hat, wenn etwaige Temperaturveränderungen nicht in Betracht gezogen werden und die Biegung einfach angenommen wird.

In dieser Gleichung verstehen wir unter δ die Ordinate der Biegungslinie in der Wirkungsstelle eines Momentes M_1 mit der Abszisse x, wo das Moment der Trägheit einen Wert I_0 besitzt. Also haben wir für die

Biegungslinie des Hauptsystems unter Einwirkung des Faktors $M_1 = 1$ eine Gleichung

$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{M'}{\varepsilon_c I_0};$$

und da $M' = \frac{l-x}{l}$, so ist

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{l-x}{l\varepsilon_c I_0}.$$

Aehnlich bei der Einwirkung von $M'' = \frac{x}{l}$ ist

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M''}{\varepsilon_c I_0}$$

oder

$$-\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{x}{l\varepsilon_c I_0}.$$

Das Trägheitsmoment I_0 ist veränderlich, und wir nehmen daher eine konstante Größe, für unseren Fall etwa I_0^{III} des mittleren Teiles, und bestimmen zwei Linien der Belastung: für den Fall $M_1 = 1$

$$z' = \frac{(l-x)\,I_0^{III}}{l I_0}$$

und für den Fall $X_1 = 1$

$$z'' = -\frac{x I_0^{III}}{l I_0},$$

wo z' und z'' die Ordinaten der Belastungslinie sind. Aus den letzten Gleichungen und der Art der Verteilung der Trägheitsmomente in unserem Balken können wir leicht sehen, daß die Belastungsebenen die Gestalt der Abb. 34 haben.

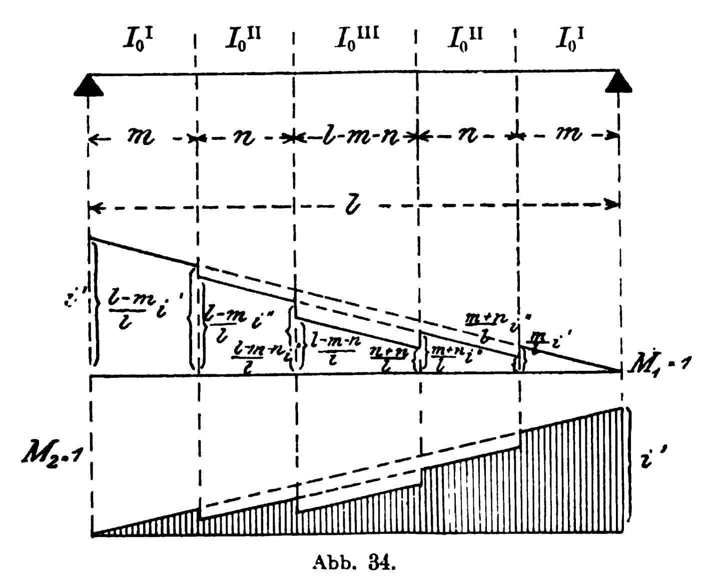


Abb. 34.

Zeichnen wir jetzt für diese Belastungen unseres Hauptstabes die Kurven der Momente, so hat man für die Koordinaten δ und η die Gleichungen

$$\eta' = \varepsilon_c I_0^{III} \delta'$$
$$\eta'' = \varepsilon_c I_0^{III} \delta'';$$

daraus

$$\delta' = \frac{\eta'}{\varepsilon_c I_0^{III}}$$
$$\delta'' = \frac{\eta''}{\varepsilon_c I_0^{III}};$$

folglich sind

$$M_1 = P(\alpha\eta'' - \beta\eta')$$
$$M_2 = P(\alpha\eta' - \gamma\eta'');$$

und jetzt kann man die gesuchten Einflußlinien aus diesen als Differenzen in den Linien η, deren Ordinaten für M_1 und M_2 entsprechend mit α, β, γ multiplizieren.

§ 27. Suchen wir die Einflußlinien in einer eingliedrigen Balkenbrücke des § 14 für die statisch unbestimmbaren Größen Z, B, H_b abhängig von der Lage der Kraft P. Wir müssen von einem System dreier Gleichungen ausgehen unter der Berücksichtigung, daß nur der Hauptbalken einer gewöhnlichen Biegung unterworfen ist und die Säulen neben der Längskraft auch einem Biegungsmomente. Die drei erforderlichen Gleichungen haben folgende Gestalt:

$$L' = P\delta' + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_l' N_{xl} dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l' M_{xl}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_p' N_{xp}}{\varepsilon_c \Omega} dy +$$
$$+ \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p' M_{xp}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M' M_x}{\varepsilon_c' I_0} dx$$

$$L'' = P\delta'' + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_l'' N_{xl}}{\varepsilon_c \Omega} dx + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l'' M_{xl}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p'' N_{xp}}{\varepsilon_c \Omega} dy +$$
$$+ \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p'' M_{xp}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M'' M_x}{\varepsilon_c' I_0} dx$$

$$L''' = P\delta''' + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_l''' N_{xl}}{\varepsilon_c \Omega} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l''' M_{xl}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_p''' N_{xp}}{\varepsilon_c \Omega} dy +$$
$$+ \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p''' M_{xp}}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M''' M_x}{\varepsilon_c I_0} dx.$$

Darin beziehen sich die beiden ersten Integrale auf die linke Säule, die beiden weiteren auf die rechte, die letzten auf den Hauptträger. Klar ist, daß

$$N_{xl} = N_l' Z + N_l'' B + N_l''' H_b$$
$$N_{xp} = N_p' Z + N_p'' B + N_p''' H_b$$
$$M_{xl} = M_l' Z + M_l'' B + M_l''' H_b$$
$$M_{xp} = M_p' Z + M_p'' B + M_p''' H_b$$
$$M_x = M' Z + M'' B + M''' H_b.$$

Nehmen wir an, daß in den Fundamentalgleichungen $L' = 0$, $L'' = 0$ und $L''' = 0$ ist und setzen wir die oben gefundenen Werte ein — wir finden:

$$P\delta' + Z\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l'^2}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_p' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p'^2 dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \frac{M'^2 dx}{\varepsilon_c' I_0}\right] +$$

$$+ B\left[\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_l' N_l'' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l' M_l'' dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p' N_p''}{\varepsilon_c \Omega} dy + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p' M_p''}{\varepsilon_c I} dy +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M' M''}{\varepsilon_c' I_0}\right] + H_b\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l' N_l''' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_l' M_l'''}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p' N_p''' dy}{\varepsilon_c \Omega} +\right.$$

$$\left. + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p' M_p'''}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M' M''' dx}{\varepsilon_c' I_0}\right] = 0.$$

$$P\delta'' + Z\left[\int_{-z}^{+z_0} \frac{N_l' N'' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_l' M_l'' dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-z}^{+z_0} \frac{N_p' N_p''}{\varepsilon_c \Omega} dy + \int_{-z}^{+z_0} \frac{M_p' M_p''}{\varepsilon_c I} dy +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M' M''}{\varepsilon_c' I_0} dx\right] + B\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l'' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_l'' dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p'' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p''^2 dy}{\varepsilon_c I} +\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M''^2 dx}{\varepsilon_c' I_0}\right] + H_b\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l'' N_l'''}{\varepsilon_c \Omega} dy + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_l'' M_l'''}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p'' N_p'''}{\varepsilon_c \Omega} dy +\right.$$

$$\left. + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p'' M_p'''}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M'' M'''}{\varepsilon_c' I_0} dx\right] = 0.$$

$$P\delta''' + Z\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l' N_l''' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_l' M_l''' dy}{\varepsilon_c I} + \int_{-z}^{z_0} \frac{N_p' N_p''' dy}{\varepsilon_c \Omega} +\right.$$

$$\left. + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_p' M_p'''}{\varepsilon_c I} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M' M''' dx}{\varepsilon_c' I_0}\right] + B\left[\int_{-z}^{z_0} \frac{N_l' N_l'' dy}{\varepsilon_c \Omega} + \int_{-z}^{z_0} \frac{M_l'' M_l''' dy}{\varepsilon_c I} +\right.$$

$$+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p''N_p'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p''M_p'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M''M'''dx}{\varepsilon_c' I_0}\Bigg]+H_b\Bigg[\int_{-z}^{z_0}\frac{N_l'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+$$

$$+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{M'''^2dx}{\varepsilon_c' I_0}\Bigg]=0.$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\int_{z}^{z_0}\frac{N_l'^2dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l'dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p'dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p'^2dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M'^2dx}{\varepsilon_c' I_0}=\zeta$$

$$\int_{-z}^{z_0}\frac{N_l''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M''dx}{\varepsilon_c' I_0}=\eta$$

$$\int_{-z}^{z_0}\frac{N_l'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M'''dx}{\varepsilon_c' I_0}=\vartheta$$

$$\int_{-z}^{+z_0}\frac{N_l'N_l''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l'M_l''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{+z_0}\frac{N_p'N_p''dy}{\varepsilon_c\Omega}+$$

$$+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p'M_p''}{\varepsilon_c I_0}dy+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M'M''}{\varepsilon_c' I_0}dx=\iota$$

$$\int_{-z}^{z_0}\frac{N_l'N_l'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l'M_l'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p'N_p'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+$$

$$+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p'M_p'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{M'M'''dx}{\varepsilon_c' I_0}=\varkappa$$

$$\int_{-z}^{z_0}\frac{N_l''N_l'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_l''M_l'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-z}^{z_0}\frac{N_p''N_p'''dy}{\varepsilon_c\Omega}+$$

$$+\int_{-z}^{z_0}\frac{M_p''M_p'''dy}{\varepsilon_c I}+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{M''M'''dx}{\varepsilon_c' I_0}=\lambda$$

und haben die Fundamentalgleichungen in folgender Gestalt:

$$P\delta' + \zeta Z + \iota B + \varkappa H_b = 0$$
$$P\delta'' + \iota Z + \eta B + \lambda H_b = 0$$
$$P\delta''' + \varkappa Z + \lambda B + \vartheta H_b = 0.$$

Wollen wir daraus die Werte von Z, B, H_b bestimmen, so müssen wir die einschlägigen Summen der Integrale auch berechnen und müssen dazu die Einwirkung der Faktoren $Z = 1$, $B = 1$, $H_b = 1$ auf das Hauptsystem der Stäbe (Abb. 17) für unsere Brücke untersuchen.

Bei $Z = 1$:

$$N_l' = 0; \quad N_p' = 0$$
$$M_l' = -1; \quad M_p' = -1; \quad M' = -1;$$

bei $B = 1$:

$$N_l'' = -1; \quad N_p'' = 1$$
$$M_l'' = \frac{l}{2}; \quad M_p'' = -\frac{l}{2}; \quad M'' = -x;$$

bei $H_b = 1$:

$$N_l''' = 0; \quad N_p''' = 0$$
$$M_l''' = -y; \quad M_p''' = -y; \quad M''' = -z_0,$$

wo x, y, z_0 die Werte auf Abb. 17 und § 14 haben. Wegen dieser Werte hat man für die zu berechnenden Summen:

$$\zeta = \frac{2h}{\varepsilon_c I} + \frac{l}{\varepsilon_c' I_0};$$
$$\eta = \frac{2h}{\varepsilon_c \Omega} + \frac{l^2 h}{2\varepsilon_c J} + \frac{l^3}{12\varepsilon_c' I_0};$$
$$\vartheta = \frac{2(z^3 + z_0^3)}{3\varepsilon_c I} + \frac{l z_0^2}{\varepsilon_c' I_0};$$
$$\iota = 0;$$
$$\varkappa = \frac{z_0^2 - z^2}{\varepsilon_c I} + \frac{z_0 l}{\varepsilon_c' I_0};$$
$$\lambda = 0;$$

und die Fundamentalgleichungen vereinfachen sich bedeutend:

$$P\delta' + \zeta Z + \varkappa H_b = 0$$
$$P\delta'' + \eta B = 0$$
$$P\delta''' + \varkappa Z + \vartheta H_b = 0;$$

daraus unmittelbar

$$Z = P\frac{\varkappa\delta''' - \vartheta\delta'}{\zeta\vartheta - \varkappa^2};$$
$$B = -P\frac{\delta''}{\eta};$$
$$H_b = P\frac{\varkappa\delta' - \zeta\delta'''}{\zeta\vartheta - \varkappa^2}.$$

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{x}{\zeta\vartheta - x^2} = \varphi$$

$$\frac{\vartheta}{\zeta\vartheta - x^2} = \chi$$

$$\frac{\zeta}{\zeta\vartheta - x^2} = \psi,$$

so haben die statisch unbestimmbaren Größen Z, B, H_b folgende Gestalt:

$$Z = P(\varphi\delta''' - \chi\delta')$$

$$B = -P\frac{\delta''}{\eta}$$

$$H_b = P(\varphi\delta' - \psi\delta'''),$$

welche besagt, daß zur Zeichnung der Linie des Einflusses der Lage der Vertikalkraft auf die statisch Unbestimmbaren zuerst die Linien der vertikalen Verschiebungen δ', δ'', δ''' des Hauptbalkens im statisch unausdrückbaren Fundamentalsystem der Stäbe zu bestimmen sind unter der Einwirkung der Faktoren $Z = 1$, $B = 1$, $H_b = 1$. Diese letzten Linien sind im vorigen Abschnitt bestimmt worden, und man hat folgende Abhängigkeit der Verschiebungen δ', δ'', δ''' von x:

$$\delta' = \frac{h(l+2x)}{2\varepsilon_c I} + \frac{l^2 + 4x(l+x)}{8\varepsilon_c' I_0}$$

$$\delta'' = -\left[\frac{h}{\varepsilon_c \Omega} + \frac{hl(l+2x)}{4\varepsilon_c I} + \frac{l^3 + 3l^2x - 4x^3}{24\varepsilon_c' I_0}\right]$$

$$\delta''' = (l+2x)\left[\frac{z_0^2 - z^2}{4\varepsilon_c I} + \frac{(l+2x)z_0}{8\varepsilon_c' I_0}\right].$$

Nun können wir leicht die Linien $\varphi\delta'''$, $\chi\delta'$, δ'', $\varphi\delta'$, $\psi\delta'''$ zeichnen, auch zeichnerisch die Faktoren $\varphi\delta'''$, $\varphi\delta''' - \chi\delta'$ und $\varphi\delta' - \psi\delta'''$ angeben durch algebraische Addition der entsprechenden Linien. Das Resultat ist dann die Angabe der Linien des Einflusses der Lage der Kraft P, welche auf den Hauptträger der Brücke wirkt, auf die statisch unbestimmbaren Größen.

FORSCHERARBEITEN AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

DIE ABHÄNGIGKEIT DER BRUCHLAST VOM VERBUNDE

UND DIE MITTEL ZUR ERHÖHUNG DER TRAGFÄHIGKEIT VON BALKEN AUS EISENBETON

HEFT V

PREIS 3 MARK

VON

DR. ING. FRITZ v. EMPERGER
K. K. BAURAT

VERLAG von WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

Die

Abhängigkeit der Bruchlast vom Verbunde

und die Mittel zur Erhöhung der Tragfähigkeit von Balken aus Eisenbeton

von

Dr. Ing. **FRITZ v. EMPERGER**
K. K. Baurat.

Mit 47 Textabbildungen.

BERLIN 1906
Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

VORWORT.

Das im vorliegenden Heft, teilweise als Fortsetzung zu Heft III, durch Versuche erörterte Thema kann wohl kaum als innerhalb der von einem Privaten zu erwartenden Leistungen und der ihm aus wissenschaftlichem Interesse zur Verfügung stehenden Mitteln gelten. Wenn ich seine Bearbeitung trotzdem zunächst schrittweise in Angriff genommen habe, so bitte ich mir es nicht als Unbescheidenheit auszulegen, und möchte ich daher den Wunsch vorausschicken, daß man an manches Detail nicht jene Anforderungen stellen möge, die man bei Arbeiten aus wohlorganisierten und mit Geldmitteln reichlich versehenen staatlichen Versuchsanstalten zu machen berechtigt ist. Bekanntlich verfügt mein engeres Heimatland über solche Hilfsmittel erst seit kurzem, und ist erst diesen Sommer ein Ausschuß zum Studium dieser Frage gebildet worden. Ich habe es daher unangenehm empfunden, daß das, was Wissenschaft und Industrie in der Zeit seit der Einführung des Eisenbetons hierzulande aus eigener Initiative ohne jede staatliche Hilfe geschaffen haben, so wenig Verständnis bei den zu solchen Arbeiten verpflichteten staatlichen Behörden gefunden hat.

Um diese Lücke soweit auszufüllen, soweit dies private Initiative vermag, — bis der vom Oesterr. Ing.- u. Arch.-Verein zu diesem Zweck gewählte Ausschuß in Tätigkeit treten kann, — habe ich diese und andere Versuche in Angriff genommen, trotzdem man mir hierbei von der zum Gegenteil berufenen Seite manche ganz unglaubliche Schwierigkeiten verursacht hat, anscheinend, weil man in meinen Arbeiten nur den Nachweis gesehen hat, daß diese Untätigkeit trotz alledem eine Entschuldigung nicht besitzt.

Dieses Verhalten der einstmals führend gewesenen Stelle konnte dem Fortschritt nur deshalb wenig schaden, weil alle übrigen Nationen und selbst die kleinsten Staaten werktätig an der Arbeit waren und ihre Erfolge der Allgemeinheit nicht verschlossen haben. Der Eisenbeton erscheint heute

bereits über den engen Kreis lokaler Bautätigkeit hinausgewachsen und seine Untersuchungsmethoden für internationale Vereinbarungen reif; der Internationale Verband für Materialprüfungen der Technik erscheint mir zu dieser Aufgabe berufen. Er soll die einzelnen geleisteten Arbeiten der verschiedenen Länder zusammenfassen.

Offiziell vertreten waren bei den Versuchen das Eisenbahn-Ministerium durch Herrn Oberbaurat K. Stöckl, das Hochbau-Departement der K. K. niederösterr. Statthaltererei durch Herrn Ing. K. Holik und das Wiener Stadtbauamt durch Herrn Bauinspektor A. Swetz, denen ich für diese amtliche Bestätigung der so gewonnenen Versuchsresultate meinen kollegialen Dank ausspreche, ebenso wie den Herren Baumeister Rud. Grimm und A. Gisshammer für ihre werktätige Unterstützung, sowie schließlich Herrn Baurat A. Greil vom Stadtbauamt und Herrn Prof. Kirsch für die prompte Vornahme der Materialproben.

Wien, im Juni 1906.

Dr. F. v. Emperger.

L'objet de cette publication est de montrer comment le poids de rupture d'une poutre en béton armé dépend de l'intime connexion du béton et du fer et par quels moyens on peut augmenter l'une et l'autre. Ces épreuves ont été faites par l'auteur comme suite de sa publication „Travaux de recherches sur le béton armé 3e fascicule" qui contient un résumé de toutes les épreuves de ce genre exécutées jusqu'à ce jour dans le monde entier.

Comme introduction pour cette démonstration, on montre d'abord l'influence de la répartition du mode chargement sur l'adhérence et la résistance.

Ainsi par des expériences parallèles il est prouvé qu'un poids également distribué (fig. 2) augmente de 50 % le poids de rupture en comparaison des forces isolées (fig. 3).

Les figures 8 et 9 montrent les arrangements des essais et les appareils pour les mesures. Toutes les poutres essayées (fig. 47) ont une Section en T de 15 centimètres de hauteur, 50 centimètres de largeur et 2 mètres de libre portée.

Les 22 poutres de la Série A (fig. 10—19, 21—28) et C (fig. 36—43) sont renforcées de 2 fers ronds de 20 millimètres. Suivant le calcul usuel il faudrait 40 kilogrammes par cm^2 adhérence pour en obtenir la limite de rupture du fer en tension qui est supposée être 4000 kilogrammes par cm^2.

Les 8 poutres de la Série B (fig. 29—34) ont 8 fers ronds de 10 millimètres et il faudrait par conséquent seulement 20 kilogrammes pour utiliser le fer jusqu'à la même limite. Chaque Série commence par des poutres armées de fers droits et sans étriers.

L'essai A_1 (fig. 10) a donné 5,6 kg/cm^2 et l'essai B_1 (fig. 15) 7,4 kg/cm^2 de force adhésive.

Les essais A_2 (fig. 12), B_2 (fig. 17) sont les plus mauvais de la Série. Les armatures sont un fer droit et un fer courbé sans étrier. Dans les figures 13 et 18 il est montré comment le fer droit est premièrement arraché.

Les essais suivants avec étriers (fig. 11 et 16) montrent une augmentation de poids de rupture de 300 à 500 %. Ils justifient 16 kg/cm² adhérence ou 4 kg/cm² pour admissible avec des étriers.

Dans la Série C les fers tendus et les étriers sont reliés au moyen d'une entaille. Voir fig. 35 et suivant.

Pour pouvoir mieux comparer les effets d'un scellement parfait les essais I, II (fig. 4—7) ont été faits avec des fers ronds et droits vissés dans des écrous qui s'appuyaient sur les extrémités des poutres.

Cet arrangement a eu pour effet que les mouvements des fers était absolument empêché et l'on a obtenu une concordance surprenante entre les allongements observés sur la poutre et ceux qu'on a observés sur des petits échantillons par la machine d'essai.

En outre, les meilleurs résultats ont été obtenus par les poutres C_7, C_8 (fig. 40—41) qui ont atteint la limite de leur résistance comme il a été prouvé par des essais directs.

The objects of the tests, of which the results are published in this pamphlet, are to show the intimate connection of the adhesive power between concrete and iron with the strength of reinforced concrete beams, and to indicate the means by which the strength of such beams could be increased.

As an introduction it is shown how the load that can be supported by a beam is dependent on the manner of loading, and an explanation is added showing that a given beam will carry 50 per cent more weight applied in the form of an equally distributed load (fig. 2) instead of as a single concentrated load (fig. 3) with the same moment $\frac{Ql}{8}$.

The arrangement of the load and the measuring apparatus are shown in figs. 8 and 9.

All the test beams were of **T**-section (fig. 47), about 6 in deep by 20 in wide across the compression flange, and had the clear span of 6 ft. 6 in between supports.

The tests were conducted upon twenty-two beams of the series A (fig. 10—19, 21—28) and C (fig. 36—43), each reinforced with 2 round iron bars of about $^3/_4$ inch diameter (20 mm); eight beams of series B (fig. 29—34), each reinforced with 8 round iron bars of about $^3/_8$ inch diameter; and besides these some beams reinforced with flat iron and Thacher bars were tested for comparison.

In the beams of series A, it would be necessary to have an adhesive force of 600 lbs. per square inch of surface to be able to utilise the iron up to its full tensile strength of 60,000 lbs. per square inch, while in the beams of series B an adhesion of only 300 lbs. per square inch would be necessary.

Each series begins with a beam reinforced with straight iron bars without stirrups.

A_1 (fig. 10) showed adhesive power of 80 lbs. per square inch.

B_1 (fig. 15) „ „ „ „ 110 „ „ „ „

The worst results were recorded in the case of beams with dis-symetrically bent up iron bars without stirrups A_2 and B_2 (fig. 12 and 17). Figs. 13 and 18 show the manner in which the straight bar was pulled out.

Straight iron bars with stirrups gave from 300 to 500 per cent more resistance, indicating an adhesive power of at least 240 lbs. per square inch or 60 lbs. per square inch admissible with the use of stirrups.

For the purpose of comparison, some beams were tested having horizontal bars screwed at the ends and secured by nuts and iron plates at the ends of the beam as shown in figs. 4—7.

It is of the greatest interest to note that by the adoption of this arrangement not only was it possible to obviate the slipping of the bars but also to obtain a full accord between the observed elongation of the iron in the beam and that exhibited by a specimen of the same iron in the testing machine (fig. 6).

The best results were obtained by beams of series C having stirrups fastened on the horizontal iron bars of the reinforcement. In testes C_7 and C_8 (fig. 40 and 41) the beams reached the ultimate resistance of their material as shown by direct tests.

Meine auf Grund einer Uebersicht über alle bisherigen Versuche im III. Forscherheft auf dem Gebiete des Eisenbetons gezogene Schlußfolgerung, daß die Haftfestigkeit des Eisens im Betonbalken kleiner und weniger verläßlich ist als man gemeinhin annimmt, haben durch die letzte Arbeit Prof. Schüles im 10. Heft der Mitteilungen der eidgen. Materialprüfungsanstalt in Zürich eine neuerliche wissenschaftlich hochstehende Bestätigung erfahren.[1])

Ueber die Zahl von 40 kg/cm² Haftfestigkeit und ähnlicher hoher Zahlen, wie sie sich in allen Lehrbüchern vorfinden, und im Fach dermaßen als Dogma angesehen wurden, daß z. B. der Deutsche Betonverein in seinen provisorischen Vorschriften 7,5 kg/cm ohne Angabe einer Sicherung als zulässig vorschlug, ist es seither in der Literatur bedenklich still geworden, ohne daß man sich über die Bedeutung eines guten Verbundes und der dabei in Betracht kommenden Vorgänge allgemein klar geworden ist.

Dieser Vorschlag ist deshalb unannehmbar, weil er für die Haftfestigkeit eine 5fache Sicherheit voraussetzt und so indirekt behauptet, daß bei einem Bruch mit 4facher Sicherheit dieselbe ganz außer Frage steht.

Trotz der von mir geführten direkten Beweise ist man immer noch geneigt, sich mit den alten Schlagwörtern der unbedingten Verläßlichkeit der Adhäsion zu behelfen und die Tatsachen nicht zu beachten, die ganz laut für das Gegenteil sprechen. Es ist dies dieselbe Schwerfälligkeit, die wir bei der Frage der Verläßlichkeit der Zugfestigkeit des Betons heute als glücklich überwunden bezeichnen können. Wo aber die Frage der Sicherheit der Bauten in Frage steht, erscheint solches Zögern, und die Versuche, die einmal gegebene Ziffer zu entschuldigen und beizubehalten, gar nicht zu rechtfertigen.

Die erwiesene Notwendigkeit für besondere Vorkehrungen, um das Zusammenarbeiten der beiden Materialien zu sichern, löst die weitere Frage aus: „Welches sind die Vorkehrungen und welche Wirksamkeit besitzen dieselben?“ Zur Beantwortung dieses ungemein weitläufigen Themas habe ich die folgenden Versuche durchgeführt, und ich darf wohl

[1]) Siehe Besprechung in „B. u. E.“ 1906, Heft VII.

vorausschickend betonen, um keine unberechtigte Erwartungen zu erwecken, daß der Leser bei meinen beschränkten privaten Hilfsmitteln keinesfalls auf eine erschöpfende Behandlung rechnen darf, vielmehr, daß das vorgelegte Material vielleicht mehr Fragen aufwirft, als es löst. Ich bin es zufrieden, wenn die eingeschlagenen Untersuchungsmethoden Billigung finden sollten.

Meiner Meinung nach sind die Versuche zur Bestimmung der Haftfestigkeit aus Zug- oder Druckproben deshalb als unzulänglich anzusehen, weil man erst die Brücke einer Rechnung bedarf, um sie für die Praxis brauchbar zu machen, und die Verhältnisse, bei denen man sie anwendet, rechnungsmäßig nicht geklärte sind. Ich ziehe es daher vor, diese rechnungsmäßigen Werte direkt aus Biegeproben zu bestimmen, so zwar, daß die Bestimmung die Fehler der Rechnung einschließt, die sich genau unter denselben Verhältnissen vollziehen, wie sie bei der Näherungsrechnung auch sonst in Frage kommen.

Nur bei einer Reihe damit zusammenhängender Fragen kann ich von einer neu gewonnenen Klarheit sprechen, die mir aus dem vorliegenden Material hervorzugehen scheint. Sie betrifft unter anderem den Einfluß der Einzellast auf einen solchen Balken, verglichen mit gleichmäßig verteilten Lasten, und die Rolle, die die Eisenfestigkeit und die abgestufte Eigenschaft des Eisens im Balken spielen.

Zum Studium dieser Frage ist von mir ein Balken von 2 m Spannweite, 50 cm Breite und 15 cm Nutzhöhe verwendet worden, dessen übrige Abmessungen und Materialien (siehe weiter unten) so gewählt wurden, daß die Druckfestigkeit des Betons ausgeschaltet blieb, weil dies ein besonderes Arbeitsthema für sich bilden sollte. Dessenungeachtet wurden dieselben bei einem der letzten Versuche (C_7 auf Seite 40) einbezogen und so auch in dieser Hinsicht der Ueberblick vervollständigt.

Die Untersuchungen des Zements und des Betons haben daher lediglich den Zweck verfolgt, darzutun, daß die Betondruckfestigkeit hoch genug war, um hier nicht weiter als Bruchursache in Frage zu kommen. Die mit der Belastung auftretenden Zugspannungen im Eisen und die gleichzeitigen Scherspannungen im Beton sowie die Haftspannungen wurden durch die gewählten Abmessungen in ein solches Verhältnis gebracht, daß je 1000 kg Eisenzug 12,5 kg Scherspannung und 10 kg Haftspannung zugeordnet waren, so daß zu den möglicherweise erreichbaren 4000 kg Eisen je 50 kg Scherfestigkeit und 40 kg Haftfestigkeit (immer rechnungsmäßig) nötig gewesen wären. Die Anordnung umfaßt die Serie A und C mit je 2 R.-E. von 20 mm und einigen Thachereisen von 17,5 mm Durchm. In der Serie B ist derselbe Querschnitt aus 8 R.-E. von 10 mm Durchm. zusammengesetzt worden, so daß also bei einem 2fachen Umfang nur 20 kg Haftfestigkeit nötig gewesen wäre, um die immer wieder als Bruchgrenze angenommene Zugfestigkeit von 4000 kg/cm² des Eisens zu übertragen.

Es ist bei diesen Versuchen fast ausschließlich eine Lastanordnung im Gebrauch gewesen, die zwei gleiche Einzellasten $\frac{Q}{2}$ in $\frac{l}{4}$ überträgt. Es entspricht dem ein Moment $M = \frac{Ql}{8}$ und eine max. Querkraft $V = \frac{Q}{2}$. Es ist dies eine Anordnung, von der man gewöhnlich glaubt, daß sie die überaus schwierige Belastung mit gleichmäßig verteilter Last zu ersetzen imstande ist. Es dürfte das wohl auch der Grund sein, der die Königl. Eisenbahndirektion Berlin in den kürzlich erschienenen Vorschriften[2]) dieselbe Belastungsanordnung vorschreiben ließ. Um in dieser Hinsicht mein Gewissen zu beruhigen, das durch eine bereits früher einmal festgestellte ganz bedeutende Abweichung beunruhigt war, habe ich abermals Parallelversuche mit den beiden Belastungsarten eingeschaltet, die das früher gewonnene Resultat bestätigten, dahingehend, daß es nicht angeht, ohne weiteres diese Annahme gelten zu lassen. Diese ältere Versuchsserie findet sich sonst im III. Forscherheft auf dem Gebiete des Eisenbetons, Seite 14, veröffentlicht vor. Um dies soweit es hier wegen der Vollständigkeit nötig ist nachzutragen, sei erwähnt, daß ich bei dieser, seinerzeit als Ergänzung zu den Versuchen Kleinlogels[3]) gemachten Versuchsserie mit zunehmenden Armaturperzenten demgemäß auch die Belastungsanordnung Kleinlogels mit Einzellasten beibehalten habe. Dabei konnte ich aber der Versuchung nicht widerstehen, als Stichprobe bei einem der Versuche in der erwähnten Reihe mit zunehmender Armatur einen Versuch mit gleichförmig verteilter Last durchzuführen. Ich will dieselbe, da sie nahezu identisch mit dem Versuch G Kleinlogels ist, mit G_2 bezeichnen (Abb. 1). G_2 hat ein Rundeisen 38 mm und trug nahezu dasselbe wie der Versuch G von Kleinlogel mit 3 Rundeisen 22 mm. Mit bezug auf meine Serie aber trug sie alle Merkmale eines Fehlversuches. Bei der Möglichkeit einer Verspannung der aus Eisenflossen bestehenden Lasten (siehe Abb. 14 des III. Forscherheftes), und da ich meine diesbezügliche Erklärung durch nichts beweisen konnte, habe ich die Veröffentlichung des Versuches bis heute verschoben, die ich nunmehr nachtrage. Derselbe ergibt mit den anschließenden Versuchen die folgende Reihenfolge, wobei ich bezüglich der niedriger armierten Versuche A bis J_1 und der höheren Versuche L und M auf das III. Heft verweise.

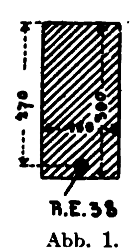


Abb. 1.

Schon aus der umstehenden Zusammenstellung ist ersichtlich, daß das von G_2 erzielte Bruchmoment plötzlich aus meiner Reihe J_1 G_2 K (5 Wochen alter Beton 1 : 4) heraustritt und die Höhe von G (25 Wochen alter Beton 1 : 3) von Kleinlogel erreicht, ihn jedoch mit bezug auf K (Haftfestigkeit) weit übertrifft. Ein graphischer Vergleich aller Versuche (siehe Tafel im III. Forscherheft) ergibt dies noch deutlicher wie umstehende Tabelle,

[2]) Siehe Aufsatz im Zentralblatt d. Bauverw. 1906, Nr. 52 von Reg.- u. Baurat J. Labes und „B. u. E." 1906, Heft VII. — [3]) Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Heft I.

	Beton	Alter	Eisen Zahl	Eisen R.-E.	F_e cm²	f_e cm²/m	p vH.	m	$\frac{P+G}{2}$ kg	Bruchmoment M_{max} f. 1 lfd. m	Bruchspannung σ_e kg/cm²	M_0	U cm	k kg/cm²
J_1	1 : 4	5 Wochen	1	32	8,04	53,60	1,98	20,00	6 000	2 000 000	1866	16 466	10,05	29,9
G	1 : 3	25 „	3	22	11,40	76,00	2,66	19,00	10 750	3 583 333	2481	29 492	20,70	**27,3**
G_2	1 : 4	5 „	1	38	11,84	78,93	2,93	18,97	10 865	3 706 250	2419	30 000	11,94	**41,0**
K	1 : 4	5 „	1	44	15,20	101,33	3,75	18,39	5 168	2 584 000	1387	21 270	13,82	20,3

daß bei regelmäßigem Verlauf $M_0 = \frac{6\,M}{b\,d^2} = 20\,000$ sein sollte, während es 30 000 erreicht hat, also um 50 vH. mehr beträgt. Die Sachlage ist nun die folgende, in Abb. 2 u. 3 dargestellte. Bei einer Belastung mit der Einzellast $\frac{Q}{2}$ in $\frac{l}{4}$ ist die Scherkraft auf $^1/_4\,l$ verteilt, beträgt also im ganzen $S = \frac{Q}{2\,m}\,\frac{l}{4}$, während bei einer gleichmäßig verteilten Last die Scherkraft auf $^1/_2\,l$ so verteilt ist, daß sie dasselbe beträgt $S = \frac{Q}{4\,m}\,\frac{l}{2}$, wenn auch in anderer Verteilung gleich dem Horizontalschub eines Gewölbes mit dem Stich gleich m ist $H = \frac{M}{m} = \frac{Q\,l}{8\,m}$. Es ist auch das der Abmessung zugrunde gelegte Maximum in beiden Fällen dasselbe, nur hält das Maximum in unserem Fall auf der ganzen Strecke an, während es andernfalls nur lokal

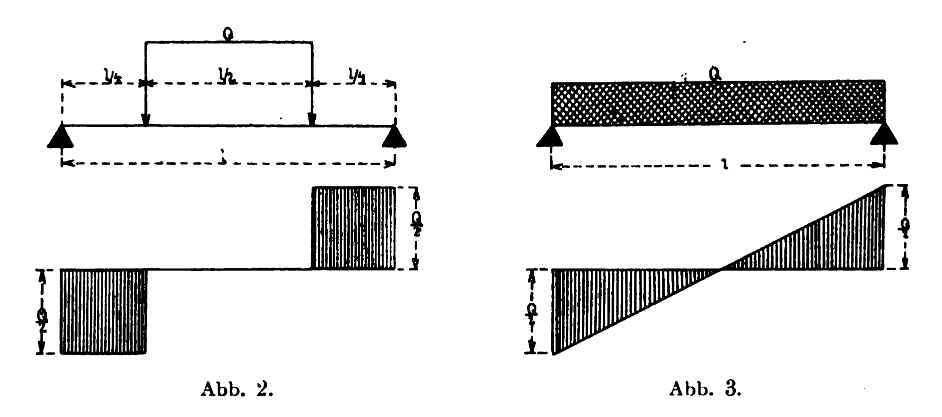


Abb. 2. Abb. 3.

auftritt. Aus dieser verschiedenen Verteilung in beiden Fällen leiten sich die verschiedenen Resultate ab, die zunächst glauben lassen, als ob die Balken mit gleichmäßig verteilter Last tragfähiger wären, oder, was dasselbe ist, für deren rechnungsmäßige Haftfestikeit ein größerer Wert vorhanden wäre, während dies m. E. auf die günstigere Spannungsverteilung zurückzuführen ist. Ich glaube dies nunmehr auf Grund dieses Versuches und der Parallelversuche A_1 und A_5, C_4 und C_5 aussprechen zu dürfen, umsomehr, als sich dabei fast regelmäßig jene Erhöhung bis etwa 50 vH. in der Bruchlast bezw. in dem

rechnungsmäßigen Wert der Haftspannung eingestellt hat. Es ist dieser Umstand für die indirekte Bestimmung der Höhe der Haftfestigkeit von um so größerer Bedeutung, als man bei einer zulässigen Zahl von 4 kg, die sich aus der Belastung mit Einzellasten ableitet, zu der Zahl von 6 kg/cm² gelangen würde, wenn man die gewöhnlich gleichmäßig verteilte Last zugrunde legt. Ebenso wichtig in dieser Hinsicht ist der Unterschied zwischen Einzellasten in der Mitte und der gleichmäßig verteilten Last. Hier wird das Mißverhältnis durch das um 100 vH. größer werdende Moment umgekehrt, so daß angenommen werden darf, daß Mittellasten zu Untersuchungen in dieser Richtung sich nicht eignen. Die Last P, die in der Mitte das Moment $0{,}25\,P_l$ und die max. Querkraft $0{,}5\,P$ erzeugt, wird, mit der Last $2\,P$ gleichmäßig verteilt, als identisch angesehen, weil diese auch das Moment $0{,}25\,P_l$ herbeiführt, dasselbe erzeugt aber die Querkraft P, die lokal 4mal größer ist. Bei einer Teilung in zwei Einzelkräfte verschiebt sich sich dieses Verhältnis zugunsten der gleichmäßigen Last. Es geht also nicht an, die Vergleiche rein mathematisch zu führen. Es wird sich vielmehr empfehlen, eine bestimmte Belastungsform für alle Versuche zugrunde zu legen, wenn man eine zweifellose Vergleichsunterlage haben will. Weiter sollte durch sorgfältige Parallelversuche die verschiedene Wirkung abweichender Lastanordnung ermittelt werden.

Nach diesen die Belastungsmethoden betreffenden Einzelheiten, die den Vergleichswert mancher in dem III. Forscherheft gegebenen Zahl, die aus Versuchen mit gleichförmig verteilter oder Mittellast stammt, wie z. B. beim Versuch in Lausanne, ebenso wie in obiger Tabelle auf das gleiche Niveau mit den übrigen herabdrückt, gehe ich zur Beschreibung meiner Versuche, wie zur gleichzeitigen Besprechung des eigentlichen Themas über. Ich will aber zuerst zwei spätere Versuche als Einleitung vorführen, bei denen ich die Tragkraft des Balkens völlig von der Haftfestigkeit unabhängig zu machen versuchte. Es dürfte hierbei am Platze sein, der Versuche zu gedenken, wo ich seinerzeit eine direkte Messung der Bewegung der vorstehenden Enden der eingebetteten Rundeisen versucht habe.[4]) Diese Beobachtung hat sich, wenigstens mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln, als zu kompliziert und unsicher erwiesen, da die für mich meßbaren Erscheinungen sich zu plötzlich und zu unregelmäßig nach den Enden hin fortpflanzen, um eine gute Beobachtung und Schlußfolgerung zu gestatten. Ich wählte daher eine andere Form der Beobachtung in den umstehend beschriebenen Versuchen I und II, in welchen ich an den vorstehenden Enden je ein 18 mm-Gewinde einschneiden ließ, ein 8 mm-Blech 80 auf 40 aufschob und dieses an die rückwärtige Betonfläche des Balkens festschraubte. Eine Beobachtung der Dehnungsmesser ergab, daß bei dieser Prozedur am fertigen Träger

[4]) Siehe Forscherarbeiten a. d. Gebiete des Eisenbetons, Heft III, Seite 12 Abb. 14 und 15, und auch „B. u. E.“ 1906, Heft II, Seite 35.

sich keine Fortpflanzung der beim Zuschrauben aufgewendeten Kraft bis in die Trägermitte nachweisen läßt, also dort Anfangsspannungen aus dieser Quelle nicht in Betracht gezogen zu werden brauchen. Ich habe versucht, mir zu diesen Versuchen ein Eisen von großer Festigkeit und Elastizitätsgrenze zu verschaffen, und ist mir dasselbe als Bessemerstahl, Härte Nr. 5, verkauft worden; was hinter diesem Namen steckt, erfuhr ich erst nachträglich durch einen mit diesem Material von Prof. Kirsch an der Techn. Hochschule in Wien vorgenommenen Versuch, der hier angeführt und zum Vergleich mit den in der Folge gemachten Dehnungsmessungen benutzt ist. Das amtliche Prüfungszeugnis sagt über das verwendete Eisen:

Elastizitäts-grenze	Proportionalitäts-grenze	Streckgrenze	Bruchgrenze	Bruchdehnung	Einschnürung
11 kg/cm²	20,9 kg/m	22,8 kg/m	38 kg/cm	33 vH.	71 vH.

Diese Eigenschaften finden sich in der Abb. 7 eingetragen, wo die an den 2 R.-E. direkt beobachteten Dehnungen dargestellt sind. Es finden sich ferner dort in Abb. 4 und 5 die bei den Versuchen I und II angebrachten Armaturen dargestellt; Abb. 6 stellt das Schaubild der Durchbiegungen und Abb. 7 das der Dehnungen, abhängig von den Lasten, dar. Die Durchbiegungen zeigen die gewohnte Entwicklung: Zunächst ein Zurückbleiben gegen die Theorie, in der man die Wirkung der Zugfestigkeit des Zements (Stadium I) erkennen will, eine Erscheinung, die sich aber im Dehnungsdiagramm nicht vorfindet. Siehe diesbezüglich ein Diagramm der Versuche von Guidi („B. u. E.“ 1906, Heft II, Abb. 4, Seite 37), das umgekehrt eine derartige Erscheinung auch in der Dehnung vermuten läßt.

Ich vermute, daß diese Erscheinung hier wegen der großen Ausnehmung in der Trägermitte ausgeblieben ist.

Es kann an dieser Stelle nicht genug hervorgehoben werden, zu welchen irreführenden Schlüssen das Durchbiegungsschaubild allein Anlaß gibt, wenn es ohne Zusammenhalt mit dem Dehnungsdiagramm untersucht wird; doch auch dieses bedarf noch einer für mich leider nicht erreichbaren Ergänzung der gleichzeitigen Verschiebungen des Eisens im Beton, wie sie Schüle so zweifelsohne im 10. Heft seiner Mitteilungen nachgewiesen hat. Beim Versuch Guidi gehen die Beobachtungen nicht hoch genug hinauf, um den Zusammenhang zwischen meinen und seinen Beobachtungen herzustellen. Es findet sich dort ein Balken, dessen rechte Seite mit Bügeln bewehrt ist, während die linke ohne dieselben geblieben ist. Die Bügel üben eine Wirkung, die, wie wir später dartun wollen, ähnlich ist, als ob auf der rechten Seite das Rundeisen an mehreren Punkten festgehalten bezw. die Anhaftung erhöht worden wäre. Bei der geringen in Frage kommenden Haftspannung und bei der angewendeten Belastung in der Mitte (6 kg/cm² beim Bruch) ist es Guidi trotz der einseitigen schlechten Befestigung möglich gewesen, die Bruchgrenze

des Eisens in seinem Versuch nahezu zu erreichen. (Siehe das oben über diese Belastungsmethode Gesagte.) In den vorliegenden Versuchen aber ist an eine volle Ausnutzung des Eisens bei den geforderten 40 kg/cm² Haftfestigkeit ohne besondere Vorkehrungen nicht zu denken gewesen; daher wurden

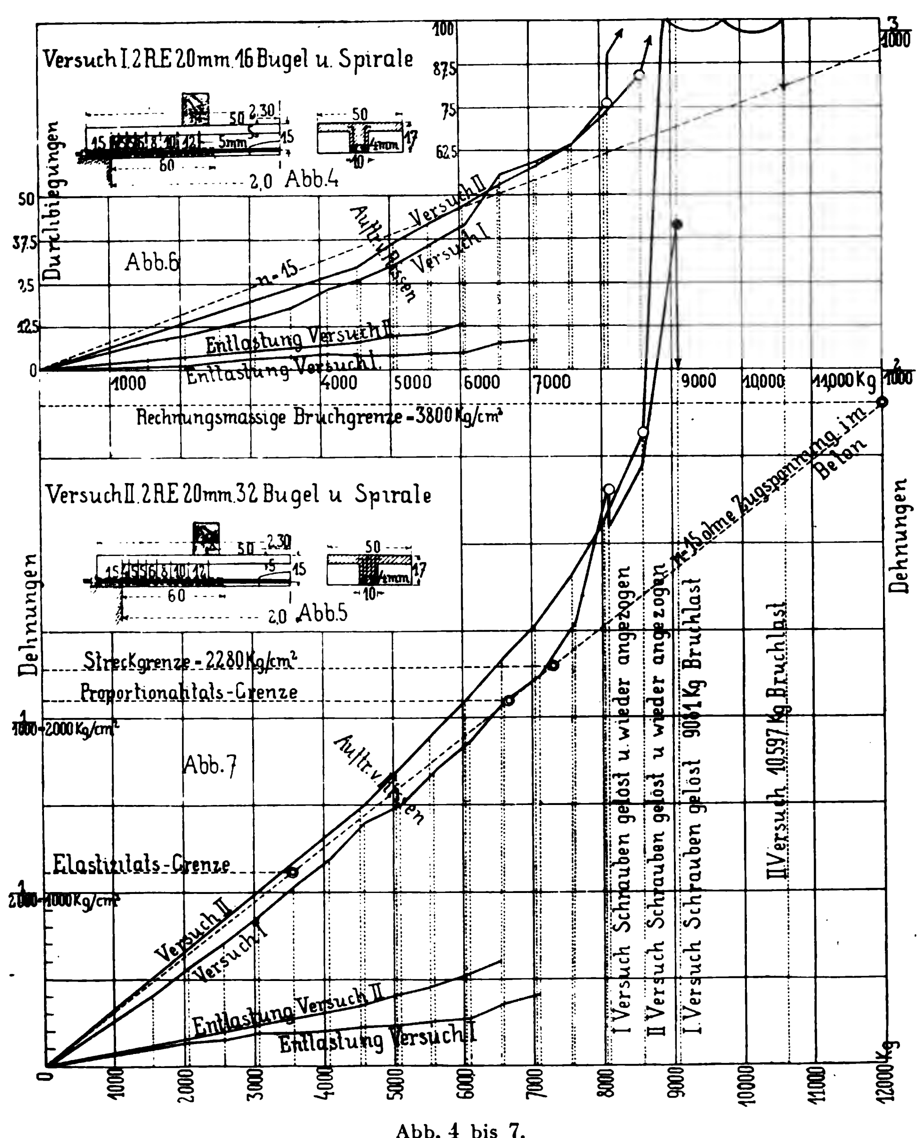


Abb. 4 bis 7.
Die Versuche I und II mit verschraubten Rundeisen.

außer einer Grimmschen Spirale aus 4 mm-Draht einmal im Versuch I je 8 einfache und in dem Versuch II je 8 Doppelbügel aus 5 mm-Draht gelegt, also anscheinend nach dem heutigen Stande unserer Wissenschaft Vorkehrungen getroffen, die die Verschraubung überflüssig machen sollte. Da es Zweck dieser Versuche ist, die Richtigkeit bezw. die Grenze dieser Voraussetzungen zu prüfen, so mußten alle Einzelheiten so gewählt werden, daß

eine Ueberschreitung nach dieser Richtung trotzdem warscheinlich wird und auch eingetreten ist.

Betrachten wir den Verlauf der beiden Kurven in Abb. 6 und 7, so sind darin 2 Bruchpunkte auffällig, der eine zusammenfallend mit Rißerscheinungen, der jedoch nur in der Durchbiegungskurve ersichtlich ist und uns die Erreichung der Proportionalitätsgrenze anzeigt. Wenn dieser Bruch in der Dehnungskurve nicht ersichtlich ist, so ist dies wohl darauf zurückzuführen, daß dort bereits Bewegungen des Eisens innerhalb des Betons auftreten, die die Dehnungen herabmindern. Es dürften dies Bewegungen sein, die die Enden der Rundeisen nicht erreichen, sondern nur die Dehnungen auf längere Strecken ausgleichen. Diese Erscheinung wird besonders ersichtlich, wenn man, wie dies mittels der Gisshammerschen Bügel geschehen ist, das Eisen nicht nur wie hier an den beiden Enden, sondern auch an Zwischenpunkten in zweifelloser Weise Eisen zu Eisen befestigt und so die Ausgleichsbewegungen wirksamer hindert, als dies Bügel allein zu tun imstande sind. Es tritt dann ein am Dehnungsmesser wahrnehmbares Schwanken der Dehnungen ein, die zeigen, in welchem Belastungsstadium ein Nachlassen im Verbund und dann ein neuerliches Verbeißen dieses Befestigungsmittels wirksam wird, und ist dies dort lange vordem durch völliges Ueberwinden der Adhäsion ersichtlich gewesen. Hier bei den vorliegenden 2 Versuchen, bei denen 2 glatte R.-E. mit gewöhnlichen Bügeln — die Grimmsche Spirale hat eine ähnliche Wirkung, die aber nur mit Thacher-Eisen voll zur Geltung kommt —, war auf so ein Festhalten nicht zu rechnen. Es handelte sich also darum, den Versuch soweit zu treiben, bis die Bewegung die durch die Bügel geförderte Haftung soweit überwunden hat, daß die Stabenden in Bewegung kommen. Mit entsprechenden Apparaten ließe sich dies in Laboratorien direkt verfolgen. Ich bin natürlich bei der feldmäßigen Durchführung und den bescheidenen Mitteln auf mein Gefühl angewiesen gewesen und danke es mehr dem Zufall, daß die Versuche etwas, wie ich glaube nicht Unwesentliches ergeben haben.

Versuch I (Abb. 4), alt 104 Tage,

betoniert am 21. Dezember 1905 (1 : 3), erprobt am 5. April 1906.
Abb. 8 zeigt die sonst immer gleichbleibende Belastungsanordnung,
Abb. 9 die Anbringung der Dehnungsmesser an den Rundeisen.

Die Belastung wurde in der in dem Schaubild angegebenen Weise unter stetiger Entlastung auf Null bis 8081 kg getrieben; die der Entlastung entsprechende Dehnung bezw. Durchbiegung ist der besseren Deutlichkeit wegen nicht auf der Nullordinate, sondern unter der jeweiligen Last eingetragen, soweit dies verfolgt wurde. Bei der Last von 8081 kg wurden die 4 Schrauben an beiden Enden gelüftet. Wie ersichtlich, hatte dies eine sofortige Bewegung des Eisens im Beton zur Folge, die sich durch

eine gleichzeitig meßbare Verminderung der Dehnung und Vermehrung der Durchbiegungen äußert, bis sich das Eisen neuerdings im Beton festgesetzt hat. Nun wurden die Schrauben angezogen und die Belastung bis 9081 kg fortgesetzt. Hier führte das neuerliche Lüften der Schrauben zu einem derartigen langsamen Senken der Träger, daß dieselben als gebrochen anzu-

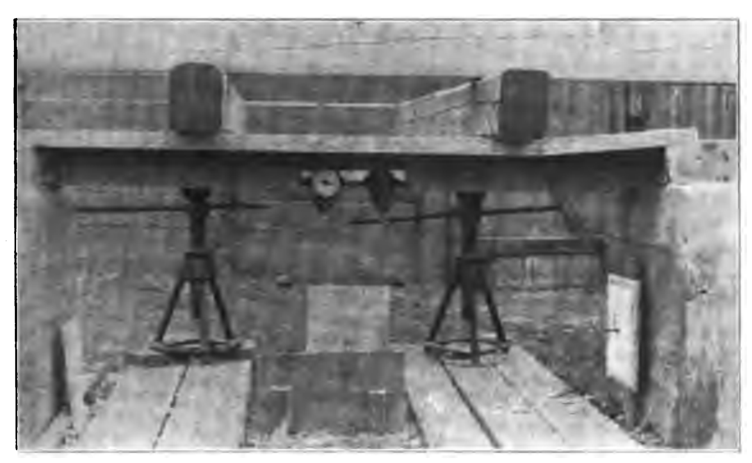


Abb. 8. Belastungsanordnung.



Abb. 9. Befestigung der Dehnungsmesser.

sehen waren. Die Last hat also genügt, um die Reibung bei der Bewegung des Eisens im Beton ganz zu überwinden.

Es entsprach dies einer rechnungsmäßigen Haftspannung von

$$K = \frac{P + G}{2\,m\,U} = 28{,}4 \text{ kg/cm}^2 \text{ oder einer Scherspannung } \tau = 35{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Versuch II (Abb. 5), alt 70 Tage,

betoniert am 25. Januar 1906 (1 : 3), erprobt am 5. April 1906.

Hier wurde mit Rücksicht auf die noch bessere Bügelarmierung die erste Lüftung bei 8575 kg vorgenommen, und zwar ohne jeden Einfluß auf die Eisen in der Mitte. Es muß also geschlossen werden, daß bei derselben die Haftfestigkeit noch nicht soweit überwunden war, um einen Zusammen-

hang zwischen Mitte und Ende der Rundeisen herzustellen. Ein zweites Lüften der Schrauben wurde zwar versucht, doch hatten diese sich bereits derart durch Hineinziehen festgebissen, daß es nicht möglich war, sie loszubekommen, und ging der Träger bei 10597 kg durch Hineinpressen des 8 mm-Bleches — und das ist der Unterschied, auf den ich als Kennzeichen einer derartigen Armatur Wert lege — mit einem langsamen Bruch zugrunde, der bei einer solchen Konstruktion uns in jeder Hinsicht vor Ueberraschungen sichert. — Balken mit plötzlichem Bruch sehe ich, selbst wenn sie hohe Lasten erzielen, für gefährlich an. Es muß Aufgabe des Konstrukteurs sein, diese Bruchform auszuschließen und überall langsamen Bruch zu erzielen.

Vorliegende Versuche geben uns auch Aufschlüsse über die Berechtigung der heute so ziemlich allgemein angewendeten Rechnung, wie sie den deutschen Vorschriften zugrunde liegt. Es findet sich dort gleichzeitig mit den tatsächlich beobachteten Dehnungen auch jene Linie eingezeichnet, wie sie dieser Rechnung zugrunde liegt, wobei

$$\frac{\varDelta}{l} = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{M}{W_e E} = \frac{Q l}{8 F_e m E}$$

ist. Es ist

$$\frac{\varDelta \text{ mm}}{1000} = \frac{1000 \times 1000\, Q^t \times 200}{8 \times 6{,}28 \times 13{,}05 \times 2\,000\,000}, \quad \text{daher } \frac{\varDelta \text{ mm}}{1000} = 153\, Q^t.$$

Ferner, da $\sigma_e = \frac{\varDelta E}{2}$ ist, so entspricht jedem $\frac{\varDelta \text{ mm}}{1000}$ f. 1 m $\sigma_e = 200$ kg/cm² oder $\sigma_e = 306\, Q^t$.

Diese theoretische Gerade findet sich in Abb. 7 für $n = 15$ ohne Zugwirkung im Beton eingezeichnet vor, und ist dort außerdem sowohl die Proportionalität wie die Streck- und Bruchgrenze eingetragen worden. Die Uebereinstimmung zwischen dem direkten Versuch in der Festigkeitsmaschine und der Beobachtung am Balken und der dabei verwendeten Näherungsrechnung ist eine derartige, daß man umgekehrt aus der Beobachtung am Balken die Streckgrenze bestimmen könnte. Es ist also möglich, mittels dieser Rechnung, **sofern die Eisen entsprechend fest am Beton befestigt sind,** das Eintreten der Streckgrenze vorauszubestimmen.

Weiteres geht aus dem Versuch hervor, daß das Eintreten der Streckgrenze den Balken nicht zerstört hat. Die Höhe der Ueberschreitung der Streckgrenze hängt ohne Zweifel aber auch von der Art der Befestigung und, wie bei jedem andern Material, der Dauer bezw. der Wiederholung der Belastung ab. Trotzdem aber scheint es aus denselben Gründen erlaubt, aus denen man sonst die Sicherheit auf die Bruchfestigkeit bezieht, das auch hier zu tun, unter entsprechender Berücksichtigung des Abstandes der zulässigen Eisenspannung von der Streckgrenze. Meines Wissens ist dieser experimentelle Nachweis vorher noch nie so präzis gegeben worden.

Schließlich geht aus dem Versuche hervor, daß sich die Streckgrenze — wenigstens in diesen zwei Fällen — nicht gleich bis zum Auflager fortgepflanzt hat, also, allgemein gesprochen, bei entsprechender Befestigung im Beton nicht fortpflanzen muß. Es bestätigt dies neuerdings meine frühere Beobachtung, daß die Erscheinungen an den Enden zu klein sind, um in den früheren Stadien meßbar zu sein, was umgekehrt den Wert einer Befestigung daselbst (Haken u. a.) fraglich erscheinen läßt. — Der Einfluß, den die bessere Befestigung auf die Dehnungsgröße nimmt, ist ersichtlich aus der Vergleichung der Dehnungsschaubilder von verschiedenartig befestigten Eisen. Die hier vorliegende gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung muß verschwinden, wenn das Eisen im Beton rutschen oder auf kleineren Strecken seine Dehnung ausgleichen kann. Leider gibt es eine Reihe von Nebeneinflüssen, die einen klaren Einblick trüben. Abgesehen von Fehlern der Messung und Beobachtung, kommen hier in Frage Anfangsspannungen, die erwähnte Zugwirkung des Betons und insbesondere lokale Maxima innerhalb der gemessenen Strecke, herrührend von einem Knick in der gesamten elastischen Durchbiegungslinie des Balkens im Zusammenhang mit den auftretenden Rissen, so auch beim Versuch von Guidi, oder mit anderen Unregelmäßigkeiten im Material, Lage und Abmessungen der Eisen. Dieselben können natürlich — bei den an und für sich kleinen Aenderungen — dazu führen, daß die Messungen selbst einen größeren Wert ergeben, als die Theorie voraussetzt.

Es geht aus allen diesen Gründen nicht an, ohne wiederholte Bestätigung weitergehende Schlüsse zu ziehen. Man kann sich aber doch ein Bild über die dabei in Frage kommenden Größen bilden, wenn man das Schaubild der Dehnungen (Abb. 7) mit dem unter ähnlichen Verhältnissen gewonnenen (Abb. 14) vergleicht. Es handelt sich dabei um einen Unterschied von 1/4000 mm Dehnung f. 1 lfd. m. Dieser Unterschied in beiden Fällen stellt sich schon früh, etwa bei $\sigma_e = 300$ kg/cm² ($Q = 2000$ kg) ein, dann aber bleibt er sich gleich. Hier ist es also nur ein Anziehen bei der ersten Belastung. Anders ist es bei $Q = 6000$ kg, wo in beiden Fällen die ersten Risse bereits eingetreten sind und $\sigma_e = 1500$ kg ist. Während gut befestigte Eisen die damit verbundene Folgeerscheinungen überdauerten, führten dieselben sonst zum Herausziehen der Eisen, entsprechend zunehmenden Durchbiegungen, und zum Bruch.

Versuchsserie A (Abb. 10 bis 28).

Alle Probebalken haben, wie bereits erwähnt, eine Spannweite $l = 2$ m, eine Breite $b = 50$ cm, so daß die belastete Fläche genau einen Quadratmeter beträgt. Sie haben ferner $h = 15$ cm als nutzbare Höhe. Das ist der einzige Punkt, der vom Standpunkte der Praxis zur Kritik der gewählten Abmessungen herausfordert. Das Verhältnis $\frac{l}{h} = 13{,}3$ ist kein sehr häufiges.

Es entspricht den in der Praxis durchschnittlich üblichen Verhältnissen nicht und kommt dort nur ausnahmsweise vor. Es wäre also später noch der Nachweis zu erbringen, daß z. B. bei derselben Höhe und 3 bezw. 4 m Spannweite dieselben Erscheinungen eintreten usw. Für meine Wahl war außer ökonomischen Gründen abermals der Grundsatz maßgebend, einen extremen Fall zu schaffen, der die Erscheinung deutlicher zur Beobachtung bringt. Einem niedrigeren Balken würde ein kleineres K entsprochen haben. Es muß dies ausdrücklich betont werden, weil das hier gezeigte nur als ein beabsichtigtes Extrem Geltung hat. Der Eisenquerschnitt betrug hier, wie fast immer, $F_e = 6{,}28$ cm² und bestand in dieser Serie aus 2 Rundeisen, 20 mm. Es entspricht dies 0,7 vH. Armatur; die Stärke der oberen Platte betrug 6 cm, so daß die neutrale Achse nicht außerhalb zu liegen kam.

Es ist $f_e = 0{,}1256$ und $nf_e = 1{,}88$,

$$x = -nf_e + \sqrt{nf_e(rd + nf_e)} = 5{,}86,\ y = 9{,}14 \text{ u. } m = h - \frac{x}{3} = 13{,}05 \text{ cm};$$

es ergibt dies ferner:

$$W_e = 6{,}28 \times 13{,}05 = 82, \quad \text{demnach für } \sigma_e = 1000$$

$$M = 82\,000 = \frac{Ql}{8} = 25\,Q \quad \text{und} \quad Q = 3280 \text{ kg}$$

bezw. für ein rechnungsmäßiges Erreichen der Zuggrenze im Eisen 11 808 kg, wobei eine Zugfestigkeit von 3600 kg/cm² als wirksam vorausgesetzt ist, wie es bei dem Material in Serie A durchschnittlich vorhanden war.

Es ist
$$W_b = \frac{5{,}86}{2} \times 13{,}5 \times 50 = 1978.$$

Die oben berechnete Last für $\sigma_e = 1000$ kg/cm² entspricht somit

$$\sigma_b = \frac{82\,000}{1970} = 41 \text{ kg/cm}^2 \text{ bezw. } 4 \times 41 = 164 \text{ kg/cm}^2$$

Druck in Biegung oder etwa die Hälfte als Würfelfestigkeit des Betons als Bedingung, um unsere Versuche nicht vorzeitig zu zerstören. Der Umstand, daß die Rechnung auf Biegung eine Ziffer im Druck ergibt, die nicht mit der Würfelfestigkeit direkt verglichen werden kann, ist ja hinreichend bekannt. Ich werde später auf meinen Vorschlag einer Abänderung in der Näherungsrechnung mit ein paar Worten zurückkommen, der auch bei dieser Materialeigenschaft eine direkte Beziehung zwischen Rechnung und Materialprobe herstellen soll.

Nach demselben wäre $m' = d - \frac{x}{2} = 12{,}07$,

$W_b' = 5{,}86 \times 50 \times 12{,}07 = 3536$,

$W_e' = 6{,}28 \times 12{,}07 = 76$, also wie oben $\sigma_b' = \frac{76\,000}{3536} = 22$ kg/cm²,

dem also im äußersten Fall bei 4facher Sicherheit und voller Ausnutzung des Eisens 88 kg/cm² Würfelfestigkeit zur Verfügung stehen müßte, um nicht den Bruch durch Druckerscheinungen zu beeinflussen. Die erstgenannte für volle

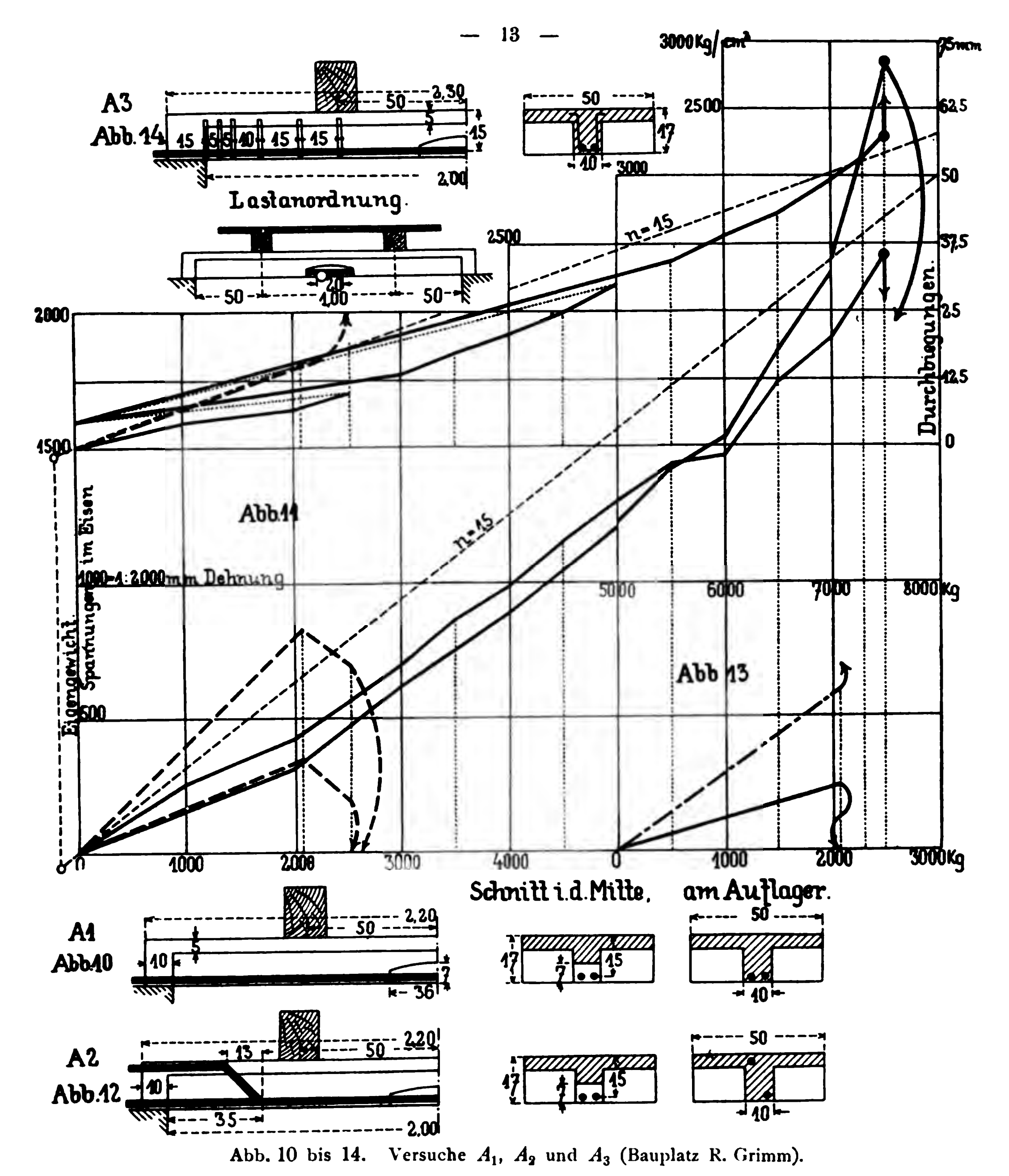


Abb. 10 bis 14. Versuche A_1, A_2 und A_3 (Bauplatz R. Grimm).

Ausnutzung des Eisens $\frac{4000}{4}$ zulässige Last entspricht einer maximalen Querkraft von $V = 1640$ kg, einer gesamten Schubkraft von $S = \frac{1640}{13,05}$ $= 125$ kg/cm, 2 R.-E. 20 mm haben $U = 12,56$. Es ist als $K = \frac{125}{12,56}$ $= 10$ kg/cm² und bei der Stegbreite von 10 cm die Scherspannung $\tau = \frac{125}{10}$ $= 12,5$ kg/cm². Ich habe nun im III. Hefte der Forscherarbeiten auf dem

Gebiete des Eisenbetons für die Haftfestigkeit des Eisens in dem gewöhnlichen Balken 16 kg/cm² als eine immer erreichbare Zahl hingestellt bezw. 4 kg als zulässig bezeichnet. Demnach würde also in unserm Falle die Last von $3280 \times 1,6 = 5848$ kg als jene Zahl entsprechen, wo bei der grundlegenden Annahme von 4 kg/cm² als zulässige Haftfestigkeit hierfür der Beweis einer 4fachen Sicherheit erbracht worden ist. Wie wir aus folgendem entnehmen, hat diese Annahme auch bei allen vorliegenden Versuchen zugetroffen, **wo die hinreichende Zahl Bügel verwendet wurden, ebenso auch bei symmetrisch abgebogenen Eisen** im Versuch B_3. Wir sehen also, daß selbst diese als zu niedrig bezeichnete Zahl der Haftfestigkeit nicht so ohne weiteres angenommen werden kann, daß sie vielmehr an diesen Vorkehrungen gebunden ist.

Versuch A_1 (Abb. 10), 108 Tage alt,
betoniert am 1. Juli 1905 (1 : 4), erprobt am 16. Oktober 1905.

Enthält zwei gerade glatte Rundeisen ohne Bügel. Das Schaubild der Durchbiegungen und Dehnungen der beiden Eisen (strichliert) aus Abb. 11 ersichtlich. Schon bei 2000 kg trat ein Rutschen der Eisen im Beton ein. Bruchlast 2580 kg.

Es entspricht dies einer Haftspannung von 5,8 kg/cm² im Durchschnitt für beide Eisen. Besonders auffällig ist die große Abweichung der Dehnung der beiden Eisen mit Bezug auf ihre gleichzeitige Größe, sowie das bedeutende Voreilen des einen Eisens, so daß die Dehnungen bezw. die zugeordnete Zug- und Haftspannung sich zwischen den Grenzen von 350 bezw. 3,5 kg/cm² und 850 bezw. 8,5 kg/cm² bewegen, welcher Umstand — durch das Fehlen der Bügel ermöglicht — mit als Bruchursache anzusehen ist.

Ich verweise auf die Uebereinstimmung dieses Versuches mit dem Versuch I von Prof. Mörsch[5]) mit $K = 5,6$ kg/cm², trotzdem sich dort von den 3 Rundeisen nur eins ganz durchgeführt vorfindet, man also dabei rechnungsmäßig eine Haftfestigkeit von 16,8 kg/cm² annehmen kann.

Versuch A_2 (Abb. 12), 108 Tage alt,
betoniert am 1. Juli 1905 (1 : 4), erprobt am 16. Oktober 1905.

Eines der 2 Eisen ist gerade, das andere abgebogen, sonst gleich wie A_1. Diese Anordnung ergab den schlechtesten Versuch in der ganzen Arbeit. Wie aus der Abb. 13 ersichtlich, wurde schon bei der Belastung von 2000 kg das gerade Eisen herausgezogen, und ist seine Dehnung auf Null herabgesunken, während das gebogene Eisen dafür eine schwache Vermehrung der Dehnung erfuhr. Wegen der Unsymmetrie der Querschnitte führte dies zu einer Verdrehung, als deren nächste Folge eine Sprengung des umhüllten Betons und Bruch des Trägers war. Vergleiche diesbezüglich die analogen Versuche B_1 und B_2 weiter unten sowie Abb 13.

[5]) Forscherarbeiten a. d. Gebiete d. Eisenbetons, Heft III, Seite 8, oder Der Betoneisenbau von Mörsch, Seite 127.

Versuch A_3 (Abb. 14), 89 Tage alt,

betoniert am 25. Oktober 1905 (1 : 4), erprobt am 22. Januar 1906.

Enthält 2 glatte gerade R.-E. 20 mm und je 6 einfache Bügel über beide Eisen aus 5 mm-Draht. Die Armierung geschah auf Grund folgender Rechnung:

Die gesamte Scherkraft 125 × 50 . . . . = 6250 kg.
Nun ist bei Beton zulässig 4,5 × 10 × 50 . . . . . = 2260 „ .
Rest 4000 kg.

Dem entspricht $\frac{4000}{800} = 5$ cm² Eisenquerschnitt der Bügel.

Ein Bügel aus 5 mm-Draht (2 Aeste) hat 0,4 cm² Querschnitt. Es verlangt dies also 12 Bügel beiderseits, anstatt, wie vorgesehen, 6. Obiger Versuch hat also die Hälfte dessen, was als nötig angesehen wird.

Derselbe ergab (Abb. 11 die beiden voll ausgezogenen Linien), verglichen mit A_1, zunächst eine auffällige Gleichmäßigkeit in den nachgewiesenen Dehnungen der beiden Eisen. Selbst bei Bruch bestand der Unterschied nicht viel über 10 vH. In das Diagramm sind, wie sonst wiederholt, um das Ansteigen zu verdeutlichen, einzelne Zwischenstationen der Neubelastung von der Nullast an eingezeichnet. Umstehend eine genaue Aufzeichnung der Beobachtungen.

Bei 5509 kg zeigten sich — genau wie in den Versuchen I und II — die ersten Risse, und bei 7296 + 190 (Eigengewicht) = 7486 kg trat Bruch ein durch Herausziehen beidei Eisen, und zwar, soweit ersichtlich, nahezu gleichzeitig. Es entspricht dies 23 kg/cm² Haftfestigkeit. Zu der in Abb. 8 ersichtlichen Bruchform wäre noch zu bemerken, daß sie durch eine nicht ganz symmetrische Belastung beschleunigt wurde. Die Scherfestigkeit des Betons wurde durch die Bügel bis 28,8 kg/cm² erhöht. Es muß hier, wie so häufig, eine offene Frage bleiben, welche der beiden Festigkeiten, ob Haft- oder Scherfestigkeit, Bruchursache gewesen sind.[6]) Ich halte das Resultat für ein Produkt der Wechselwirkung, ausgehend von dem Herausziehen der Eisen, die den Anstoß zur Zerstörung gaben.

Ehe wir diese Versuche mit Rundeisen fortsetzen, seien einige Versuche mit Thachereisen eingefügt. Durch das Entgegenkommen des Herrn Kestranek, Direktor der Prager Eisenindustrie, der Walzen zu diesem Zweck anfertigen ließ, in den Besitz von 19 mm-Rundeisen gelangt, die im warmen Zustande als Thachereisen abgeplattet waren, habe ich eine Reihe von Parallelversuchen eingeschaltet, ohne dieselben aber in der Weise wie gewollt zum Abschluß bringen zu können. Der beabsichtigte Vorgang ist derselbe wie bei den im III. Forscherheft Seite 17, Abb. 40 erwähnten Ver-

---

[6]) Siehe diesbezüglich die Artikelserie: Die Bruchursachen der betoneisernen Balken „B. u. E." 1905 Heft VIII S. 195, IX S. 226, X S. 253, XI S. 279 von Prof. v. Thullie als Erwiderung auf Heft III der Forscherarbeiten.

A_3.

Zuschlags-gewicht	Gesamtlast	Durch-biegung in der Mitte	Setzung in den Wider-lagern I.	II.	Dehnungen in den beiden R.-E. umgerechnet in kg/mm²	
—	1003	0,5	0,1	0,1	19	26
Entlastung	—	0,0	0,0	0,0	11	11
1000	2003	0,8	0,1	0,1	32	42
Entlastung	—	0,2	0,0	0,0	14	14
502	2505	1,2	0,2	0,2	46	56
Entlastung	—	0,3	0,1	0,1	18	16
504	3009	1,6	0,2	0,3	62	70
Entlastung	—	0,4	0,1	0,1	22	18
500	3509	2,1	0,3	0,4	76	88
Entlastung	—	0,5	0,1	0,3	23	20
500	4009	2,5	0,4	0,4	90	102
Entlastung	—	0,6	0,1	0,4	26	22
500	4509	3,0	0,5	0,5	106	118
Entlastung	—	0,7	0,2	0,5	31	25
500	5009	3,5	0,5	0,5	124	132
Entlastung	—	0,8	0,2	0,5	39	26
500	5509	4,0	0,6	0,5	144	146
Entlastung	—	0,9	0,2	0,6	46	28*)
500	6009	4,5	0,6	0,6	165	160
Entlastung	—	1,0	0,2	0,7	56	31
500	6509	5,0	0,7	0,7	188	176
Entlastung	—	1,2	0,2	0,7	66	36
405	6914	5,7	0,7	0,8	220	192
382	7296	6,1	0,7	1,0	262	210

*) Sichtbare Risse.

suchen mit Thachereisen, und sei auf diese Resultate hier kurz aufmerksam gemacht. Dieselben sind hier einerseits wegen ihrer Analogie und dann deshalb mitgeteilt, um zu zeigen, daß mit dem Ausschalten der Haftspannung allein noch nicht alles getan ist, daß man auch mit der Scherfestigkeit des Betons rechnen muß, und daß es zur Erreichung dieses Zweckes auch der Wahl der richtigen Bügelform bedarf, die tunlichst beiden Festigkeiten dient.

Das zu den Thachereisen verwendete Eisen scheint etwas besser gewesen zu sein, als das bei den übrigen Versuchen der Serie A verwendete, da es laut dem anfolgenden Prüfungszeugnis etwa 3250 kg/cm² als Streckgrenze und 4000 kg/cm² als Bruchgrenze ergab. Bemerkenswert ist die große Ungleichmäßigkeit der Eisenverteilung in dem Querschnitt der Knoten im abgeplatteten Teile, so zwar, daß das Thachereisen, aus 19 m Rundeisen hergestellt, an den Uebergangsstellen schwache Stellen zeigte, die 26 mm breit, 10,2 mm hoch einem runden Querschnitt von 17,5 mm Eisen entsprachen, was wohl mit

der anfänglichen Ungeübtheit beim Walzen sich erklären lassen dürfte. Prof. Kirsch fand denn auch bei Beobachtung der Dehnungen in den Knoten 4 vH., in den schwachen Flachteilen 10 vH. Dehnung, und als Mittel zweier Versuche 7,79 t als Streck- und 9,65 t als Bruchgrenze mit fehlerfreiem Flußeisenbruch an einem Querschnittsübergange.

Wir müssen daher für diesen abweichenden Querschnitt unsere Rechnung wiederholen und finden

$$F_e = 4{,}8 \text{ cm}^2, \quad f_e = 0{,}96, \quad nf_e = 1{,}44, \quad x = 5{,}3, \quad y = 9{,}7, \quad m = 13{,}2 \text{ cm},$$
$$W_e = 4{,}8 \times 13{,}2 = 63{,}5.$$

Es ist dann für $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

$M = 63{,}500 = 25 Q$ und $Q = 2540$ für $\sigma_e = 4000$, entsprechend einer Bruchlast von 10 160 kg.

Diese Last hat $V = 5080$ kg und erfordert eine Scherspannung

$$K = \frac{5080}{13{,}2 \times 10} = 38 \text{ kg/cm}^2.$$

Die theoretische Dehnung ohne Berücksichtigung der Knotenverstärkung ist

$$\varDelta = \frac{2\,000\,000\, P^t\, 1000}{8 \times 4{,}8 \times 13{,}2 \times 2\,000\,000} = 194\, Q^t, \quad \text{bezw.} \quad \sigma_e = 388\, Q^t$$

Die Durchbiegung betrage nach der Theorie

$$f = \frac{11\, P l^3}{768\, E J},$$

also im ersten Fall (siehe die Eintragung in Abb. 11)

$$f = \frac{11\;\; 80\,000\,000}{768 \times 2\,000\,000 \times 82 \times 9{,}14} = 0{,}76\, P^t,$$

im vorliegenden Fall (siehe Abb. 16 u. 19)

$$f = \frac{11 \times 80\,000\,000}{768 \times 2\,000\,000 \times 63{,}5 \times 9{,}7} = 0{,}81\, P^t,$$

die sich dort eingezeichnet vorfinden.

Versuch A_4 (Abb. 15), 108 Tage alt,

betoniert am 1. Juli 1905 (1 : 4), erprobt 16. Oktober 1905.

Enthält 2 Thachereisen. Auch hier erfolgt, wie Abb. 16 zeigt, bei 2580 kg ein Spannungsabfall. Bei der nächsten Belastungsstufe reißt sich das eine Eisen heraus, während das andere sich — ähnlich wie beim abgebogenen Eisen in A_2 — etwas in der Spannung hebt, ohne jedoch den Bruch aufhalten zu können.

Versuch A_5 (Abb. 17), 108 Tage alt,

betoniert am 1. Juli 1905 (1 : 4), erpropt 16. Oktober 1905.

Enthält 2 T.-E. 17,5 mm eines abgebogenen, sonst wie A_4. Die Erscheinungen sind analog mit A_2. Hier, wie in allen Versuchen ohne Bügel,

zeigt sich ein großer Unterschied bei den Dehnungen des Eisens (Abb. 18). Bei 2508 kg Herausreißen des geraden Eisens und Spannnungszunahme des abgebogenen. Bemerkenswert ist der Vergleich zwischen A_2 und A_4 mit bezug auf den Umstand, daß im ersten Falle das abgebogene und im zweiten Falle das gerade es war, das anfangs mehr Spannung hatte, und erst beim Herausziehen des geraden der Ausgleich erfolgte. Dies, sowie die Versuche I und II beweisen, daß alle Vorkehrungen in den Widerlagern auf den Spannungsverlauf

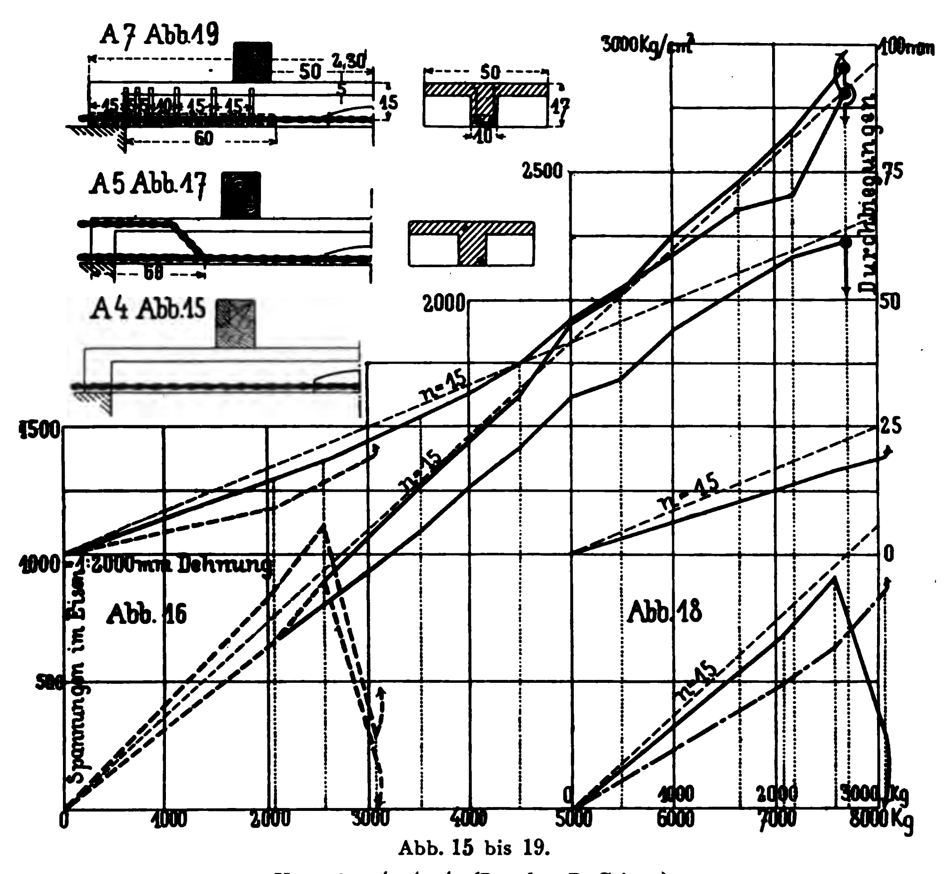


Abb. 15 bis 19.
Versuche A_4 A_5 A_6 (Bauplatz R. Grimm).

bis hoch hinauf über die Streckgrenze keinen Einfluß üben. Siehe diesbezüglich die Versuche Prof. Mörschs[5]) mit R.-E., das am Ende mit Hacken versehen war, und mit den damit im Zusammenhang auftretenden Rissen bei diesen Hacken, sobald das Eisen in Bewegung kommt, analog mit A_1 und A_4, wo eine andere Art der Befestigung dasselbe Resultat erzielt.

Mörsch hat hierbei eine insofern eigentümliche Art der Belastung angewendet, als er eine gleichmäßig über den mittleren Teil seiner Spannweite $5{,}06 - 2 \times 0{,}7 = 3{,}66$ m verteilte Last anbrachte. Diese Art der Belastung ist

[5]) „B. u. E." 1903, Heft IV, Seite 273 und III. Forscherheft Seite 8.

wissenschaftlich besonders empfehlenswert, weil sie eine Verspannung und Uebertragung der Last auf die Widerlager ausschließt. Trotzdem muß man mit bezug auf das früher Gesagte den Umstand einer möglichen ungleichmäßigen Verteilung in Betracht ziehen, wenn man den Vergleichswert der Versuche feststellen will. Doch selbst angenommen, daß die Last wirklich in dieser Strecke gleichförmig wirkt, so ist diese Lastanordnung im Lichte des Gesagten eine wesentliche Verschärfung der Probe, da das Maximum der Scherkraft sich auf die je 0,7 m breite Strecke zwischen Lastende und Widerlager beiderseits verteilt. Man hätte also eine höhere Bruchlast durch eine über die ganze Spannweite und nicht nur über die Mitte gleichmäßig verteilte Last erzielen können, wenn Mörsch seine Versuche weniger wissenschaftlich eingerichtet hätte. Diese Erhöhung hätte wohl nicht 50 vH. betragen können, schon mit Rüchsicht auf andere Umstände. Abträglich kommt ferner für Objekt IV noch die nicht ganz symmetrische Abbiegung der 2 Eisen in Betracht, so daß die vorhandenen Ausfälle gegen die rechnungsmäßige Bruchlast, der eine maximale Haftfestigkeit von 13 kg/cm² entspricht, mehr als nötig erklärt erscheinen. Interessant ist ferner, daß Prof. Mörsch auch damals schon schiefe Bügel — freilich ohne Einkerbungen — untersucht hat. Seine Beobachtung darüber, daß die Eisen in den Bügeln rutschen, sei hier besonders hervorgehoben als Bestätigung des Eingreifens der besseren Verbindung. Bezüglich der Berechnung der auftretenden Haftspannung bestehen zwischen mir und Prof. Mörsch abweichende Anschauungen, weil ich, um einen Vergleichsmaßstab für die erzielten Effekte zu schaffen, alle Objekte, ob mit geraden oder abgebogenen Eisen, gleich berechne und über die tatsächliche Richtigkeit abweichender Rechnungsmethode und der Kraftverteilung an abgebogenen Eisen Zweifel hege, da ich die denselben zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht für einwandfrei ansehe. Jedenfalls sind die Versuche Prof. Mörschs die ersten ihrer Art und verdienen in jeder Hinsicht die größte Anerkennung. — Näheres siehe in der 2. Auflage von Prof. Mörsch „Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", Seite 127 bis 135. Bei Objekt I, ohne Bügel, mit nicht ganz durchgehenden Eisen derart, daß von den 3 Rundeisen 24 mm nur eines bis an das Auflager reicht, berechnet Prof. Mörsch die Haftfestigkeit bei Bruch mit

$$K = \frac{8614}{\pi \times 2{,}4 \times m} = 16 \text{ kg/cm}^2,$$

während ich, ohne Rücksicht auf diesen Umstand zu nehmen, auch hier

$$K = \frac{8614}{3\,\pi \times 2{,}4 \times m} = 5{,}3 \text{ kg/cm}^2$$ setze, weil ich glaubte,

daß auch die kürzeren Eisen als Anker wirken, jedenfalls nur so auf ihre Wirkung verglichen werden können.

Wie ersichtlich, stimmt aber dieser mein Maßstab mit Versuch A_1 (5,8 kg/cm²) soweit überein, daß ich fast glauben darf, daß in diesem Fall die Verlängerung des Eisens auf seine Bruchlast ohne wesentlichen Einfluß

bleibt, da die dabei in Betracht kommenden Bruchursachen zusammenfallen. Dagegen tritt bei dem Objekt II von Mörsch, wo dieselbe Armatur mit Bügel vorgeführt wird, eine Erhöhung von 100 vH. auf. Es ist dies jedenfalls analog mit A_3, wo ich eine Erhöhung von fast 400 vH. nachgewiesen habe. Bei Objekt III von Mörsch, wo alle 3 Eisen durchgehen, kann aber die Richtigkeit meiner Rechnung mit $3\pi \times 2{,}4$ unmöglich bezweifelt werden, und ist es ungemein kennzeichnend, daß dieselbe trotz größerer Haftfläche eine niedrigere Last wie II ergeben hat. Bei Objekt IV waren die Eisen etwas unsymmetrisch abgebogen und fehlten auch die Bügel. Es ist also im Lichte des Gesagten vollständig erklärlich, warum nur 3270 kg/cm², anstatt die volle Ausnutzung des Eisens erreicht wurde, trotz niedriger Haftspannungen. Jedenfalls scheint aus diesen und anderen zur Genüge hervorzugehen, daß es nicht angeht, wenn z. B. von 3 Eisen 2 abgebogen sind und nur 1 durchgeht auf dasselbe das ganze V als Scherkraft zu rechnen, sondern nur $\frac{V}{3}$. Diese Kraft hat den Charakter eines Horizontalschubes eines Gewölbes mit dem Stich m und entspricht dem Momente M nach folgender Gleichung:

$$V = \frac{M}{m} = \frac{Ql}{8m}.$$

Es ist die Scherkraft $\frac{Q}{2m}$ auf $\frac{l}{4}$ gleichmäßig verteilt (Abb. 2) oder ansteigend auf $\frac{1}{2}\,\frac{l}{2}$. Wenn also seitens des Deutschen Betonvereins in den vorl. Leitsätzen eine solche Rechnung bei Angabe von 7,5 kg/cm² angegeben worden ist (siehe dort Beispiel: 2 Plattenbalken Abb. 6c), so ist dieselbe ebenso unrichtig wie diese zu hohe zulässige Grenze, wenn auch durch diese falsche Rechnung dieselbe in der Mehrzahl der Fälle auf eine annehmbare Ziffer herabgedrückt wird. Leider haben außerdem andere, weniger gründliche Versuche das Vertrauen zu der Notwendigkeit der Bügel erschüttert. Im Fache hat sich die Meinung immer mehr festgesetzt, daß Bügel nur zu der Verbindung der Platte mit dem Steg dienen, und daß abgebogene Eisen höchstens dort, wo ein Spannungswechsel eintritt oder die zulässige resp. die $4{,}5 \text{ kg} \times 4 = 18$ kg/cm²-Grenze überschritten werden soll, nötig sind.

Vorschub nach dieser Richtung haben ohne Zweifel die provisorischen, sonst so mustergültigen deutschen Normen gegeben, da diese die Frage offen lassen. Es ist diesbezüglich ganz richtig und wiederholt auf diese Lücke im Zentralblatt der Bauverwaltung aufmerksam gemacht worden. Wenn auch die meisten erfahrenen Praktiker sich dadurch nicht beirren ließen, so sind mir doch Fälle bekannt, wo sonst ganz hervorragende Firmen von dieser amtlich erlaubt gewordenen Ersparnis Gebrauch gemacht haben, und z. B. Bügel gar nicht oder erst nach dem Betonieren der Stege einschoben, die unten nicht um die Eisen herumgehen, also für die Erhöhung der Haftfestigkeit

wertlos sind. Ich hatte seinerzeit in 1904 — noch fußend auf das so illusorische Recht eines „beratenden" Mitgliedes — die Absicht, diese Frage beim Deutschen Betonverein aufzuwerfen. Es gibt jedenfalls Leute, die die Vorführung eines Experimentes in einer Fachversammlung, wo ein vorschriftsmäßig gebauter Balken unter dieser zulässigen Last einstürzt, für ein Unglück für das Fach ansehen, anstatt sich klar zu werden, daß da keine Vogel Strauß-Politik hilft. Wohin das führt, zeigt der Gedankengang, den Prof. Ramisch in „Zement u. Beton" vom 15. Juni 1906 ausführlich entwickelt, indem er die Belastungsgrenze bei Platten bestimmt, für welche Eiseneinlagen zur Aufhebung von Scherspannungen mit 4,5 kg/cm² zulässiger Spannung überhaupt nicht nötig sein sollen. Er gelangt dabei natürlich zu Nutzlasten, die jede Bügelarmierung überflüssig erscheinen lassen. Man darf nicht übersehen, daß sie mathematisch richtig ist. Dieser Beweisführung stehen sogar mehrfach Versuche zu Gebote über die Zwecklosigkeit der Bügel, wie sie insbesondere bei Amerikanern beliebt waren. In den Augen dieser immer in erster Linie praktisch denkenden Leute waren die „stirrups" etwas Unnützes und Kostspieliges. Sie waren auf ihre verschiedenen Spezialeisen besonders stolz, und es soll auch keinesfalls bezweifelt werden, daß dieselben etwa ganz vorzügliche sind, aber ein Ersatz für die Bügel sind dieselben, wie die vorliegenden Versuche beweisen, nicht. Ich kann nur von den bisher erprobten Eisen sprechen, von denen das Kahneisen dieser Bedingung bereits zu genügen versucht. Die Kahnschen Flügel erscheinen jedoch zu kurz, um die nötige Zugkraft zu übertragen. Siehe diesbezügliche Versuche in St. Paul, Versuch Nr. 10[6]). Vielleicht erweist sich das neue Golding- oder Muesereisen[7]) besser.

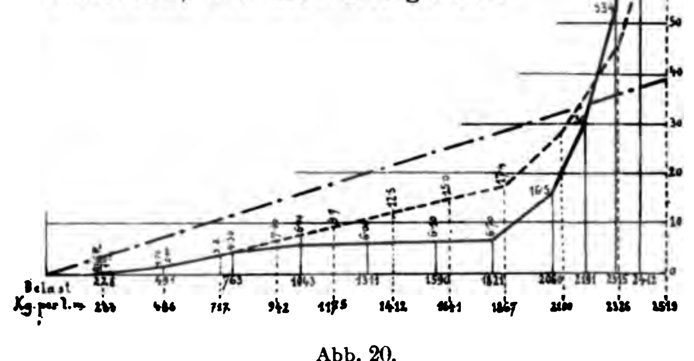


Abb. 20.
Versuche von Leonardi mit und ohne Bügel.

Von den neueren Versuchen, die zur Schlußfolgerung führen, daß Bügel eigentlich überflüssig wären, seien 2 Parallelversuche von Ingenieur F. Leonardi im „Il Cemento", Nr. 6, (Oktober) 1905, hier angeführt, um den

[6]) Siehe „B. u. E." 1906, Heft III, S. 67 und Zusammenstellung auf Seite 93.
[7]) Siehe Betonkalender 1907, Seite 141.

Wert dieser Argumente zu prüfen. Es sind dies hier, wie immer, Fälle, wo der Gebrauch von Bügeln keine statische Notwendigkeit ist und sie — da die Haft- und Scherfestigkeit nicht in Frage kommen — keinen Einfluß auf die Bruchlast haben, woraus freilich im „Il Cemento" vom Oktober v. J., Seite 162, der Fehlschluß über die Nutzlosigkeit der Bügel gezogen wird.

Leonardi hat zwei sonst gleiche Biegeversuche mit armierten Balken gemacht, den einen mit, den anderen ohne Bügel.

Dieselben hatten 21×46 cm Querschnitt und waren mit 3 geraden R.-E. 25 mm verstärkt. Sie hatten eine Spannweite von 7,0 m. Der Beton hatte 300 kg Zement auf 0,4 m³ Sand, 0,8 m³ Schotter (nahezu 1 : 6) und war 5 Monate alt.

Nach der ausgezeichneten Regel von Thumb zur raschen Bestimmung von Haftspannungen[8]) ist $\tau = 4 \frac{d^{mm}}{l^m} = \frac{4 \times 25}{7} = 14{,}3$ kg/cm² bei 4000 kg/cm² im Eisen. Wenn also im vorliegenden Fall das Eisen diese Grenze erreichen soll, so muß es diese Haftfestigkeit besitzen. Der etwa früher eingetretene Bruch, der einer Spannung im Eisen $\sigma_e = 3579$ und 3722 kg/cm², $\sigma_b = 105$ und 110 kg/cm² und $K = 12{,}7$ und 13,2 kg/cm² entspricht, läßt vermuten, daß, wie ich in anderen Fällen im Forscherheft III nachgewiesen habe, doch dies zusammen mit der Nähe der Zuggrenze zum Bruch geführt hat. Es erscheint auch am Bruchbild eine ganze Reihe starker Zugrisse im Beton, die sich nur auf diese zwei Umstände zurückführen lassen.

Die Scherspannung im Beton beträgt bei der gleichmäßig verteilten Bruchlast von 2410 bezw. 2519 kg für 1 lfd. m nur 11,6 bezw. 12,0 kg/cm². So konnte es kommen, daß durch eine geringe Schwankung in den sonstigen Eigenschaften in diesem Falle der Träger **mit** Bügel **weniger** Bruchlast zeigte als der Träger ohne Bügel. Ing. Leonardi beobachtet aber sehr richtig bei dem Träger mit Bügel eine verminderte Durchbiegung, die dann plötzlich anwächst (Abb 20). Es ist dies dieselbe Erscheinung, die ich bei jedem Hindernis gegen das Herausziehen der Eisen stets wiedergefunden habe, indem sich hier der Bügel als ein, wenn auch geringes Hindernis für das Rutschen der nicht genau kalibrierten Eisen im Beton erweist und solche Träger unter zulässigen Lasten kleinere Durchbiegungen ergeben.

Um sich da Klarheit zu schaffen, muß man sich die Versuche A_1 und A_4 und B_1 ohne Bügel, A_2, A_5, A_6 mit unsymmetrisch abgebogenen und B_3 bis B_5 mit symmetrisch abgebogenen Eisen in allen Einzelheiten gegenwärtig halten, im Entgegengehalt zu den bereits dargelegten und folgenden Versuchen mit Bügeln A_8, A_7 u. a. m.

[8]) Siehe „B. u. E." 1905, Heft II, Seite 42.

Versuch A_6 (Abb. 21), 108 Tage alt, mit 2 T.-E.
betoniert am 1. Juli 1905 (1 : 4), erprobt am 16. Oktober 1905.

Versuch armiert wie A_5. Es wurde nur das gerade Eisen mit einer Grimmschen 3 mm-Spirale umwunden, um die beiden Befestigungsmethoden nebeneinander zu untersuchen. Wie naheliegend, hat die Grimmsche Spirale dort geringen Wert, wo der so geschaffene Körper, der in seinem Zusammenhalt den bekannten umschnürten Würsten gleicht, sich als Ganzes aus dem Beton herausziehen kann, wenn also keine schiefen Bügel vorhanden sind, um ihn daran zu hindern bezw. den Betonsteg zu armieren. Hier lag dies nicht im Zweck des Versuches; der allein bezweckte, das Nebeneinander

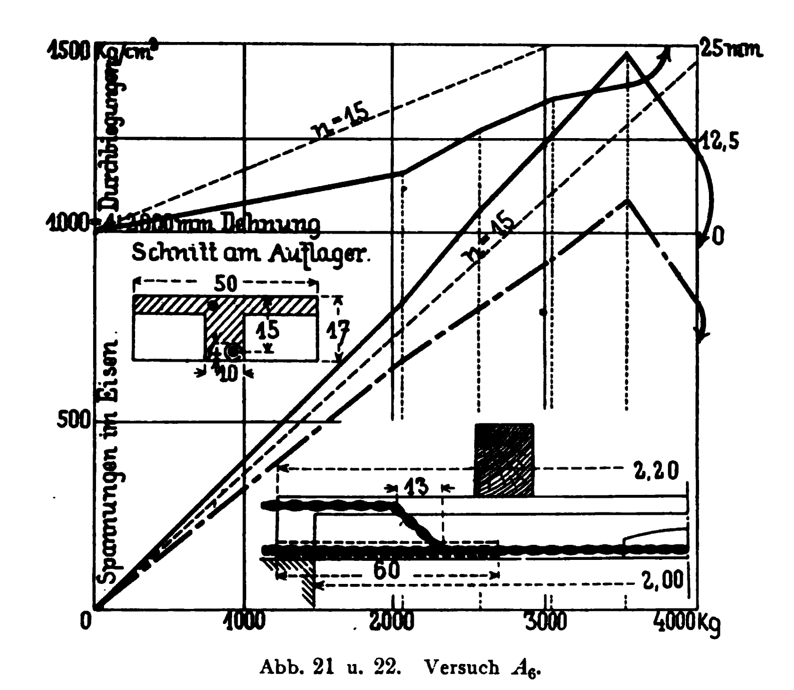


Abb. 21 u. 22. Versuch A_6.

beider Formen zu prüfen. Das Zusammenwirken der beiden Eisen scheint im vorliegenden, wie ein Hinweis auf A_2 und A_4 zeigt, sehr schwierigen Fall soweit gelungen zu sein, daß man (siehe Abb. 22) die Belastung auf 3580 erhöhen konnte, bevor die Eisen gleichmäßig nachgaben. Daß aber erst bei einer weiteren Erhöhung auf 4000 kg Brucherscheinungen sich zeigten, die aber den Balken soweit elastisch ließen, daß er bei einer Entlastung nur eine geringe bleibende Durchbiegung gezeigt hat. Es beweist, daß diese Verwendung der Grimmschen Spirale im Zusammenhang mit dem abgebogenen Eisen wertvoll ist und durch Versuche weiter zu verfolgen wäre, um die dazugehörigen Einzelheiten zu finden. Es ist dies deshalb bemerkenswert, weil sich ein unsymmetrisches Aufbiegen selbst bei Verwendung von Bügeln

durch vorzeitiges Herausziehen unangenehm bemerkbar gemacht hat (siehe A_{12}), hier aber beide Eisen gut zusammen gearbeitet haben.

Versuch A_7 (Abb. 19), 108 Tage alt, mit 2 T.-E.

Der Versuch ist eine Wiederholung von A_3, mit denselben 6 Bügeln wie in A_3. Das Resultat ist demnach ein analoges mit einer mäßigen Erhöhung. Bruchlast $7620 + 190 = 7810$ kg. Abb. 16 zeigt (volle Linien) den Verlauf der Dehnung und Durchbiegung. Dem entspricht eine Scherfestigkeit des so armierten Betons mit 30 kg/cm². Wir sehen also, daß die Erhöhung gegen A_3 mit 28,8 kg/cm² nur eine geringe gewesen ist und daß es, um dieselbe zu erzielen, schiefer, in die Grimmsche Spirale versenkter Bügel bedurft hätte. Zur Erhöhung der Haftfestigkeit genügen senkrechte Bügel; will man jedoch die Bewegung der Eisen im Beton darüber hinaus hindern, so ist der schiefe Bügel bei entsprechender Verbindung die bessere Lösung. Der Anstoß für die Zerstörung ging hier von dem Bewegen der Eisen aus. Derselbe führt in beiden Fällen A_3 und A_7, ohne die Befestigung der Eisen im Beton zu berücksichtigen, zum Bruch. Bei Betrachtung des Schaubildes Abb. 16 und 13 wird die Wichtigkeit des Gebrauchs der Bügel besonders klar. Die Bedeutung der Bügel bleibt jedoch in erster Linie auf Rippenplatten beschränkt, indem z. B. bei gewöhnlichen Platten das nahe Nebeneinander der Zugeisen diese Verspannung nahezu ersetzt und nur in dem schmalen Steg die Folgeerscheinungen deutlich hervortreten. Damit schließen die am Bauplatz R. Grimm gemachten Versuche ab. Der dabei verwendete Beton war ein tadelloser und kommen, wie gesagt, seine Eigenschaften bis auf die Scherfestigkeit nicht in Betracht. Ich habe mich daher darauf beschränkt, sie bei der nächsten Serie zu untersuchen. Bezüglich des bisher verwendeten Eisenmaterials seien hier einige Stichproben des im Handel gekauften, sehr mittelmäßigen Eisens angeführt.

Prüfung am 30. Mai 1905 von Prof. Kirsch, damals noch im Technologischen Museum, ergab:

Durchmesser	Streckgrenze in kg f. 1 mm²	Bruchgrenze in kg f. 1 mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Bruchfläche
13 mm	24,1	**36,1**	31,0	71,0	feinsehnig, fehlerlos, Trichter
18 mm	20,5	**33,5**	31,1	74,9	desgl.
25 mm	23,4	**35,0**	31,3	46,5	feinsehnig geschichtet (Längsrisse)
26 mm	24,5	**37,2**	33,3	70,2	feinsehnig, fehlerlos, Trichter.

Eine Prüfung am 16. März 1906 von der Technischen Hochschule in Wien ergab:

Durchmesser	Elastizitätsgrenze in kg/mm²	Proportionalitätsgrenze in kg/mm²	Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Elastizitätsmodul in kg/mm²	Bemerkungen
19 mm	15,3	19,9	22,7	**34,9**	35,3	72	21 900	Bruchflächen: feinster Korn, samtartig mit Trichterbildung, homogen, fehlerfrei. Oberflächen vollkommen intakt.
20 mm	9,9	11,1	20,3	**34,5**	32,5	69	20 500	
26 mm	16,9	16,9	25,1	**38,7**	27,6	66	21 500	

Wie ersichtlich, ist das alles sehr minderes Eisen, wie man es im Handel eben bekommt, wenn man keine Garantie für die Zugfestigkeit verlangt. Dieselbe ist aber — das Eisen vom Werk und nicht vom Zwischenhändler bezogen — einerseits für die Praxis eine kostspielige Sache, da der Aufschlag etwa 10 vH. beträgt, und anderseits ein zeitraubender Vorgang. Es dürfte sich demnach empfehlen, neben dem gewöhnlichen schlechten Handels-Rundeisen ein Spezialeisen zu schaffen, das nur für Eisenbeton bestimmt ist und gleichzeitig eine garantierte minimale Zugfestigkeit besitzt, wie dieselbe für Brückenbau vorgeschrieben ist. Für mich war Bequemlichkeit und der Umstand maßgebend, weil dies an der Abhängigkeit der nachgewiesenen Eigenschaften nichts ändert, die ich sowieso ermitteln mußte. Wir gehen nun zur Fortsetzung der Versuche am Bauplatz Gisshammer über. Hier wurden neue Leute zur Herstellung der Objekte verwendet. Dies hatte den Nachteil, daß die Fabrikation der Versuchsobjekte mit gewissen Kinderkrankheiten der Herstellung solcher kleinlicher Arbeiten zu tun hatte. Die Auflager der Balken waren nicht genau parallel und die Stampfung des Betons in dem Steg geschah nicht mit der notwendigen gleichmäßigen Vorsicht. Es ist dies bekanntlich eine Voraussetzung für die Wirksamkeit der Bügel. Es war mir erwünscht, etwas über den Einfluß dieser bei schmalen Stegen so häufigen Fehler auf die Tragkraft zu erfahren. Nun hätte ich fast davon mehr erfahren, als mir lieb wäre. Glücklicherweise für den Schlußeffekt sind diese Fehler, die übrigens alle der Praxis nicht fern stehen, ziemlich gleichmäßig ausgefallen, so daß sie den Vergleichsmaßstab nicht stören. Ja, sie waren insofern von Vorteil, als sie die Wirksamkeit der in der Serie C angewendeten Mittel einer besseren Verbindung von Bügel und Zugeisen ins bessere Licht rücken, ihre Bedeutung dartun und den Wert der Versuche unabhängig von außergewöhnlicher Sorgfalt erscheinen lassen. Der Zweck der nächsten Versuche A_8 bis A_{12} war, zunächst ein Bindeglied mit der früheren Arbeit zu schaffen, daher wurde in A_8 und A_9 der Versuch A_3 wiederholt, um dann die Variation zu studieren, die bei der Bruchlast eintritt, abhängig von der Zahl und Stärke der Bügel. Dieser letztere Zweck erscheint durch diese ungleiche Ausführung in Frage gestellt. Die zugehörigen Schaubilder der Durchbiegung und Dehnung finden sich in Abb. 23 zusammengestellt vor.

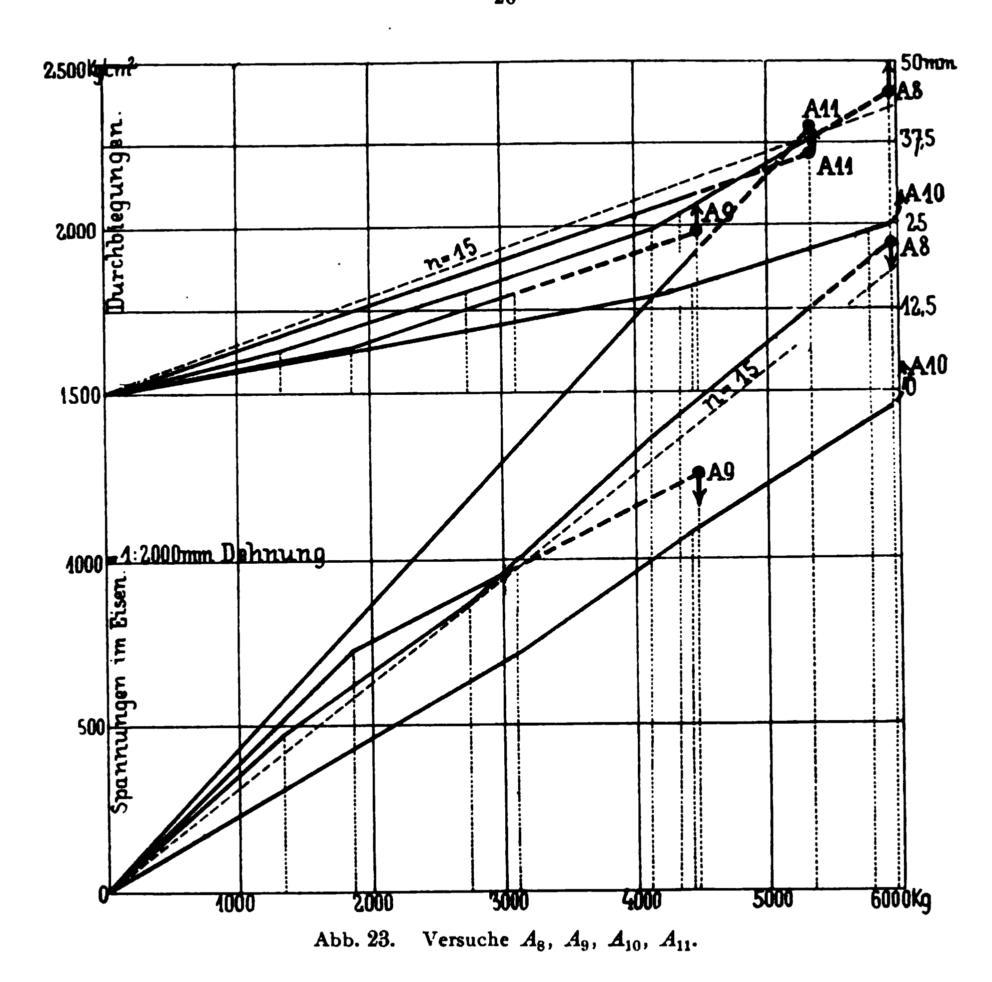


Abb. 23. Versuche A_8, A_9, A_{10}, A_{11}.

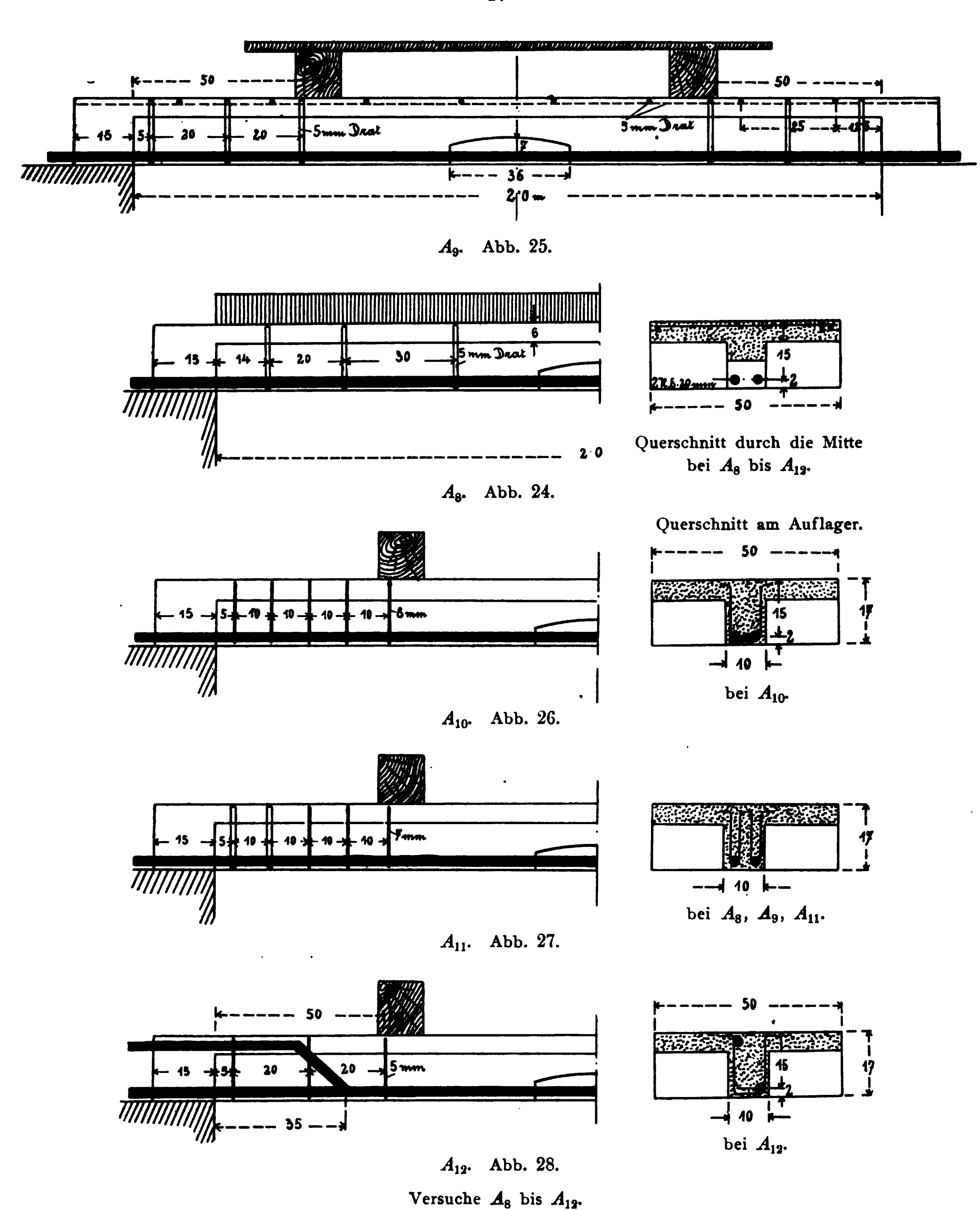
Versuch A_8 (Abb. 24), 97 Tage alt,

betoniert am 22. Februar 1906 (1 : 4), erprobt am 30. Mai 1906 mit gleichförmig verteilter Last.

Risse treten im mittleren Drittel auf und führen zu einem plötzlichen Bruch. Bruchlast 5962 kg.

Zuschlags-gewicht	Gesamtlast	Durch-biegung in der Mitte	Setzung in den Widerlagern I	Setzung in den Widerlagern II	Dehnung in den 2 R.-E.	
—	1328	0,7	0,1	0,0	40	56
1422	2750	1,6	0,1	0,1	77	97
1348	4098	2,7	0,2	0,3	114	159
1240	5338	4,2	0,3	0,5	147	209[9])
624	5962	Bruch plötzlich.				

[9]) Risse.



A_9. Abb. 25.

Querschnitt durch die Mitte bei A_8 bis A_{12}.

A_8. Abb. 24.

Querschnitt am Auflager.

bei A_{10}.

A_{10}. Abb. 26.

bei A_8, A_9, A_{11}.

A_{11}. Abb. 27.

bei A_{12}.

A_{12}. Abb. 28.

Versuche A_8 bis A_{12}.

In diesem und den folgenden Versuchen befinden sich Luftblasen unter den Zugeisen, so daß die Bügel teilweise hohl liegen.

Versuch A_9 (Abb. 25), 97 Tage alt.

Ebenso wie Versuch A_8, nur die 6 Bügel 5 mm, entsprechend der Einzellast gegen die Auflager zu, verschoben. Langsamer Bruch, Bruchlast 4442 kg. Wir sehen da abermals, im Vergleich mit dem vorigen Versuch, einen Zuwachs von etwa 50 vH. bei gleichmäßig verteilter Last gegenüber der Anwendung von Einzellasten. Die Last bleibt aber wesentlich gegen den sonst gleichen Versuch A_3 zurück. Dort waren 6 einzelne, hier 3 Doppelbügel, was keinen wesentlichen Unterschied machen kann. Maßgebend für den Ausfall in der Bruchlast kann jedoch nur die verschiedene Ausführung sein, aus welchem Grunde von einer richtigen Wirkung der Bügel in beiden Fällen A_8 und A_9 kaum die Rede sein kann.

Zuschlags-gewicht	Gesamtlast	Durch-biegung in der Mitte	Setzung in den Widerlagern		Dehnung in den 2 R.-E.	
			I	II		
—	1852	0,7	0,0	0,0	36	110
Entlastung	—	0,0	0,0	0,0	14	84
1238	3090	1,6	0,0	0,1	64	134
Entlastung	—	0,0	0,0	0,1	16	87[10])
1352	4442	Bruch (Mitte). In $\frac{l}{4}$ Gleiten der Bügel, Balken geht langsam nieder.				

Versuch A_{10} (Abb. 26), 97 Tage alt.

Hier sind 5 Bügel 8 mm angeordnet worden. Es entspricht dies einem Eisenquerschnitt von $5 \times 2 \times 0{,}5 = 5$ cm², wie es die eingangs erwähnte Rechnung erfordert.

Wir waren damit in der Lage, einen langsamen Bruch bei $7046 + 190 = 7236$ kg zu erzielen, also nahezu dasselbe wie in A_3 zu erreichen, trotzdem auch hier die Bügel nicht einwandfrei eingelagert waren. Es entspricht dies einer Eisenspannung von

$$\sigma_e = \frac{7236 \times 25}{82} = 2250 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist das eine Zahl, die die Streckgrenze, wie aus den folgenden Festigkeitsversuchen ersichtlich ist, nicht erreicht und demnach zeigt, daß der Bruch vom mangelhaften Verbunde abzuleiten ist, ausgedrückt durch die Haftspannung

$$K = \frac{3618}{13{,}05 \times 12{,}56} = 22 \text{ kg/cm}^2$$

---

10) Risse $^1/_4$ l. vom rechten Auflager.

bezw. durch die erzielte Scherspannung

$$\tau = \frac{3618}{13{,}05 \times 10} = 27{,}8 \text{ kg/cm}^2.$$

Prof. Kirsch ermittelte an den beiden, aus den Versuchsträgern herausgenommenen Rundeisen folgende Eigenschaften:

Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Elastizitätsgrenze in kg/mm²	Proportionalitätsgrenze in kg/mm²	Elastizitätsmodul in kg/mm²	Bemerkungen
26,1	**36,5**	28,9	48	18,5	24,7	20 300	Oberfl.: intakt. Bruchfl.: feinsehnig, Spaltöffnungen.
25,7	**33,5**	15,8	34	—	—	—	Oberfl.: stark querrissig. Bruchfl.: wie vorher.

Wir haben noch folgende Bügelarmaturen zum weiteren Vergleich. Bei dem Versuch I waren 8 einfache Bügel 5 mm. Es ist dies mit einer Grimmschen Spirale mit etwa $18 \times 2 \times 0{,}13 = 4{,}7$ cm², $8 \times 2 \times 0{,}2 = 3{,}2$ cm², die jedoch nicht in Betracht kommen, trotzdem hat sich auch hier, wie oben dargelegt (Abb. 4), bei 8081 kg eine Bewegung des Eisens im Beton gezeigt. Nur bei Versuch II mit 6,4 cm² ist eine weitere Steigerung auf 8500 kg ohne Bewegung der Eisen im Beton nachweisbar gewesen. Die Frage kann mit dem vorliegenden Versuchsmaterial nicht als abgeschlossen bezeichnet werden, umsomehr, als die gleichzeitige Scherfestigkeit keine klaren Schlüsse zuläßt.

Der Verlauf bei A_9 war der folgende:

Zuschlagsgewicht	Gesamtlast	Durchbiegung in der Mitte	Setzung in den Widerlagern		Dehnung in den 2 R.-E.	
			I	II		
—	3090	1,2	0,0	0,2	80	64
Entlastung	—	0,0	0,0	0,0	12	21
1352	4442	1,7	0,0	0,3	117	99
Entlastung	—	0,1	0,0	0,2	15	24
1312	5754	2,7	0,0	0,5	149	133[11])
Entlastung	—	0,5	0,0	0,3	14	37
1292	7046	Bruch 20 cm vom rechten Auflager durch einen Scherriß, Balken geht langsam nieder.				

[11]) Haarrisse 20 cm vom rechten Auflager.

Versuch A_{11} (Abb. 27), 98 Tage alt.

Sonst gleich mit 7 Bügeln 7 mm, also gleich $7 \times 2 \times 0{,}38 = 5{,}32$ cm²-Eisen, hat zwar mehr von A_9, aber einen Abfall gegen A_3 ergeben, indem der Bruch zwar langsam, jedoch schon bei 5328 kg eintrat, also in jener Höhe, wo sich bloß die ersten Risse zeigen sollten.

Versuch A_{12} (Abb. 28), 98 Tage alt.

Dieser Versuch ist eine Wiederholung des Versuches A_2 mit unsymmetrischen abgebogenen Eisen, jedoch mit 3 Bügeln 5 mm, da man in der Praxis oft so konstruiert, indem man sagt: $3 \times 2 \times 0{,}2 = 1{,}2$ cm²-Eisen in den Bügeln, hierzu noch 1 R.-E. 20 mm $3{,}14 \times 1{,}43 = 4{,}5$, ist im ganzen 5,7 cm² Eisen zur Armierung des Steges.

Der Versuch ergab trotz der Bügel ein analog klägliches Resultat wie A_2 und A_5, da anscheinend nicht genug Bügel da waren, um die exzentrische Bewegung hintanzuhalten wie in A_6. Der Balken ist unter 3969 kg gebrochen, ehe man eine Ablesung vornehmen konnte. Wer daran zweifelt, daß in A_{11} und A_{12} die Bügel aus den eingangs erwähnten Gründen ihre Schuldigkeit nicht getan haben, der werfe einen Blick auf das Schaubild der Dehnungen (Abb. 23) und entnehme, daß A_{11} fast doppelt so große Dehnungen zeigt wie A_9 und A_{10}, also genau dieselbe Erscheinung, wie wir sie bei Balken ohne Bügel feststellen konnten. A_8 ist mit gleichförmig verteilter Last erprobt worden, die einer anderen theoretischen Durchbiegung entspricht; dieselbe findet sich in Abb. 21 nicht eingetragen vor. Sie beträgt bekanntlich $f = \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{E8}$, während die Einzellasten in dem Viertelpunkt in $f = \frac{11}{768}$ entsprechen, also um 10 vH. mehr. So ein Unterschied ist bei der beobachteten Durchbiegung nicht bemerkbar.

Versuchsserie B.

Dieselbe unterscheidet sich von der Serie A, daß hier 8 R.-E. 10 mm anstatt 2 R.-E. 20 mm angewendet wurden. Der Eisenquerschnitt ist zwar genau derselbe, aber es darf nicht übersehen werden, daß die 8 kleineren Eisen sich in dem kleineren Steg wie auf einem Ballen beisammenfinden, daß also der Herabsetzung der Adhäsion in erster Linie rechnungsmäßig entsprochen wurde, daß aber tatsächlich von einer halb so kleinen Haftfestigkeit kaum gesprochen werden kann. Es war leider nicht möglich, innerhalb der einmal gewählten Dimensionen eine bessere Anordnung zu treffen. Die Versuche müssen also nur als eine Erprobung dieser sich häufig in der Praxis wiederholenden schlechten Anordnung gelten, deren Bestreben es ist, den Vorschriften über Haftfestigkeit nur dem Wortlaut nach zu entsprechen. Das Schaubild der Durchbiegungen zeigt Abb. 29.

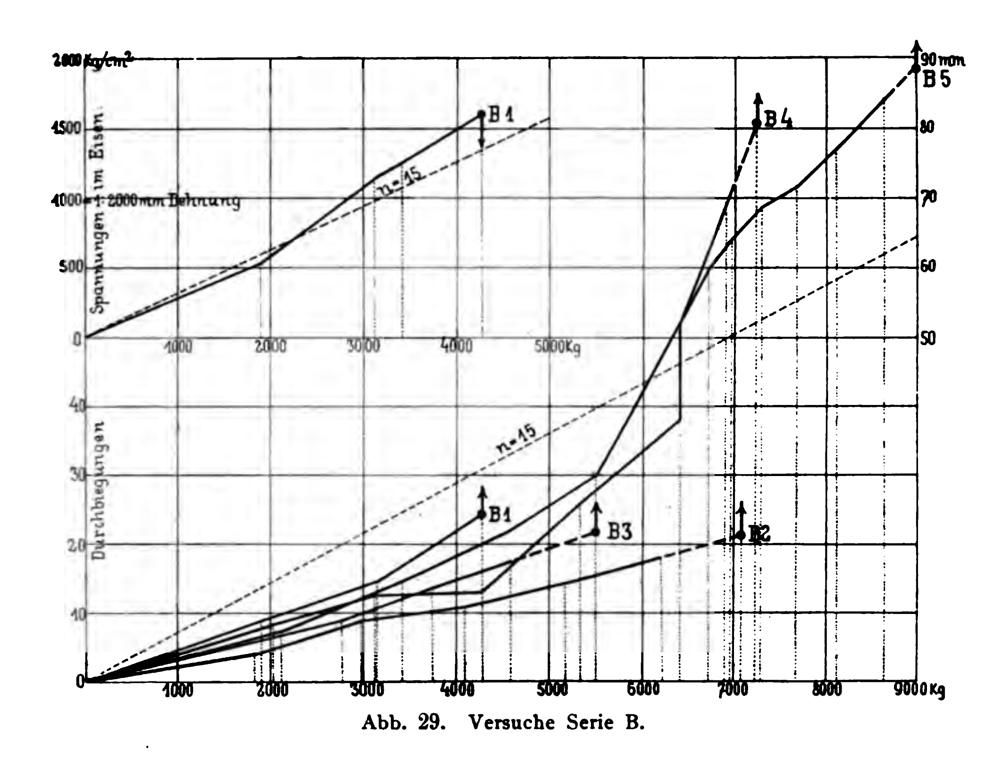


Abb. 29. Versuche Serie B.

Versuch B_1 (Abb. 30), 97 Tage alt.

Entspricht den Versuchen A_1 und A_4 ohne Bügel. Bruchlast 4298 kg. Es ist das fast das Doppelte wie in A, jedoch immerhin nur 7,4 kg/cm² Haftspannung. Bei diesem Versuch wurde auch eine Dehnungsmessung aufgenommen (Abb. 29), sonst aber aus Zeitmangel unterlassen.

Versuch B_2 (Abb. 31), 97 Tage alt.

Derselbe Versuch, jedoch mit 13 Bügeln 5 mm $13 \times 2 \times 0{,}2 = 5{,}2$ cm², erzielt 7079, also das gleiche Maximum wie in A_{10}, was abermals zum Schluß drängt, daß der Bruch — bei genügend großer Haftung — durch die Scherfestigkeit des Betons, abhängig von der dagegen angewendeten Armierung, herbeigeführt wird, falls die Zugeisen nicht direkt mit den Bügeln zusammenhängen wie in Serie C.

Versuch B_3 (Abb. 32), 98 Tage alt,

hat eine symmetrisch abgebogene Armatur, erzielt daher eine Mehrlast gegenüber B_1, Bruchlast 5506 kg; doch ist diese Befestigung allein, mit dem Bügel verglichen, nicht gleichwertig. Sie bleibt auch bei einer symmetrischen Anordnung deshalb zurück, weil die geradegebogenen Eisen sich verschieden im Beton bewegen und deshalb verschieden gespannt werden. Diese Möglichkeit (siehe Versuche von Schüle im 10. Heft der

Mitteilungen) tritt erst beim Bruch hervor und ist bei Verwendung von Bügeln gering.

In allen vorliegenden Fällen war das Herausziehen der geraden und das Feststehen der gebogenen Eisen sichtbar als ein nachweisbarer Unterschied in der Befestigung, der bei Mangel von Bügeln besonders kraß in Erscheinung tritt, jedoch auch sonst sichtbar blieb.

Der Versuch B_3 ist eine Analogie mit den von Prof. Schüle durchgeführten Versuchen mit Rippenplatten. Eine auf derselben Rechnung durchgeführte Kontrolle ergibt dort als Bruchlast jene Ziffer, die einer Eisenspannung von 2000 kg/cm bezw. Haftfestigkeit von 11,2 kg/cm bei 6 Wochen und 3200 kg/cm² bezw. 15 kg/cm bei 60 Wochen entspricht. Der vorliegende Fall ergibt im Alter von 14 Wochen 1735 kg/cm² Eisen und eine rechnungsmäßige Haftfestigkeit 17,4 kg/cm². Es kann dies wohl als eine Uebereinstimmung der Abhängigkeit des Bruches von der Haftspannung bezeichnet werden, besonders wenn man die sonst ja bedeutend abweichenden Materialien, Abmessung mit berücksichtigt, die auf die Güte des gewählten Vergleichsmaßstabes schließen lassen, als welche die vom Schreiber dieses 1897 aufgestellte, heute allgemein in Gebrauch stehende Rechnungsmethode angesehen werden darf.

Versuch B_4 (Abb. 33).

Balken wie B_3, nur noch 4 Bügel 5 cm. Es ist also an Eisen und

Bügel $4 \times 2 \times 0,2$ . . . . $= 0,8$ cm

abgebogene Eisen $1,43 \times 4 \times 0,79$ . . . . $= 4,5$ „

5,3 cm,

also eine Eisenversicherung gegen Abscherung nahezu wie in B_2. Sie ergibt auch nahezu dasselbe Resultat: Bruchlast $= 7235$. Langsamer Bruch durch Hereinziehen der geraden Eisen. Verlauf in beiden Fällen B_3 und B_4 ein ganz ähnlicher.

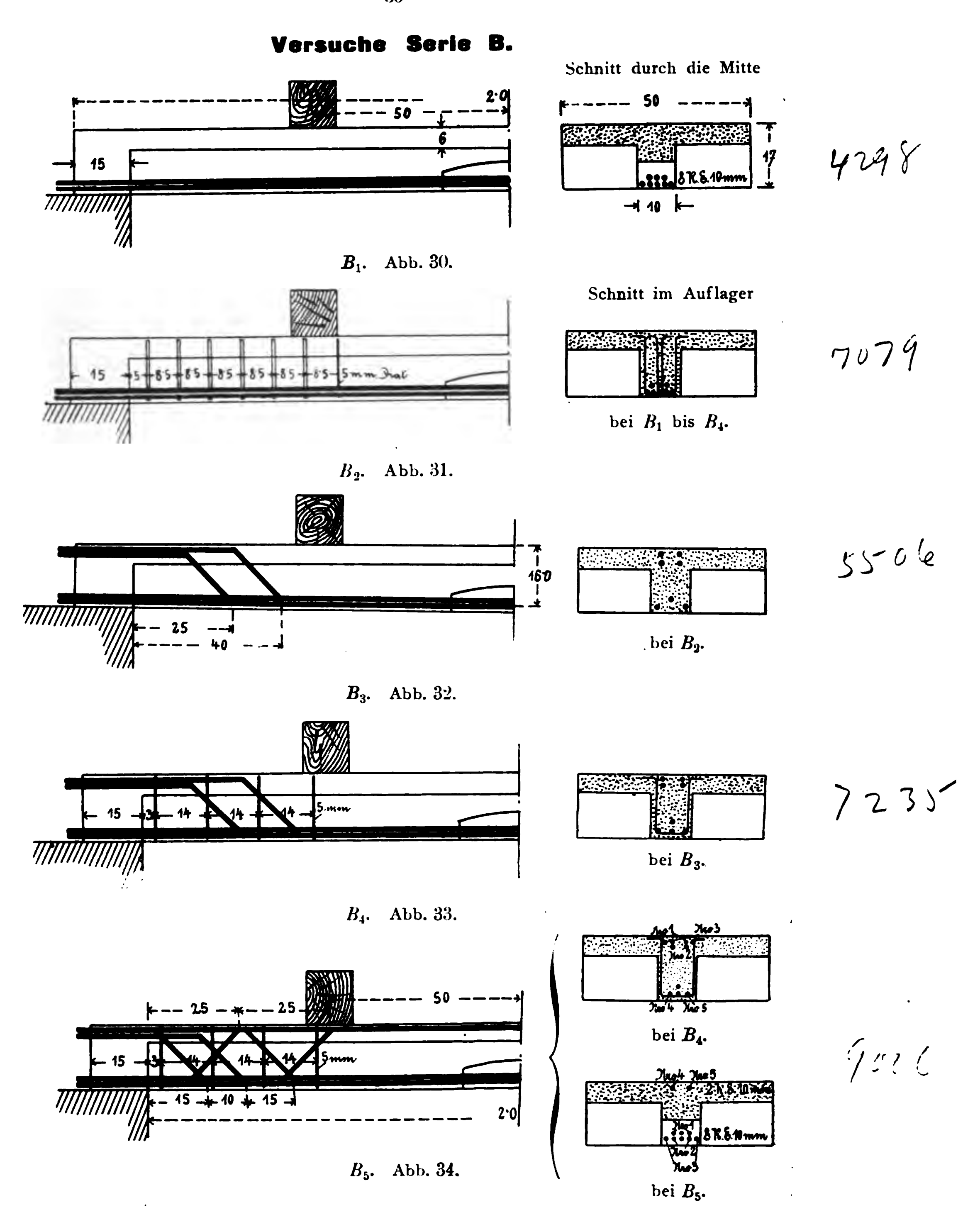
Daß auch hier die beiden Querschnitte, der der geraden und der abgebogenen Eisen beim Bruch nicht gleichmäßig mitwirkten, scheint mir erwiesen. Die von mir geübte Faustregel,[12]) die zum Berechnen der Bruchlast die ganze abgebogen und nur die halbe gerade in Rechnung zieht, ergibt bei einem Abfall von 25 vH., das ist anstatt 3600 kg/cm² nur 2700 kg/cm² Zugfestigkeit eine Bruchlast von $2,7 \times 3280 = 8856$, während 7235 erzielt wurden.

Versuch B_5 (Abb. 34).

Der Versuch ist ein ähnlicher wie in B_4 mit demselben Bügel, jedoch hat er nur 2 gerade Eisen, dafür aber 2 Druckeisen, die in den Untergurt herabgeführt wurden. Diese Anordnung findet sich besonders bei den von Luipold ausgeführten Brücken vor.

[12]) Siehe III. Forscherheft.

Versuche Serie B.



B_1. Abb. 30.

B_2. Abb. 31.

B_3. Abb. 32.

B_4. Abb. 33.

B_5. Abb. 34.

Es wäre vielleicht möglich, diese Anordnung der verwendeten Einzellast besser anzupassen. Die Risse ließen schließen, daß die Diagonalen nicht am rechten Platz sind. Der Versuch ergab 9006 kg, also eine bedeutende

Erhöhung, bei der es offen bleibt, ob sie der besseren Widerstandsfähigkeit des Steges gegen Abscheren zuzuschreiben ist oder den Druck-Diagonalen allein. — Da hier $^3/_4$ der Querschnitt eabgebogen, $^1/_4$ gerade ist, so wäre die gerechnete Bruchlast nach obiger Faustregel $^7/_8 \times 3600 \times 7280 = 10450$ kg/cm.

Prof. Kirsch hat für diesen Versuch alle dabei verwendeten 10 Eisen einer Probe auf ihre Qualität unterzogen und gefunden:

Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Elastizitätsgrenze in kg/mm²	Proportionalitätsgrenze in kg/mm²	Elastizitätsmodul in kg/mm²	Bemerkungen
24,7	**36,4**	29,4	54	10,4	16,9	19 600	Oberfläche intakt. Bruchfläche feinsehnig, geschichtet.
26,6	**37,3**	30,9	50	—	—	—	
27,1	**37,8**	28,9	49	—	—	—	
26,9	**38,2**	32,9	50	—	—	—	
28,1	**39,1**	29,1	49	—	—	—	
28,1	**36,5**	26,4	50	—	—	—	
27,5	**36,2**	32,0	47	—	—	—	
26,2	**38,4**	33,8	51	—	—	—	
26,4	**36,7**	32,0	55	—	—	—	
29,5	**37,3**	28,1	47	—	—	—	

Die angegebene Bruchlast vermehrt um das Eigengewicht ergibt 9196 kg. Es ist also rechnungsmäßig

$$\sigma_e = \frac{9196 \times 25}{82} = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

was der oben angegebenen Streckgrenze entspricht.

Versuchsserie C.

Dem in den vorangehenden Versuchen angestrebten Nachweis über die Wirksamkeit der abgebogenen Eisen, deren Wirksamkeit naturgemäß auf einzelne Eisen und auf Stellen nahe dem Widerlager beschränkt bleibt,

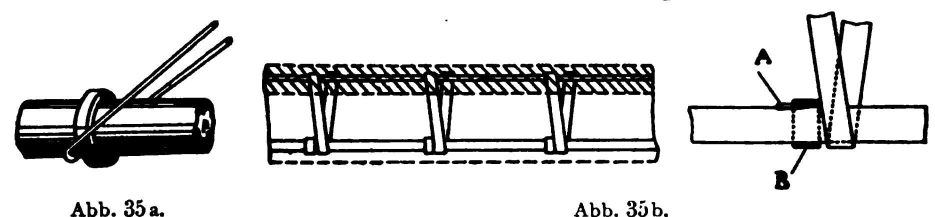


Abb. 35a. Abb. 35b.

wollte ich noch einen Nachweis einer Verbindung von Eisen zu Eisen mit dem ganzen Querschnitt anschließen. Aeltere Anordnungen rühren von Piketty (Abb. 35a), Bourison (Abb. 35b) und Lossier[13]) her, die aber, ebenso wie die durchlochten Flacheisen von Visintini[14]) u. a. m., in ihrem Effekt

[13]) Siehe „B. u. E.“ 1903, Heft IV, Seite 275.

[14]) Siehe Versuch in Dänemark „B. u. E.“ 1906, Heft VII.

wesentlich gleich sein müssen. Ich benutzte die Gelegenheit, am Bauplatz Gisshammer gleich eine von genannten Herren patentierte derartige Methode zu erproben, die ohne Zweifel den Vorzug der einfachen Herstellung hat. Sie besteht darin, daß man in jeden Stab einen ziemlich tiefen Kerb schlägt und den Bügel geneigt anlegt, mit Blumendraht an dem Rundeisen befestigt und so das Ganze in die Betonform einführt.

Bevor ich jedoch in die Versuche eingegangen bin, habe ich durch die Festigkeitsmaschine prüfen lassen, ob und welchen Einfluß diese Einkerbung auf die Festigkeitseigenschaft dieses so schlechten Eisens hat. Das betreffende Prüfungszeugnis lautet: Ergebnisse der Untersuchung von einem Rundeisen, auf dessen Zerreißungskoeffizienten im eingekerbten und unbeschädigten Zustande.

Material: eine Stange Rundeisen von etwa 20 mm Dicke und etwa 2 m Länge, an 2 Stellen eingekerbt. — Querschnitt der Einkerbung: rund. — Der Stange wurden 4 Probestäbe entnommen, welche der Reihenfolge ihrer Lage in dem Rundeisen nach mit 1, 2, 3 und 4 bezeichnet wurden. Die Stäbe 1 und 3 enthielten je eine der Einkerbungen in der Mitte der Stablänge.

Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.[15]	Einschnürung in vH.	Tiefe der Einkerbung in mm	Größte Querschnittsdimensionen der Einkerbungsstelle in mm	Bemerkungen
25,2	34,1	11,5	20	2,1	21,0	Die Bruchflächen aller Stäbe zeigten feinste Sehne, Schichtung und Spaltöffnungen;
(26,7)	(36,1)	[14]				
25,6	36,1	25,8	43	—	—	
22,3	35,3	12,6	34	2,8	20,4	die Oberflächen Hartadern, Quer- u. Längsrisse sowie Aufgehen von Längsnähten.
(24,3)	(38,5)	[14]				
25,7	36,8	24,5	44	—	—	

Versuche mit 2 Eisen nach ausgeführter Biegeprobe, entnommen aus C_3, ergaben:

Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Elastizitätsgrenze in kg/mm²	Proportionalitätsgrenze in kg/mm²	Elastizitätsmodul in kg/mm²	Bemerkungen
25,9	35,5	20,7	42	22,9	24,5	22 200	Oberfl.: stark querrissig. Bruchfl.: feinsehnig, homogen, Spaltöffnungen.
26,1	36,7	31,6	58	—	—	—	Oberfl.: Aufgehen einer Längsnaht u. Querrisse. Bruchfl.: feinsehnig, außen dunkel, innen licht.

[15]) Meßlänge $l = 11{,}3 \sqrt{F}$.

Wie aus den Bruchzahlen für den unbeschädigten, den eingekerbten und den durch Kerbe verminderten (in Klammern) Stab hervorgeht, kann man diese Abweichungen hinnehmen, weil sie nie in der Trägermitte, sondern dort stattfinden, wo der volle Eisenquerschnitt nicht mehr nötig ist.

Wichtig ist die satte Anlagerung der Eisen untereinander, und war es von großem Interesse, die Folgen unvermeidlicher Abweichungen dieser Auflagerung der Haupteisen auf dem Bügel zu verfolgen, indem dies bei höheren Spannungen kleine Bewegungen und dann neuerlich Festlegen des Hauptstabes zur Folge hatte, nach welchem der Träger neuerdings tadellos weiter arbeitete. Diese Erscheinungen sind, da die mir zur Verfügung stehende Zeit eine Beobachtung in kürzeren Absätzen nicht gestattete, nicht eingezeichnet. Eine vollkommene Darstellung würde nur durch eine graphische, kontinuierliche Aufnahme möglich sein. Die Anordnung hat sich, wie die folgende Darlegung beweist, vollkommen bewährt und kann als einen wesentlichen Fortschritt im Eisenbetonbau bezeichnet werden.

Auch hier wurde eine Abstufung in dem Bügelquerschnitt versucht. Die Eisenarmatur bestand, wenn nicht besonders angegeben, genau wie in Versuchsserie A aus $F_e = 6{,}28$ cm². Die Versuche finden sich in Abb. 36 zusammengefaßt.

Versuch C_1 (Abb. 37), 97 Tage alt,

betoniert am 22. Februar 1906 (1 : 4), erprobt am 30. Mai 1906.

6 Bügel aus 5 mm-Draht. Es sind demnach $6 \times 2 \times 0{,}2 = 2{,}4$ cm² Bügelquerschnitt vorhanden. Es sollte dies ein Parallelversuch zu A_9 sein. Da es herzlich schwer war, dieselben auf die Strecke gleichmäßig zu verteilen, so geschah der Fehlgriff, am Auflager nur 1 Bügel zu geben, der durch die auf ihn ausgeübte Zugkraft in den Beton hineingezogen wurde und wie ein Regenwurm verschwand, während die anderen Bügel noch nicht so hoch beansprucht waren. Die Bruchlast betrug 6280 kg, also jedenfalls mehr als bei den Versuchen mit gewöhnlichen Bügeln z. B A_9 (4442).

Versuch C_2 (Abb. 38), 98 Tage alt.

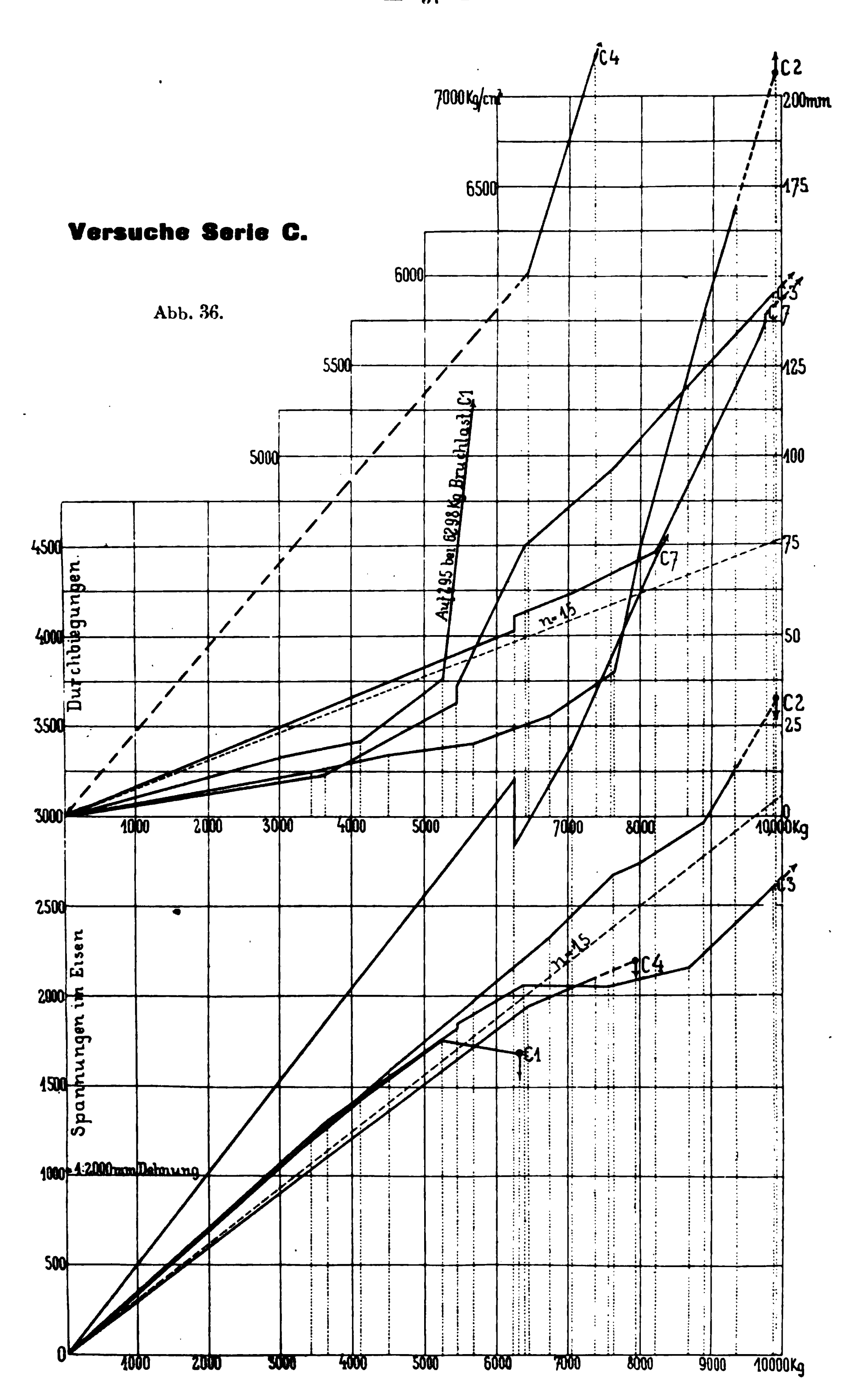
8 Bügel 7 mm. Es sind das $8 \times 2 \times 0{,}28 = 4{,}88$ cm² Bügelquerschnitt. Der Versuch ergab eine Bruchlast von 9921 kg, während die Versuche mit nahezu gleichem Eisenquerschnitt und demselben Bügelquerschnitt A_{11} 5328 kg ergaben.

Versuch C_3 (Abb. 39), 98 Tage alt.

12 Bügel 7 mm. Es ist das $12 \times 0{,}28 = 7{,}72$ cm² Bügelquerschnitt. Der Versuch ergab 10,496, also mehr wie die viel stärker armierten Balken in Serie A, nahezu gleich wie Versuch II mit Schraubensicherung.

Versuche Serie C.

Abb. 36.



Versuche C_4 und C_5 (Abb. 40), 98 Tage alt.

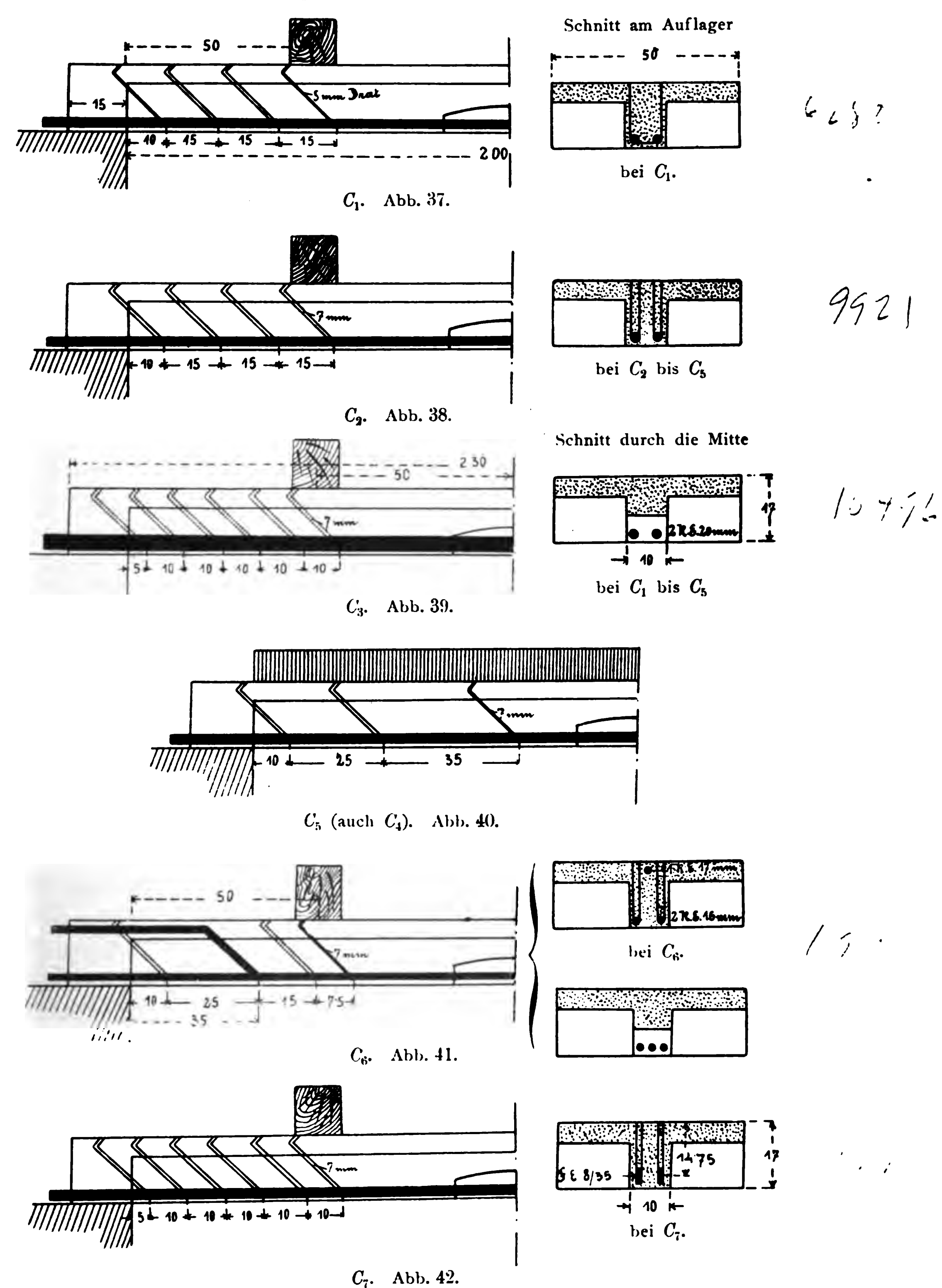
5 Bügel 7 mm = 3,8 cm². Es waren dies Parallelversuche mit Einzel- und gleichförmiger Last. Die Einzellasten ergaben 7941 kg. Dies zeigt deutlich, daß beim Balken Nr. 1 dieser Serie nur die fehlerhafte Anordnung der Bügel an dem relativ niedrigen Resultat schuld trug, und daß es zum vollen Ausnutzen der Bügel — trotz der nach der Theorie gleichmäßigen Verteilung — not tut, dieselben am Auflager am stärksten zu machen. Die Gesamtlast betrug $7941 + 190 = 8131$ kg, $V = 4065$ kg, $S = \frac{4065}{13{,}05} \times 50 = 15\,600$. Soll nun diese Kraft durch Eisenbügel in die Neigung unter 45° aufgenommen werden, so ist das eine Kraft $15\,600 \times 1{,}43 = 22\,200$ kg auf 3,8 cm² Eisen. Es entspricht dies 5800 kg/cm², also so ziemlich der Bruchgrenze dieses Drahtes, deren weitere Ueberschreitung in C_5 nur durch die Verbundwirkung erklärlich ist.[16])

Betrachtet man den Eisenbetonbalken als Gewölbe oder Bogenbalken, wie ihn Thrul ausgebildet hat, so ist der Horizontalschub $H = \frac{M}{m} = \frac{Ql}{8\,\mathrm{m}}$, d. h. die Schließe hat einen Zug von dieser Höhe aufzunehmen, den man sich zu $\frac{Q}{2\,\mathrm{m}}$ auf $\frac{l}{4}$ als Länge des einbetonierten Eisens verteilt denken kann, auf welches er entweder gleichmäßig oder auf $\frac{l}{2}$ ansteigend verteilt sein kann. Beim Versuch 5 wurden 9652 kg gleichmäßig verteilt aufgebracht, ohne einen Bruch oder eine Brucherscheinung herbeizuführen.

Bemerkenswert ist, daß sich selbst unter dieser hohen Last keine Sprünge nachweisen ließen, obwohl dies wegen der anbrechenden Dunkelheit schwer feststellbar war und daher zweifelhaft bleibt. Die Last konnte mit Rücksicht auf ihre bedrohliche Höhe nicht fortgesetzt werden, und war also auf diese Weise der 3. Parallelversuch zwischen Einzellast und gleichförmig verteilter Last vereitelt worden. Derselbe war mit Rücksicht auf gleichzeitige Untersuchung der Verteilung der Zugwirkung, herrührend von der Haftspannung, auf den Eisenbügel von besonderem Interesse. Die Last blieb die ganze Nacht hindurch auf dem Balken. Früh begann man die Last umzuschichten, und hat sich dabei, wie beobachtet wurde, der Balken auf die Unterlage herabgesenkt. Es hatte also jedenfalls die Inanspruchnahme der Bügel zu bleibenden Formänderungen geführt, in deren Folge der Balken zerstört wurde; also eine interessante, wie auch nicht beabsichtigte Dauerwirkung, die jedoch jeden direkten Vergleich mit dem früheren ausschließt. Solange wir Materialeigenschaften zur Rechnung be-

[16]) Zipkes, Die Scher- und Schubfestigkeit des Eisenbetons, erweiterter Sonderdruck aus „B. u. E." 1906, Heft 3 bis 5. Verlag von Wilh. Ernst u. Sohn, Berlin.

Versuche Serie C.



C_1. Abb. 37.

C_2. Abb. 38.

C_3. Abb. 39.

C_5 (auch C_4). Abb. 40.

C_6. Abb. 41.

C_7. Abb. 42.

nutzen, die sich auf keine Dauerwirkung beziehen — ich sehe keine Möglichkeit, es anders zu tun —, ist es meiner Ansicht nach zum mindesten ungerecht, den Balken einer Dauerprobe zu unterziehen und dies mit jenen Eigenschaften in Zusammenhang bringen zu wollen. Es ist dies eine Frage, die in den Begriff „Sicherheit" eingeschlossen werden muß.

Versuch C_6 (Abb. 41).

Armiert mit 2 geraden R.-E. 16 mm und einem abgebogenen Eisen 17 mm $F_e = 4{,}02 + 2{,}27 = 6{,}29$ cm², nahezu gleich wie alle vorigen, außerdem 5 Bügel 7 mm. Es ist das $2 \times 5 \times 0{,}38 = 3{,}8$ Bügelquerschnitt und vom abgebogenen Eisen 2,27 im ganzen 5,07 cm². Der Erfolg dieser Anordnung geht nicht über den von B_4 hinaus. Freilich hatte man in diesem Fall 6900 kg auf dem Belastungsapparat belassen, und es bedurfte nur einer geringen Erhöhung, um den Bruch herbeizuführen. Das Resultat ist daher als nicht ganz vergleichsberechtigt ausgeschieden worden, ebenso wie auch C_4 nicht hätte aufgenommen werden sollen.

Ich darf an dieser Stelle wohl auf die Frage der angewendeten Laststufen eingehen. Ihre Höhe hat keinesfalls meine Billigung, wohl aber wäre es für mich, der ich sowieso ganze Tage Arbeit der Sache geopfert habe, physisch unmöglich gewesen, die Arbeit mit kleinen Laststufen zu Ende zu führen. Besonders zeitsparend ist jedoch in den Fällen C_4 und C_6 vorgegangen worden, indem man eine zu hohe Flossenlast auf dem Apparat belassen hat, und ist damit wohl der Vergleichswert der Versuche in Frage gestellt worden.

Versuch C_7 (Abb. 42).

Armatur mit 2 Flacheisen 8×35, $F_e = 5{,}6$ cm², also wesentlich kleiner, ebenso war $d = 14{,}75$ cm, ebenfalls bemerklich kleiner. Der Versuch ergab mit denselben Bügeln wie in C_3 das bemerkenswerte Resultat einer Bruchlast von 10,759 kg. Das in Abb. 36 eingezeichnete Durchbiegungsbild ist ein bemerkenswert gutes, ja vielleicht das beste unter den Versuchen, als ein Beweis des tadellosen Eingreifens der Bügel in diese Querschnittsform, wo die Kerben besser angebracht werden können. Ich habe im Dehnungs-Diagramm zwar auch die abgelesenen Dehnungen eingezeichnet, obwohl dieselben offenkundigerweise nur ein Beweis sind, daß innerhalb der Flacheisen keine gleichmäßige Spannung eintrat und daß die Randspannung sich auf den Meßapparat entsprechend vergrößert übertragen hat. Es war nicht möglich, die Flacheisen mit den für Rundeisen geeigneten Backen des Meßapparates entsprechend tief im Schwerpunkt zu fassen. Es haben also diese Zahlen nur einen Wert zur Beurteilung des Verlaufs. Bemerkenswert ist, daß bei einer zweiten Belastung die Dehnung bei

6210 kg	320
Entlastung	57
6210 kg	283
Entlastung	12
7030 kg	339
8194 „	442

betragen hat. Es ist also bei der ersten Belastung von 6210 die Befestigung eine so stramme gewesen, daß innerhalb der Eisen der Dehnungsausgleich erst später erfolgt ist.

Der Bruchlast 10,759 + 190 = 10949 kg entspricht $M = 273\,725$ cm, daher

$$\sigma_e = \frac{273\,725}{82} = 3340 \text{ kg/cm}^2,$$

also bereits nahezu an der Bruchgrenze, wie die folgenden, direkt an demselben Stück Eisen ermittelten Eigenschaften zeigen.

Streckgrenze in kg/mm²	Bruchgrenze in kg/mm²	Bruchdehnung in vH.	Einschnürung in vH.	Elastizitätsgrenze in kg/mm²	Proportionalitätsgrenze in kg/mm²	Elastizitätsmodul in kg/mm²	Bemerkungen
23,9	**38,3**	22,0	40	13,1	18,0	19800	Oberfl.: intakt. Bruchfl.: feinsehnig, geschichtet.
26,5	**38,3**	27,1	39	—	—	—	

$V = 5475$ kg.

Es ist also

$$S = \frac{5475}{13{,}05}\,50 = 20\,900 \text{ kg}$$

und unter 45° 20,900 × 1,43 = 29887 kg auf 24 × 0,38 = 9,12 cm², die Eisen waren also mit 29,887 : 9,12 = 3250 kg/cm² beansprucht. Da derartige Drähte gewöhnlich eine höhere, durch die Umschließung von Beton gut ausgenutzte Festigkeit besitzen, so muß dies den Bruch nicht notwendig erklären, ebenso liegt aus der Eisendehnung noch nicht die Notwendigkeit zum sofortigen Bruch vor. Dieselbe ist vielmehr im Beton zu suchen, dessen Herstellung, wie erwähnt, viel zu wünschen übrig ließ, und dessen gleichzeitige Prüfung an gleichzeitig hergestellten Würfeln in der technischen Hochschule Wien die folgende Zahl ergab: 108 kg/cm².

Die Druckprobe geschah senkrecht auf die Stampfrichtung, also in derselben Weise, wie der Obergurt beansprucht wird.

Ich schließe auch gleich das Prüfungsergebnis des Baurats Greil der städt. Prüfungsanstalt über den verwendeten Zement an. Das betreffende Faß war anscheinend nicht ganz trocken gelagert gewesen und zeigte viele

Knollen, die sich jedoch leicht zerreiben ließen. Ein Bedenken gegen seine Qualität liegt nach dem folgenden Zeugnis nicht vor:

Kurowitzer Portland-Zement,
verwendet zu den Balkenproben des Herrn Baurat Dr. Ing. F. v. Emperger am Materialplatz des Baumeisters Herrn A. Gisshammer.

Buch Post	Gewicht in g für 1 Liter		Erhärtungs-beginn		Abbindezeit				Siebeproberückstand in vH. auf dem		Zugfestigkeit		Druckfestigkeit	
					an der Luft		im Wasser				in kg für 1 cm² nach			
	fest	lose gesiebt							900	4900	7	28	7	28
			Std.	Min.	Std.	Min.	Std.	Min.	Maschensieb		Tagen			
5033	—	1174	—	35	6	20	10	—	1	19	—	27,25	—	277,75

Darrprobe bestanden.

Wien, im Juni 1906. Greil.

Um die nachgewiesene Würfelfestigkeit mit der Probe direkt vergleichen zu können, bestimme ich mir nach meiner Methode

$$m' = d - \frac{x}{2} = 12{,}07$$

$$W'_b = 3536$$

$$\sigma_b = \frac{273\,725}{3536} = 78 \text{ kg/cm}^2.$$

Das Protokoll verzeichnet bereits unter dieser Last die typische Form der Zerstörung durch reinen Druck. Es ist also wohl anzunehmen, daß sich an der Stelle noch ein schwächeres Stück Beton befunden hat, wie es der Würfel gezeigt hat, das durch die gleichzeitigen Dehnungen im Eisen zum Bruche führte.

Ich will durch diese Feststellung nur nochmals hervorheben, daß die, wie gesagt, nicht einwandfreie Herstellung durch unerfahrene Handlanger nicht den gewünschten Effekt hatte, die Druckerscheinungen ganz auszuschließen, daß vielmehr bei diesem besten Versuch, der mit den angenommenen schwierigen Bedingungen ganz außerordentliches geleistet hat, durch diesen Umstand ungünstig beeinflußt wurde, auf den ich aus den erwähnten Gründen nicht viel Gewicht gelegt hatte, indem ich selbst den Platzinhaber ersuchte, nicht seine erfahrenen Leute der Arbeit zu entziehen. Es darf also angenommen werden, daß die erzielten Lasten unter Umständen, die mehr auf die Erzielung von „show" ausgehen wie die vorliegenden, höhere Ziffern leicht erreichbar gewesen wären.

Dem vorangegangenen ist noch ein Versuch mit einer Variante in der Eisenarmatur der Vollständigkeit wegen angeschlossen worden, bei dem außerdem ein Beton mit Kohlenschlacke Verwendung fand, dessen Druckfestigkeit sich jedoch nahezu gleich ergab wie vorher (95,5 kg/cm²).

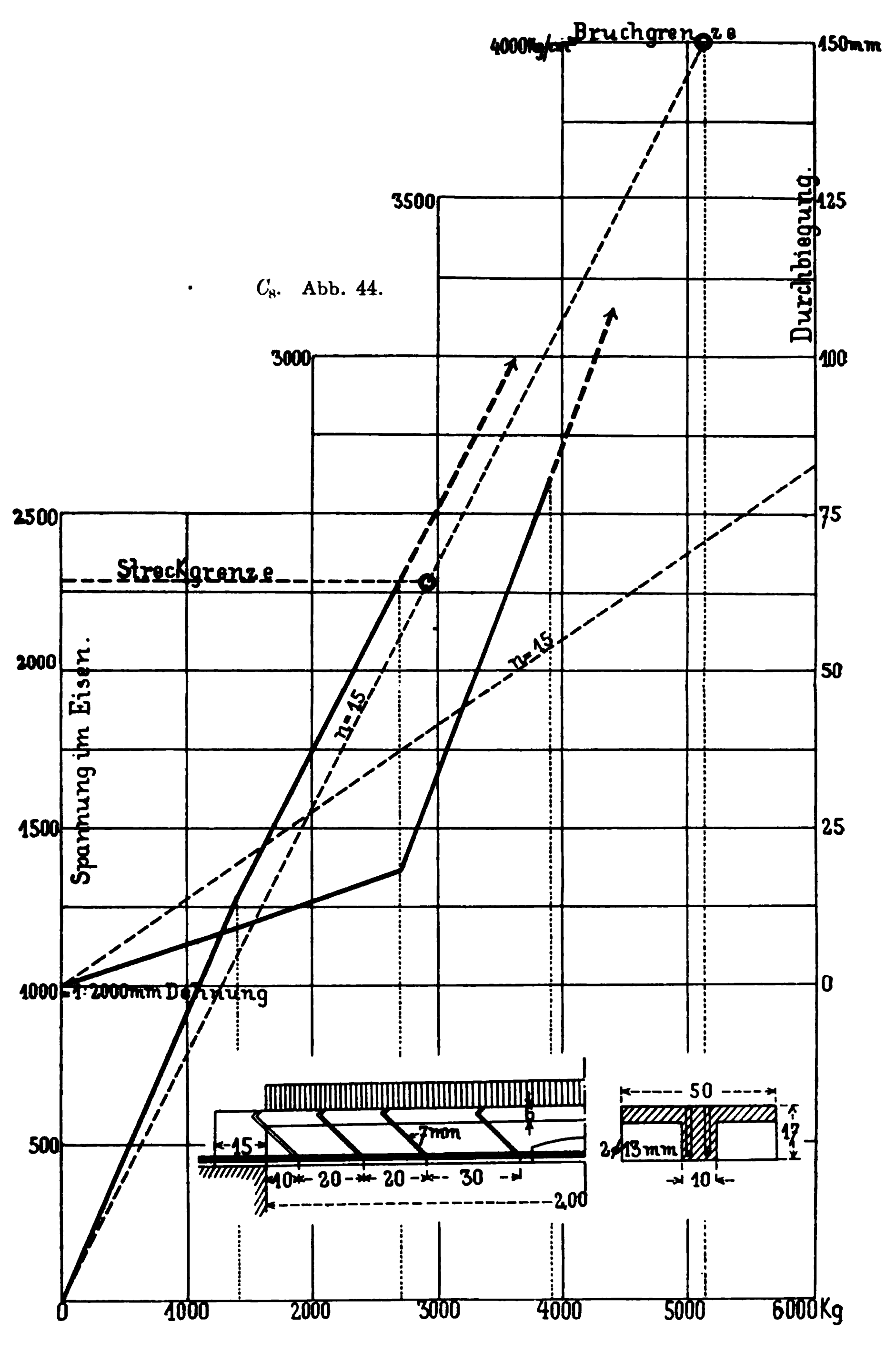


Abb. 43. Versuch C_8.

Versuch C_8 (Abb. 43).

Der Balken ist in 2 R.-E. 13 mm armiert $F_e = 2{,}65$.

$$f_e = 0{,}53, \quad nf_e = 0{,}795$$
$$x = 4{,}17, \quad y = 10{,}83, \quad m = 13{,}61$$
$$W_e = 13{,}61 \times 2{,}65 = 36$$
$$\text{Bruchlast } 5132 + 190 = 5320 \text{ kg}$$
$$M = 25 \times 5320 = 144\,000 \text{ cmkg}$$
$$\sigma_e = \frac{144\,000}{36} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$
$$V = 2660, \quad U = 8{,}16, \text{ da}$$
$$K = \frac{2660}{13{,}61 \times 8{,}16} = 24 \text{ kg/cm}^2.$$

In Abb. 44 findet sich der theoretische Verlauf zum Vergleich mit den Beobachtungen eingezeichnet vor. Die Beobachtungen gehen jedoch nur bis zur Streckgrenze, und ist der weitere Verlauf hier wie im anderen Falle, der bei der Bruchlast natürlich nicht beobachtet werden konnte, durch Verlängerung der vorangehenden Linie strichliert eingezeichnet, außerdem die Streckgrenze und die Bruchgrenze des Materials angegeben, wie sie direkt bestimmt wurde.

Damit ist schließlich ein Fall vorgeführt, wo die Eisenfestigkeit rechnungsmäßig mit den vorgeschlagenen Hilfsmitteln erreicht worden ist, was sich durch eine beginnende Einschnürung an dem freiliegenden Mittelstück zu erkennen gab. Abb. 47 zeigt das Bruchbild. Abb. 45 u. 46 zeigen Bilder von einer anderen vom Wiener Stadtbauamt mit demselben System ausgeführten Probe, die uns die Brucherscheinungen besser vor Augen führen. Sie sind gekennzeichnet durch Risse, die wir sonst nur beim Bruch kennen lernen, die aber hier durch die schiefen Bügel zusammengehalten werden, so daß nur dann eine vollständige Zerstörung möglich ist, wenn die Bügel oder Zugeisen reißen. Natürlich hatte diese Last bezw. die hierbei eintretenden riesigen Dehnungen in C_8 eine vorherige Zerstörung des Druckgurts zur Folge, während in dem vorerwähnten Fall C_7 das Zerdrücken als Bruchursache auftrat.

Es ist daher bezeichnend, daß dieselben sich oft in ziemlicher Größe bald als Folge irgend einer kleinen Unregelmäßigkeit beim Einpassen der Bügel in die Kerbe einstellen. Die weitere Bewegung der Eisen im Beton und das damit verbundene Zerstören seiner Scherfestigkeit wird jedoch durch dieselben aufgehalten und verhindert. Der Träger bleibt bis zum Schluß elastisch und zeigt langsam Bruch. Man wird also zu unterscheiden haben zwischen Fällen, in denen nur ein bescheidenes Maß von Haftfestigkeit nötig ist, etwa bis 4 kg/cm² als zulässige Grenze. Dann werden senkrechte Bügel genügen. Dieselben sind aber auch dann unumgänglich nötig, um diese Zahl von Haftfestigkeit (16 kg/cm²) sicher zu stellen, wenn sie

z. B. mit Rücksicht auf die Scherfestigkeit überflüssig erscheinen. Wichtiger als das Vorhandensein der Bügel selbst ist jedoch ihr gutes Anliegen und satte Ausfüllung zwischen ihnen an den Zugeisen zur Erzielung dieser



Abb. 45.



Abb. 46.

Wirkung, insbesondere des langsamen Bruches. Der notwendige Querschnittsaufwand in den Bügeln wäre durch ansteigende Versuche zu ermitteln. Die üblichen Regeln scheinen jedoch mit Bezug auf Anhaftung eher zu viel als zu wenig Eisen vorzuschreiben. Hierbei ist nur eine günstige Verallgemeinerung aus vorliegenden Versuchen von A_3 mit der bei einzelnen Versuchen gebotenen Vorsicht aufzunehmen. Ungünstig dagegen mufs man ihre Wirkung auf die Scherfestigkeit des Betons beurteilen. Für das Endresultat ist es gleichgültig, ob der senkrechte Bügel überhaupt nicht wirkt oder nur deshalb die Zerstörung zuläßt, weil er die Bewegung des Eisens im Beton über eine gewisse Grenze hinaus nicht hindern kann. Tatsache ist, daß der schiefe, am Eisen befestigte Bügel nach beiden Richtungen seinen Aufgaben

besser entspricht und insbesondere dort eine Notwendigkeit erscheint, wo man über die angeführten Grenzen der Haft- und Scherfestigkeit hinaus die Zugeisen besser ausnützen will. Daß es möglich ist, durch eine entsprechende Befestigung des Eisens im Beton auch in solchen Grenzfällen die Zugfestigkeit der Eisen am Träger voll auszunützen, ja ebenso, wenn nicht noch sicherer wie in Eisenkonstruktionen, die Streckgrenze zu überschreiten, scheint durch die vorliegenden Versuche neuerdings dargetan.

Die aus den Versuchen sich ergebenden weiteren Schlußfolgerungen finden sich an zutreffenden Stellen eingestreut. Ich kann nur noch mein Ceterum censeo wiederholen. Man muß den Leichtsinn, mit dem man den Verbund als eine Eigenschaft hinstellt, der sich ohne besondere Vorkehrungen von selbst einstellt, gründlich abstreifen, und sollte die Mittel, wie man ihn sicherstellen kann und in welchem Maß und in welcher Form dies nötig, in der dargelegten Weise, nur entsprechend vollständiger und gründlicher, als ich es zu tun in der Lage war, experimentell ermitteln.

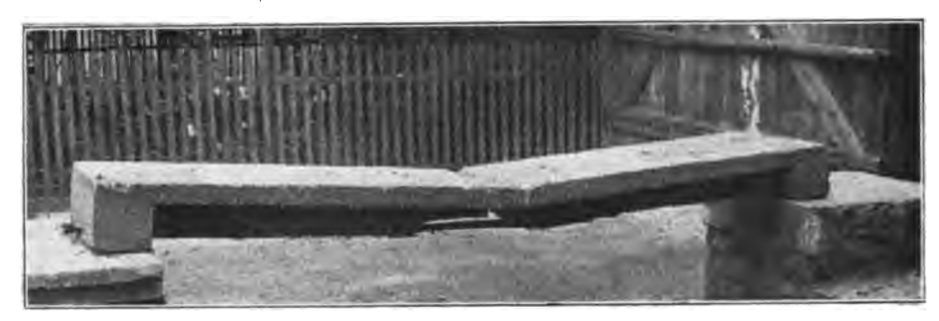


Abb. 47.

Ebenso aber wie ein Zuviel (7,5 kg/cm²) schädlich, ja gefährlich ist, kann ich es nicht billigen, wenn man diesen in den Leitsätzen des Deutschen Betonvereins enthaltenen verzeihlichen Mißgriff mit einem Rechnungsfehler zuzudecken versucht, nachdem nur die „unten gebliebenen" Eisen zu rechnen wären. Da es durch die Versuche von A. H. Carson[17]) erwiesen ist, daß auch ein Balken mit gar keinen geraden Eisen unten nur durch seine abgebogenen Eisen seinen statischen Funktionen genügen kann, ebenso wie es bekannt ist, daß durch eine Vermehrung der Zahl der geraden Eisen im allgemeinen umgekehrt eine Verminderung der Verbund- resp. Bruchfestigkeit eintritt, so ist es klar, daß uns dieser Gedankengang nicht nur in die Irre führt, sondern auch die Zahl K dermaßen niedrig und so unregelmäßig darstellen würde $\left(\frac{7,5}{3} - \frac{7,5}{4} \text{ bis } \frac{7,5}{\infty}\right)$, daß dieser gewiß

[17]) Siehe Versuche der Bostoner Untergrundbahn im III. Forscherheft Seite 11.

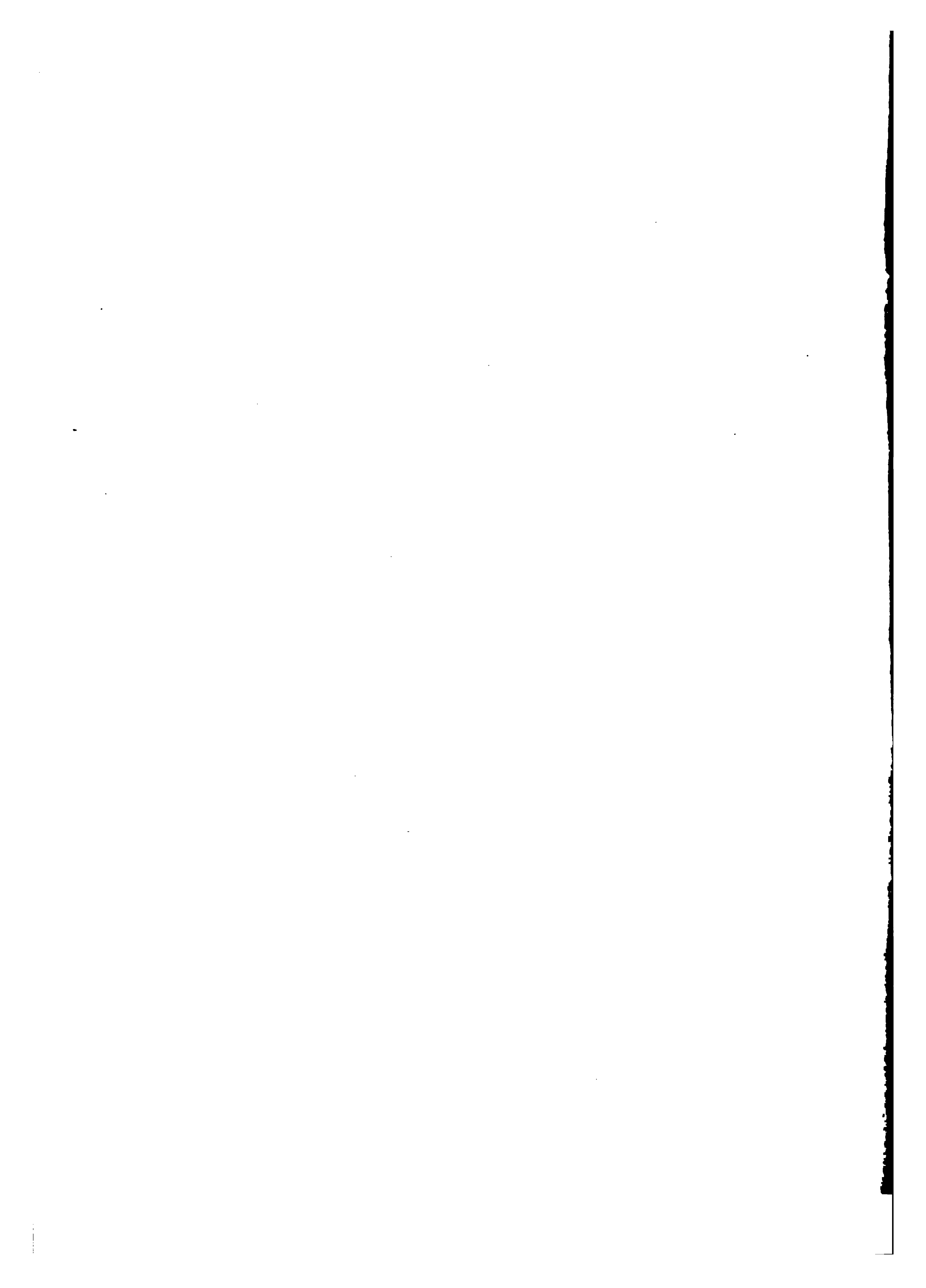
wichtige Maßstab für den Verbund auf dieser Rechnungsbasis uns ganz wertlos erscheinen müßte.

Bezüglich der direkten Verwendbarkeit der gewonnenen Versuchsresultate auf ganz ähnliche Bauten in der Praxis sei erwähnt, dafs das untersuchte Objekt eine 2 m-Straßen- oder Eisenbahnbrücke entspricht, die für $\sigma_e = 800$ kg/cm² und für zwei Radlasten von 1,31 t oder 2620 kg/m² im Abstand von 1 m gerechnet erscheint. Wir wissen aber, daß dieser Last ein $k = 8$ kg/cm² entspricht (siehe Seite 12). Es erscheint daher für $k = 4$ kg/cm² nur die Hälfte (2 Einzellasten von je 656 kg oder 1310 kg/m²) zulässig, unter Abschlag des halben Eigengewichts in jedem Falle. Bei Verwendung gewöhnlicher Bügel ist damit — sorgfältige Ausführung mit den gewöhnlichen Bügeln vorausgesetzt — wenigstens eine Sicherheit von 6 zu erzielen (siehe Versuch A_8 auf Seite 15). Es erscheint dies daher als eine selbst für diesen extremen Fall ausreichende sehr scharfe Vorschrift, die der Qualität der Ausführung einen Spielraum bis zur verlangten vierfachen Sicherheit läßt (siehe Versuch A_9 und folgende).

Weiter ist mit den Gisshammerschen Bügeln die vierfache Sicherheit auch mit 1,31 t erzielbar, wie uns der Versuch C_7 auf Seite 40 bewiesen hat.

Wer aus diesen Zeilen die Absicht des Verfassers ableiten will, die Zahl K wesentlich herabzumindern, vergißt, daß jenseits von 4 kg/cm² die Möglichkeit aufhört, mit glatten Eisen und gewöhnlichen Bügeln zu konstruieren, daß also eine solche weitgehende Erniedrigung einem Verbot gleichkommen würde. Meine Absicht ist es nur, auf die Berechtigung eines Mittelweges aufmerksam zu machen. Ich würde bei erfahrenen Betonfirmen nur für jene Ausnahmefälle den Gebrauch fester Bügel empfehlen, in welchen sich 4 kg/cm² als unzureichend erweist. Bei Anfängern oder unverläßlichen Leuten aber würde ich solche Vorrichtungen allgemeiner vorschreiben, die uns den richtigen Effekt für alle Fälle sicherzustellen geeignet sind. Von meinem rein sachlichen, unparteiischen Standpunkt aus würde ich es mit Befriedigung begrüßen, wenn sich der in der vorliegenden Arbeit vereinigte, für einen Einzelnen nicht unbedeutende Aufwand von Zeit, Mühe und Geld für die Allgemeinheit nicht als nutzlos erweisen sollte, wobei ich stets die wissenschaftliche Forschung und den Nutzen für die Industrie als eng verbundene, gleichberechtigte Faktoren im Auge hatte, mit dem Ziele, eine allerseits befriedigende Lösung zu erzielen.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.



FORSCHERARBEITEN
AUF DEM GEBIETE DES
EISENBETONS

DAS ZUSAMMENWIRKEN
VON
BETON UND EISEN.

EINE ABHANDLUNG AUF GRUND
VON LABORATORIUMS-
VERSUCHEN

HEFT VI

PREIS 3 MARK

VON

INGENIEUR EMIL PROBST

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

Das

Zusammenwirken

von

Beton und Eisen

Eine Abhandlung auf Grund von
Laboratoriumsversuchen

von

Ingenieur **EMIL PROBST**

Mit 20 Textabbildungen.

BERLIN 1906
Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

VORWORT.

Vorstehende Abhandlung befaßt sich mit der fundamentalsten Frage bei armierten Betonkonstruktionen, mit der Art des Zusammenwirkens von Beton und Eisen. Die merkwürdigsten Erklärungen sind hierfür gegeben, und die nutzlosesten Versuche sind zur Klarstellung dieses Begriffes gemacht worden. Ob es sich um »Adhäsion«, »Haftfestigkeit« oder »Gleitwiderstand« handelte, die Art der Ausführung der Versuche ist immer dieselbe geblieben — sie entsprach nie der tatsächlichen Wirkungsweise. Durch Herausziehen oder Drücken von Eisenstäben aus Betonkörpern wurden Resultate, sogar bestimmte Zahlenwerte ermittelt und diese auch direkt auf solche Konstruktionsteile übertragen, die auf Biegung beansprucht werden. Die richtige Vorstellung über das Zusammenwirken von Beton und Eisen läßt sich jedoch nur aus Biegeversuchen ableiten, und diesen Weg hat der Verfasser betreten.

Indem ich die vorliegende Publikation der Oeffentlichkeit übergebe, spreche ich die Hoffnung aus, daß sie zur Klärung des grundlegendsten Begriffes bei armierten Betonkonstruktionen beitragen werde.

Die in der Abhandlung vorkommenden Versuche wurden vom Verfasser an der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt in Zürich, mit besonderer Bewilligung des Direktors Herrn Professor Schüle, unter Benutzung aller Maschinen und Feinmeßapparate und der Mithilfe des Personals der Anstalt durchgeführt. Als Assistent bei den von Professor Schüle durchgeführten wissenschaftlichen Untersuchungen für die Schweizerische Betonkommission war es mir vergönnt, in das Wesen dieser schwierigen noch ungelösten Frage tiefer einzudringen, und ich erfülle ein Herzens-

bedürfnis, Herrn Professor Schüle an dieser Stelle für seine Förderung und sein Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank zu sagen.

Ferner möchte ich Herrn Eduard Brunner, Vorstand der mechanisch-technischen Abteilung der Anstalt, für seine Unterstützung und Mithilfe bei der Ausführung der Untersuchungen bestens danken und schließlich der Betonbau-Unternehmung Maillart & Co. in Zürich dankbarst erwähnen, welche in zuvorkommendster Weise ihren Materialplatz zur Herstellung der Probekörper zur Verfügung gestellt hat.

Zürich, Ende April 1906.

Emil Probst.

La présente publication a pour but d'étudier l'action simultanée du béton et du fer. Jusqu'à présent on s'était borné à constater la force déployée pour retirer ou faire sortir par pression les barres de fer d'une masse de béton et on avait cherché à en déduire des données numériques pour l'adhésion; ces dernières ont été appliquées ensuite directement aux corps qui ont à subir une flexion. Cette sorte d'action simultanée du béton et du fer, telle qu'elle résulte d'essais maintes fois répétés, ne répond en aucune façon à l'action qui se produit en réalité. Il n'est pas davantage exact de supposer une adhésion quelconque entre le fer et le béton.

Les expériences, qui ont servi de base à cette publication et qui ont été faites par l'auteur avec des poutres de béton armé au laboratoire d'essais de matériaux de Zurich, ont démontré clairement que ces deux matières n'ont qu'une action indépendante. Les qualités primordiales de la combinaison béton et fer ont leur cause dans le fait que le béton en se contractant pendant le durcissement enserre le fer; mais ce dernier, grâce à son élasticité et à sa facile adaptation, est à même de suivre tous les mouvements des molécules du béton. Il n'y a aucune adhésion entre le béton et le fer, et les expériences suivantes ont prouvé que l'action simultanée des deux corps dépend de la force de traction du béton, de la constitution de la surface du fer et de la façon avec laquelle le fer est adapté au béton. Une bonne adaptation du fer avec la ceinture compressive du béton ainsi qu'une surface inégale de l'armature, qui agit aussi comme une ancre, ont nécessairement pour conséquence une élévation de la force de support de la construction.

Il est par suite nécessaire de chercher à obtenir pour les constructions de béton armé un béton possédant la plus grande force possible de traction,

et c'est un point qui n'a pas été suffisamment considéré jusqu'ici, et à adapter le fer au béton assez étroitement pour rendre impossible tout mouvement du fer, même après que la force de traction du béton est passée.

Telle est en résumé le résultat de cette publication qui a été faite à la suite d'essais tendant à établir clairement le mode d'action du béton armé, et dans laquelle je me suis efforcé d'apporter un peu de clarté sur cette notion d'une importance fondamentale.

The following publication treats of the question of the working-together of concrete and steel. One has hitherto confined himself, to find out the force which resulted by pulling out or pushing in steel rods out of concrete bodies, and trying to deduce herefrom figures for adhesion or sliding-resistance, transferring this directly on to such bodies, which are subjected to bending. The kind of working-together of concrete and steel, as has taken place by all tests made up to the present in this line, by no means corresponds to the effective manner of working. Just so is the assumption wrong, that between concrete and steel an adhesion is existing.

The investigations made at the testing laboratory at Zurich by the author, as a basis for this publication, on reinforced concrete beams, have elucidated, that a mere mechanical working-together of the two materials takes place.

The reason for the excellent qualities of the combination, concrete and steel, is in the shrinking of the concrete during the hardening process and the clamping together of the steel, this however owing to its elasticity and closely-fitting qualities, enables it to execute all the movements of the concrete molecules.

There is no adhesion between concrete and steel; and the tests, contained in the publication, have shown, that the working-together of the two bodies depends on the tensile strength of the concrete, the superficial appearance of the steel and on the manner of anchoring the steel in the concrete. A good fastening of the steel with the compression part of the concrete beam and an uneven surface of the reinforcement, which works equally as an anchoring, cause an increase of the loading capacity of the construction.

It is therefore necessary in the case of reinforced concrete constructions, to ensure a high tension capacity of the concrete, which hitherto was only too little taken into consideration, so as to fasten the steel with the concrete in such a manner, as to make a movement of the iron impossible even after the overcoming of the tension capacity of the concrete.

This is a short abstract of the sub-jointed publication, which was written with the help of tests for the enlightenment of the manner of the working-together of concrete and steel with the endeavour to procure a little clearness in regard to this most fundamental notion.

Auf keinem Gebiete der technisch-wissenschaftlichen Forschung wird in den letzten Jahren mehr gearbeitet als auf dem Gebiete des armierten Betons. Die großen Vorzüge dieses Materials und dessen vielseitige Verwendungsmöglichkeit haben es zustande gebracht, eine vollständige Umwälzung im Bauwesen hervorzurufen, ohne daß Ergebnisse von wissenschaftlichen Forschungen vorlagen. Es ist also nur die logische Folge, daß sich das Bestreben geltend macht, eine verläßliche, einwandfreie Theorie zu schaffen, so verläßlich, als sie bis zu einem gewissen Grade für andere Materialien besteht. Ob und wie weit dies bei Beton möglich ist, wird die Zukunft lehren. Man darf nicht vergessen, wie schwierig es ist, Gesetze aufzustellen für einen unhomogenen Körper, wie es der Beton ist, dessen Festigkeiten und physikalische Eigenschaften nicht nur vom Zement, sondern ebenso von den Kies-, Sand- und Wasserzusätzen abhängen, deren Eigenschaften aber von lokalen Verhältnissen abhängig sind; und jedermann, der mit dem Wesen des Betons und armierten Betons vertraut werden will, wird sich klar, daß eine Erkenntnis der inneren Eigenschaften dieses Materials nur auf Grund eingehender wissenschaftlicher Untersuchungen möglich ist. Derartige Versuche wurden bisher allerorts in großer Zahl durchgeführt und haben zur Aufstellung von Theorien geführt, die als Grundlage für die Berechnungen in der Praxis dienen. Wenn aber je eine Theorie grau war, so ist es die Theorie des armierten Betons.

Es ist bekannt, daß das Eisen den armierten Betonkonstruktionen die Fähigkeit verleiht, große Zugbeanspruchungen aufzunehmen. — Wie kommt das Zusammenwirken dieser grundverschiedenen Materialien, Eisen und Beton, zustande? Man hat von Adhäsion gesprochen, später ist man auf die Haftfestigkeit gekommen und hat hierfür Zahlen angegeben, ähnlich wie für die Zug-, Druck- oder Scherfestigkeit, ohne sich über das Wesen des Zusammenwirkens die notwendige Klarheit zu verschaffen.

Bevor der Verfasser auf die Besprechung seiner zur Klarstellung des Zusammenwirkens von Beton und Eisen hinzielenden Untersuchungen eingeht, ist es notwendig, einen kurzen Ueberblick über die bisher auf diesem Gebiete gemachten Forschungen zu geben. Alle zu diesem Zwecke ausgeführten Versuche beschränken sich darauf, die Größe des Widerstandes zu bestimmen, der sich beim Herausziehen oder -drücken eines im Beton eingebetteten Stabes ergibt, und die daraus resultierende Kraft pro cm^2 Oberfläche des Eisenstabes wird Haftfestigkeit und Gleitwiderstand genannt. (Die letzte Bezeichnung hat eine Berechtigung, weil sich bei diesen Versuchen tatsächlich der Widerstand gegen das Gleiten von Eisen im Beton ergibt.) Es ist aber einleuchtend, daß die auf diese Weise bestimmten Zahlen keinen Aufschluß geben können über das Zusammenwirken der beiden Stoffe bei armierten Betonkonstruktionen, weil hier nie eine Kraft direkt am Eisen angreift, auch nicht bei den direkt auf Druck beanspruchten Säulen, wie dies bei den Versuchen von Bach und anderen Forschern geschieht, sondern die Kraft sich auf die Verbindung von Eisen und Beton gleichmäßig verteilt.

Die ersten Versuche auf diesem Gebiete rühren von Bauschinger her, welcher für die „Adhäsion“ zwischen Eisen und Zementmörtel einen Wert von 40 bis 47 kg/cm^2 Eisenoberfläche gefunden hat. Die Art der Durchführung dieser Versuche ist nicht bekannt, und es wurde, da keine Publikation vorliegt, lange Zeit daran gezweifelt, ob Bauschinger tatsächlich diese Werte bestimmt hat. Es ist aber anzunehmen, daß die Versuche von Bauschinger in derselben Weise durchgeführt wurden wie alle anderen diesbezüglichen Versuche, welche ebenso hohe und höhere Werte ergeben.

Die Versuche des „Service français des phares et balises“ mit Eisenstäben, die 60 cm tief mit Portlandzement in Steinblöcken eingebettet waren, ergaben Gleitwiderstände von 20 bis 48 kg/cm^2 Eisenoberfläche im Alter von 4 Wochen. Diese Versuche sind auch deshalb von Bedeutung, weil sie rechnungsgemäß feststellen sollen, daß die spezifische Kraft zur Ueberwindung des Gleitwiderstandes, bezogen auf den Querschnitt der Eisenstäbe, unabhängig von der Größe der Eisenoberfläche und gleich war der Elastizitätsgrenze des Eisens, anderseits die Beschaffenheit der Oberfläche auf den Gleitwiderstand keinen Einfluß habe; beide Behauptungen sind aber durch die Versuche von Bach und Ferret widerlegt.

Die umfassenden Versuche Bachs zur Bestimmung des Gleitwiderstandes wurden an quadratischen Prismen von 22 cm Seitenlänge und Höhen von 10 bis 30 cm durchgeführt. Hierbei wurden die gleichen Betonmischungen mit verschiedenen Wasserzusätzen, Armierungen von verschiedener Stärke und Einbettungslänge verwendet. Die sich hieraus ergebenden Folgerungen enthalten unter anderen zwei wichtige Resultate: die Abhängigkeit des Gleitwiderstandes von der dem Beton beigegebenen Wassermenge und die Abnahme des Gleitwiderstandes mit zunehmender

Länge des einbetonierten Eisens. Bach erhält Werte für den Gleitwiderstand bis zu einem Höchstmaß von 41,6 kg/cm² Oberfläche, woraus man folgern kann, daß die Bauschingerschen Zahlen auf Versuche zurückzuführen sind, die unter ähnlichen Verhältnissen ausgeführt wurden.

Mörsch hat ähnliche Versuche an Betonkörpern mit noch kleineren Dimensionen vorgenommen und daraus Zahlenwerte bestimmt, die über 40 kg/cm² geben, und aus diesen Versuchen noch höhere Zahlenwerte abzuleiten gesucht.

Die von Bach ausgeführten Versuche zur Bestimmung des Gleitwiderstandes sucht Mörsch mit den von ihm gefundenen Werten für die Haftfestigkeit in Uebereinstimmung zu bringen und schlägt für die Haftfestigkeit 38 kg/cm² vor, was bei fünffacher Sicherheit eine zulässige Haftfestigkeit von 7,5 kg/cm² bedeuten würde.

An der Königlichen Materialprüfungsanstalt in Charlottenburg wurden 9 Mörtelprismen in der Mischung 1 : 3, 5 × 5 cm Querschnitt und Eiseneinlagen von 5,7 bis 10 mm Durchmesser, 4 Jahre alt, Versuchen unterworfen, die Haftfestigkeitszahlen von 3,5 bis 21 kg/cm² ergaben.

Ferret findet aus seinen Versuchen die Abhängigkeit der „Adhäsion" von der Beschaffenheit der Oberfläche des eingebetteten Eisens und in neuerer Zeit, ähnlich wie Bach, die Abhängigkeit des Gleitwiderstandes von dem Wasserzusatz, mit dem Unterschiede, daß der von ihm hieraus ermittelte günstigste Wasserprozentsatz für Betoneisenkonstruktionen höher ist als der von Bach (etwa 21 vH. gegen 15 vH. bei Bach). Tedesco u. a. haben Zahlen für Adhäsion oder Haftfestigkeit, wie sie abwechselnd bezeichnet werden, die auf demselben Wege gefunden wurden und immer zwischen 20 und 40 kg/cm² liegen.

Kleinlogel berechnet aus seinen Versuchsbalken, an welchen die Dehnungsfähigkeit von armiertem und nicht armiertem Beton untersucht wurde, Haftziffern von über 40 kg/cm², von welchen er behauptet, daß sie noch größer geworden wären, wenn nicht aus einem anderen Grunde der Bruch eingetreten wäre.

Dr. v. Emperger hat auf Grund von Biegeversuchen und Rechnung aus einer großen Zahl von Versuchsresultaten den Vorschlag gemacht, die in manchen Vorschriften enthaltenen hohen Haftziffern (z. B. in den „Leitsätzen" in Deutschland 30 kg/cm²) auf 16 bis 25 kg/cm² zu erniedrigen, je nach der Beschaffenheit der Form der verwendeten Eisen.

Wie aus dem Ausgeführten ersichtlich ist, klammert man sich an Zahlen von zweifelhaftem Wert. Man spricht von Adhäsionsfestigkeit, von Haftspannung wie von Zugfestigkeit oder Zugspannung und vergißt, daß das Zusammenwirken von Beton und Eisen auf einem bloß mechanischen Nebeneinanderwirken der beiden Stoffe beruht, das so lange dauert, als die mechanische Verbindung anhält. Diese mechanische Verbindung kommt dadurch zustande, daß sich der

Beton beim Erhärten zusammenzieht und das Eisen festklemmt, das vermöge seiner großen Elastizität und der dadurch hervorgerufenen Anpassungsfähigkeit imstande ist, alle Bewegungen der Betonmoleküle mitzumachen, die durch innere Verschiebungen oder durch äußere Kraft bedingt sind.

Wie lange dauert die Haftfähigkeit des Eisens am Beton, und welche Mittel gibt es, sie zu erhöhen? Es gibt keine Haftfestigkeit; es ist daher auch ein Widerspruch, eine Zahl hierfür festsetzen zu wollen. Es kann sich nur darum handeln, die Dauer der Haftfähigkeit des Eisens am Beton und die Art des Zusammenwirkens der beiden Materialien kennen zu lernen. Daraus können die rationellste Art der Eiseneinlagerung und die Mittel zur Erhöhung der Haftfähigkeit abgeleitet werden.

Der Verfasser hat zur Klarstellung dieser für armierte Betonkonstruktionen so wichtigen Frage Untersuchungen vorgenommen, auf deren Besprechung im folgenden eingegangen werden soll.

Untersuchung der verwendeten Materialien.

Zur genauen Feststellung des Charakters des verwendeten Betons und der Armierung ist es notwendig, eine kurze Besprechung der Bestandteile nach deren Herkunft und Eigenschaften vorangehen zu lassen.

Zement: Zur Herstellung des Betons wurde ein langsam bindender Schweizer Portlandzement verwendet und den normenmäßigen Proben unterworfen, welche nachstehende Resultate ergaben. Als spezifisches Gewicht ergab sich 3,0 und ein Glühverlust von 6,1 vH.; hierzu sei bemerkt, daß das spezifische Gewicht etwas geringer ist als gewöhnlich, weil der Zement durch längere Lagerung Wasser und Kohlensäure aus der Luft aufnehmen konnte, ein Umstand, der sich auch in dem hohen Glühverlust bemerkbar macht. Das Volumgewicht im Einlieferungszustande betrug 1,011 kg für 1 Liter, maschinell eingerüttelt 1,450 kg für 1 Liter. Siebversuche ergaben im Mittel aus zwei Versuchen 0,25 vH. Rückstand bei einem 900-Maschensieb und 1 vH. bei einem 4900-Maschensieb. Die im Zement enthaltenen kleinen Knollen wurden vor der Verwendung durch Aussieben entfernt. Als Bindezeit ergaben sich 20 Stunden. Die Volumbeständigkeitsproben im Wasser, an der Luft, die Darrprobe, Dampfdarrprobe und die Warmwasserbadprobe ergaben ein vollständig befriedigendes Resultat, das für die Güte des verwendeten Zements ausschlaggebend ist. Die normenmäßige Zug- und Druckfestigkeit mit einem Wasserzusatz von 10 vH. ergaben nach Entnahme aus dem Kaltwasserbade:

	für Zug	für Druck
nach 7 Tagen. . . .	18,9 kg/cm²	191 kg/cm²
„ 28 „	25,1 „	273 „

Sand und Kies: Der bei den Versuchen verwendete Sand war rein und scharfkantig und stammt ebenso wie der Kies aus dem Züricher See. Es ist dasselbe Material, wie es in Zürich und Umgebung bei Betonbauten verwendet wird. Vor der Verwendung wurden die ganz groben Stücke durch Aussieben entfernt, derart, daß die maximalen Korngrößen etwa 1,5 cm waren. Gleiche Volumteile von Sand und Kies wurden durch

wiederholtes Umschaufeln durcheinandergemischt, und von diesem Gemenge wurden Volumgewicht und Korngröße genau bestimmt. Als Mittel aus drei Versuchen ergab sich ein Litergewicht von 1,685 kg mit 295 cm³ Hohlräumen. 2000 g des Gemenges wurden Siebversuchen unterworfen und ergaben im Mittel aus drei Versuchen bei einem Sieb mit 8 mm-Löchern einen Rückstand von 210 g; die übriggebliebene Menge ergab bei einem Sieb

mit 2	mm-Löchern	einen	Rückstand	von	883	g
„ 1,5	„	„	„	„	135	„
„ 1	„	„	„	„	169	„
„ 0,5	„	„	„	„	287	„
mit kleineren als 0,5	„	„	„	„	311	„
		und einen	Verlust	„	5	„

oder, in Prozenten der Meßmenge von 2000 g ausgedrückt, Rückstände von 10,5, 44,2, 6,7, 8,5, 14,4, 15,5; das Gemenge enthielt also, wie aus diesen Zahlen ersichtlich ist, ein gutes Gemisch von Sand und Kies verschiedenster Feinheit bis zu einer maximalen Korngröße von 1,5 cm.

Mischungsverhältnis und Herstellung des Betons.

Je 1000 Liter Kies- und Sandgemenge wurden mit 270 kg Zement gemischt; das entspricht etwa 300 kg Zement für 1 m³ fertigen Beton, eine Mischung, die oft bei armierten Betonkonstruktionen angewendet wird. Da bei derartigen Fällen, wie der Herstellung von Versuchskörpern, wegen der geringen Betonmengen eine maschinelle Mischung nicht am Platze ist, wurde die Mischung mit Hand vorgenommen. Das für die Herstellung der Balken notwendige Gemenge von Sand und Kies wurde mit der entsprechenden Zementmenge trocken viermal gut durchgeschaufelt; weitere vier Male geschah das Durchschaufeln unter fortwährendem Zugießen von Wasser aus einer Spritzkanne. Auf diese Weise wurde die Mischung vollständig und gleichmäßig befeuchtet. Vor dem Einbringen des Betons in die Formen wurde das ganze Gemisch abermals gut durchgeschaufelt.

Wasserzusatz: Wenn man bedenkt, daß im Sand und Kies auch dann noch Wasser enthalten ist, wenn, wie bei der Erzeugung der in Rede stehenden Probekörper, das Material Gelegenheit hatte, durch Lagern in einem geheizten und überdeckten Raum gut auszutrocknen, so wird man einsehen, daß jede prozentuelle Angabe des Wasserzusatzes keinen ganz genauen Aufschluß über die im Beton enthaltene Wassermenge geben kann. Es sei daher nur die in Prozenten des Volumens des Trockengemisches ausgedrückte Wassermenge angegeben, die sich mit 10 vH. ergab.

Maßgebend für den Wasserzusatz war das Bestreben, einen durchaus plastischen Beton herzustellen, der sich gut stampfen ließ, ohne die von

einigen Forschern als zur Erreichung großer Festigkeiten als günstig bezeichnete Wassermenge von 12 bis 15 vH. zu überschreiten. Die Größe von 10 vH. im gegebenen Falle wurde dadurch bestimmt, daß der Mischung beim Durchschaufeln so lange Wasser zugesetzt wurde, bis es keine trockenen Stellen gab. Die Mischung erwies sich tatsächlich zum Stampfen sehr geeignet. Ob bei diesem Wasserzusatz die größte mögliche Festigkeit erzielt wurde, wurde nicht untersucht, ist aber für den Gang der Untersuchung irrelevant. Das Wasser war rein und längere Zeit vor der Verwendung abgestanden, da bei der Herstellung der Versuchskörper im Winter direktes Brunnenwasser zu kalt gewesen wäre.

Eiseneinlagen: Zur Armierung wurden verwendet: Rundeisen von verschiedenen Durchmessern und Quadrateisen — beides Flußeisen — und zwei in Amerika als Armatur sehr häufig angewendete Stahlsorten: das gewundene „Ransome"-Eisen und das nach seinem Patentinhaber Johnson benannte, mit Knoten versehene viereckige „Johnson"-Eisen. Leider war es dem Verfasser nicht möglich, die in Amerika so oft verwendeten „Thacher"-Eisen für die Untersuchungen zu erhalten. Diese letztgenannten Eisen werden in Amerika hauptsächlich zur Erhöhung der Haftfähigkeit des Eisens verwendet und sollen bei unseren Versuchen zum Vergleiche mit der Haftfähigkeit glatter Eisen herangezogen werden. Ueber die Festigkeitsverhältnisse soll bei den Vorproben gesprochen werden.

Herstellung der Probekörper: Es wurden insgesamt 16 Balken von den in Fig. 2 und 2a (siehe Seite 13 u. 14) ersichtlichen Dimensionen und 4 Betonprismen $12 \times 12 \times 36$ aus dem gleichen Beton hergestellt, letztere zur Prüfung der Festigkeit des Betons. Da die Herstellung im Winter erfolgte, wurde sie in einem gedeckten und geheizten Raume vorgenommen. Für die Herstellung der Balken dienten Holzformen, die aus 4,5 cm starken Brettern zusammengestellt waren und vor ihrer Verwendung eingeölt wurden. Die Lage der Armatur wurde durch eingelegte Holzstücke genau festgelegt, die erst dann entfernt wurden, wenn eine größere eingestampfte Betonmenge ein Verschieben der Armatur unmöglich machten. Die Ausschalung der Probekörper erfolgte nach 48 Stunden. Täglich wurden die Körper einmal mit Wasser bespritzt, um ein gleichmäßiges Erhärten des Betons zu ermöglichen, und über Nacht wurden die Körper mit Säcken überdeckt, um die Einwirkung der Kälte zu verhindern.

Anordnung der Untersuchungen.

Die Versuche lassen sich in 2 Gruppen teilen:

1. Die Vorversuche umfassen:

   a) Elastizitätsmessung am Betonprisma,

b) Bestimmung der Zugfestigkeit an ebensolchen Prismen durch Biegeproben,
c) Bestimmung der Druckfestigkeit des Betons aus Druckversuchen mit den Bruchstücken der letzten Probe und aus Probe a,
d) Bestimmung der Scherfestigkeit des Betons,
e) Elastizitätsbestimmungen an je einem Stück der verwendeten Eisensorten,
f) Festigkeitsbestimmungen an den zur Armierung verwendeten Eisensorten.

2. Die Hauptversuche der Bestimmung der Bruchlasten an 16 Balken, die Beobachtung der hierbei auftretenden Erscheinungen und die Ausrechnung der sich aus den Versuchsresultaten ergebenden charakteristischen Spannungen. Hierbei wurde auch die Durchbiegung in der Mitte gemessen, um deren Abhängigkeit von verschiedenen Belastungsstadien zu ermitteln.

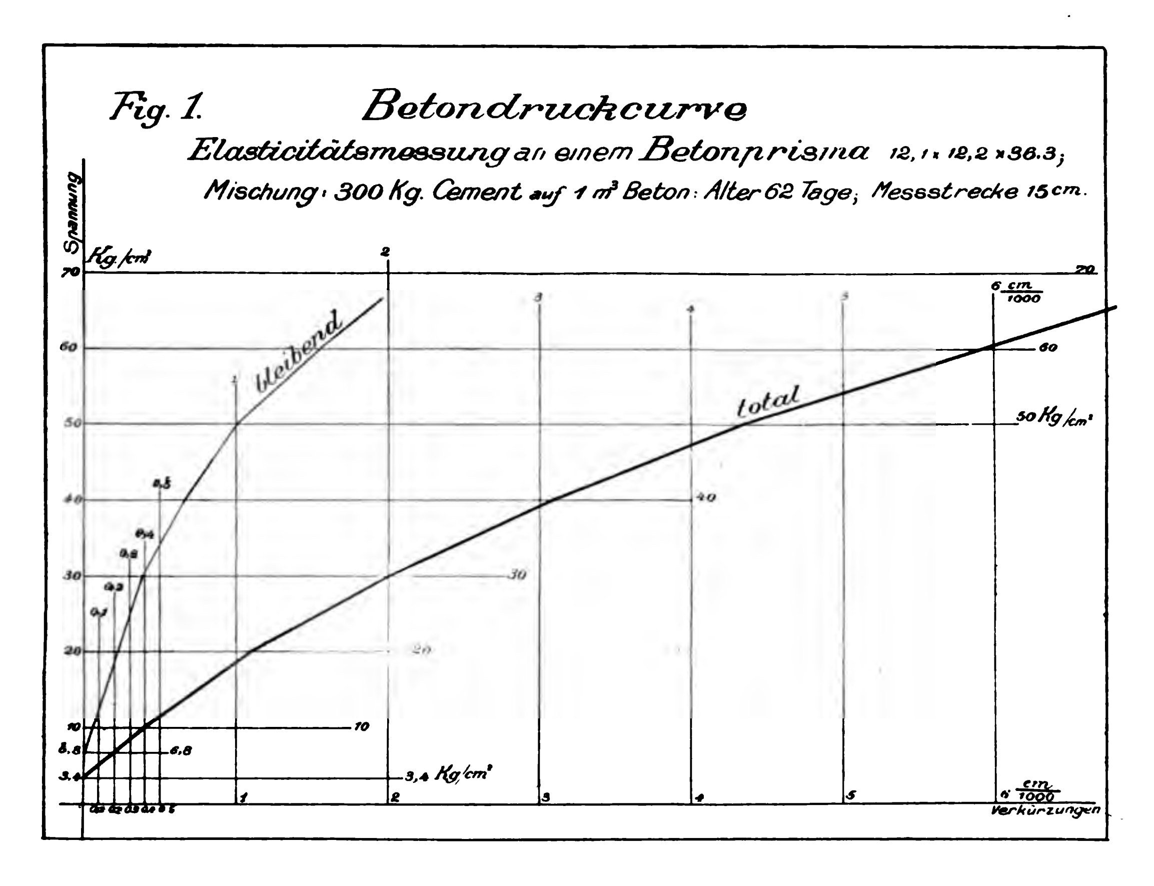
---

1. Die Vorversuche.

a) Elastizitätsmessungen am Beton.

Ein Prisma mit den Abmessungen 12,1 × 12,2 × 36,5, zu gleicher Zeit und aus demselben Material hergestellt wie die Balken, dessen Deckflächen vor der Probe sorgfältig geglättet wurden, wurde in der liegenden Werdermaschine der Druckprobe unterworfen und mittels der Bauschingerschen Spiegelapparate die Verkürzungen gemessen. An beiden Seitenflächen des Prismas waren in deren Achse auf eine Meßstrecke von 15 cm die Spiegelvorrichtungen angebracht und die Bewegungen der Spiegel durch ein Fernrohr beobachtet; die Einrichtung war derart, daß die Ablesungen $^1/_{1000}$ cm angaben und bis auf $^1/_{100000}$ cm geschätzt werden konnten. Die Summe der auf die Ausgangsbelastung reduzierten Ablesungen links und rechts, die in Tabelle 1 angegeben sind, ergaben bei unserer Einrichtung direkt die Längenänderung in der Achse des Prismas. Die Werte wurden in Fig. 1 derart aufgetragen, daß auf der Ordinate die spezifischen Druckspannungen und auf der Abszisse die Verkürzungen verzeichnet wurden. Die so erhaltene Betondruckkurve, in der auch die bleibenden Verkürzungen eingetragen sind, geben ein anschauliches Bild von der Aenderung des Elastizitätsmoduls E mit zunehmender Spannung. Um genauere Werte für E zu erhalten als durch bloße Ermittlung der Tangente in verschiedenen Punkten der Kurve, wurde der Weg der Rechnung betreten und die jeweiligen bleibenden Verkürzungen aus der Kurve abgegriffen.

Der Zusammendrückungskoeffizient α oder dessen reziproker Wert E, der Elastizitätsmodul bestimmt sich für Beton innerhalb sehr kurzer Spannungsintervalle aus der Gleichung



$$\varepsilon = \alpha\,\sigma; \quad \text{da } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \sigma = \frac{P}{F}$$

$$\text{ist } \frac{1}{\alpha} = \frac{P}{F}\,\frac{l}{\Delta l} = E.$$

Im gegebenen Fall ist l, die Meßlänge, 15 cm und $F = 147{,}6$ cm² da ferner Δl in $^1/_{1000}$ cm gerechnet ist, ergibt die Gleichung für

$$E = \frac{1}{\alpha} = \Delta\sigma \frac{15}{\frac{\Delta l}{1000}}$$

$$E = \frac{1}{\alpha} = 6{,}8 \times \frac{15000}{\Delta l}$$

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{102000}{\Delta l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Der auf diese Weise bestimmte Zusammendrückungskoeffizient α entspricht, da die bleibenden Verkürzungen in Abzug gebracht sind, dem reziproken Wert des aus den federnden Zusammendrückungen sich ergebenden Elastizitätsmoduls, der zur Beurteilung der Formänderungen des Betons ausschlaggebend ist.

Tabelle 1.

Elastizitätsmessungen am Betonprisma.

12,1 × 12,2 × 36,5. $F = 147{,}6\ cm^2$. Gewicht: 11,7 kg. Meßstrecke: 15 cm.

P in t	$\sigma = \frac{P}{F}$ kg/cm²	Zusammendrückung in $^1/_{1000}$ cm			Δl	$E = \frac{1}{\alpha}$
		total	bleibend	federnd		
0,5	3,4	0	0	0		
1	6,8	0,18	0	0,18	0,33	315 000
2	13,7	0,63	0,12	0,51	0,41	254 000
3	20,3	1,14	0,22	0,92	0,51	204 000
4	27,1	1,75	0,30	1,45	0,55	189 000
5	33,9	2,45	0,45	2,00	0,56	185 500
6	40,6	3,16	0,60	2,56	0,56	185 500
7	47,4	3,92	0,80	3,12	0,71	147 000
8	54,1	4,97	1,14	3,83	0,75	139 000
9	60,8	6,08	1,50	4,58	0,75	139 000
10	67,5	7,35	2,02	5,33		

Plötzlicher Bruch bei 17,5 t. $\sigma_d = \frac{P}{F} = \frac{17\,500}{147{,}6}$ $\sigma_d = 119$ kg.

b) Bestimmung der Zugfestigkeit des Betons.

Es hat sich gezeigt, daß eine direkte Bestimmung der Zugfestigkeit des Betons nicht nur schwer durchführbar, sondern auch nicht immer verläßlich ist. Durch die Versuche von Hanisch und Spitzer in Wien, die durch spätere Versuche bestätigt wurden, hat sich gezeigt, daß die auf Grund der Navierschen Hypothese gerechneten Biegungsfestigkeiten eines auf Biegung beanspruchten Betonkörpers etwa das Doppelte der wirklichen Zugfestigkeit ist. Es wurden daher zwei Proben mit Prismen auf der 5000 kg-Biegemaschine von Amsler-Laffon gemacht und die Werte für die Zugfestigkeit daraus gerechnet.

Spannweite: 0,30 m; Last in der Mitte.

Prisma Nr.	b in cm	h in cm	$W = \frac{b h^2}{6}$ cm³	Ermittelt P in kg	$M = \frac{P \times 0{,}30}{4}$ kgcm	Biegungsfestigkeit $s = \frac{M}{W}$ kg/cm²	Zugfestigkeit $\sigma_z = \frac{s}{2}$	Gewicht kg
1	12,3	12,0	296	802	6020	20,4	10,2	11,4
2	12,1	11,9	285	722	5420	19,1	9,55	11,3

Aus den beiden letzten Werten ergibt sich für die Zugfestigkeit des verwendeten Betons

$$\sigma_z = 9{,}9 \text{ kg bis } 10 \text{ kg/cm}^2.$$

c) Druckfestigkeit des Betons.

Die Bruchstücke der letzten Probe wurden auf der Amslerschen Presse Druckproben unterworfen und ergaben folgende Werte:

Prisma	l in cm	b in cm	F in cm² $= bl$	Ermittelt P in kg	$\sigma_d = \frac{P}{F}$ kg/cm²
1	12	12,3	147,5	17 920	122
				16 720	114
2		12,1	145,0	15 450	107
				17 930	124

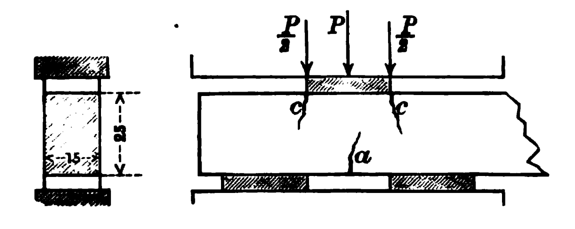
Aus der Elastizitätsmessung: 119

Aus den 5 Werten ergibt sich für die Druckfestigkeit des Betons im Durchschnitt:

$$\sigma_d = 117 \text{ kg/cm}^2.$$

d) Abscherungsversuche.

Mit den Bruchstücken des nicht armierten Probebalkens Nr. 1 wurden auf der Amslerschen Presse drei Versuche zur Bestimmung der Scherfestigkeit des Betons in ähnlicher Weise durchgeführt, wie es Mörsch gemacht hat. Drei Stahlplatten wurden in der Presse derart eingelegt, wie es bei stehende Skizze zeigt. Nachdem vorher ein Riß a in der Mitte die Ueberwindung der Biegungsfestigkeit angezeigt hatte und die Belastung der Maschine für einen Augenblick zurückgegangen war, konnte der Druck fortgesetzt werden, bis an den Stellen c der Riß ein Abscheren des Betons zur Folge hatte. Aus drei Versuchen ergaben sich für P: 14,2, 15, 15,9 t; im Mittel 15 t. Die Kraft, die das Abscheren bei c bewirkte, war daher 7,5 t.



Da die Fläche $15 \times 25 = 375$ cm beträgt, berechnet sich die Scherfestigkeit mit

$$\frac{7500}{375} = 20 \text{ kg/cm}^2.$$

Dieser Wert kann wohl nicht als ganz einwandfrei gelten, da hier tatsächlich kein reines Abscheren vorliegt. Er zeigt aber, was schon wiederholt gezeigt wurde, daß die Scherfestigkeit höher ist als die jeweilige Zugfestigkeit des Betons, und sie wäre noch höher, wenn die Einspannung vollständig wäre.

e) Elastizitätsmessungen an den Eisenstäben.

Die Elastizitätsmessungen wurden an der Werdermaschine mit Hilfe der Bauschingerschen Spiegelapparate vorgenommen und ergaben für das verwendete Flußeisen:

$$E = 2060 \text{ t/cm}^2$$

und für die Elastizitätsgrenze nahezu 2500 kg/cm². [Hierzu sei bemerkt, daß bei diesen Untersuchungen tatsächlich die Proportionalitätsgrenze ermittelt wurde, die nach Martens und Bach von der Elastizitätsgrenze etwas verschieden ist; der Unterschied ist aber gering.]

Für das Ransome-Eisen ergaben sich

$$E = 1960 \text{ t/cm}^2$$

und die Elastizitätsgrenze mit 3090 kg/cm²; für das Johnson-Eisen

$$E = 2150 \text{ t/cm}^2$$

und die Elastizitätsgrenze mit 3756 kg/cm².

f) Festigkeitszahlen der Armierungen.

Diese wurden auf der Zerreißmaschine bestimmt; die nun folgenden Angaben sind direkt aus diesen Versuchen abgeleitet.

Es ergaben sich für das

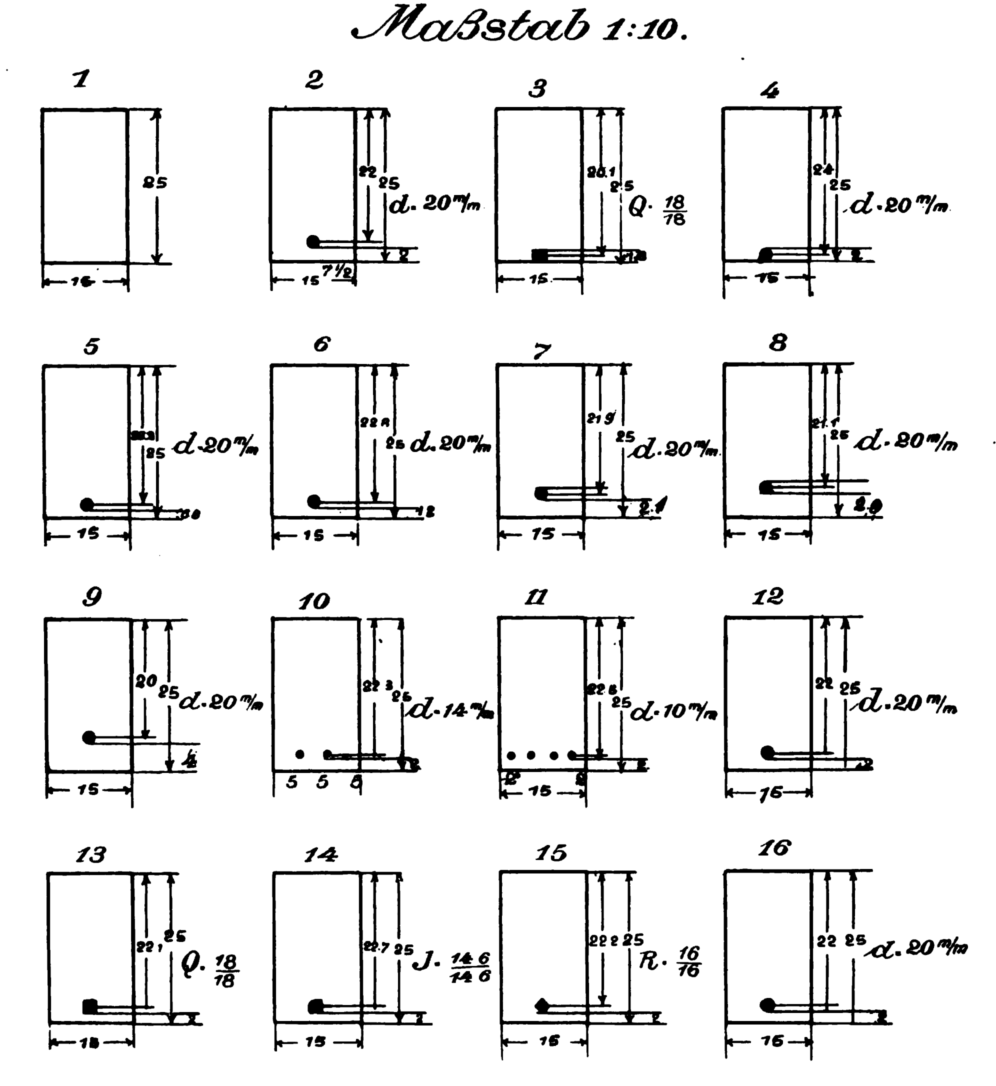
	Elast.-Grenze	Streckgrenze in kg/cm²	Zugfestigkeit
10 mm starke Rundeisen . . .	2590	3370	4350
14 „ „ „ . . .	2590	3130	4110
20 „ „ „ . . .	2590	2920	4060
18 : 18 mm starke Quadrateisen .	2590	2970	3900
„Ransome“-Eisen	3090	5680	6500
„Johnson“-Eisen	3756	4670	7380

2. Hauptversuche.

Für die Bestimmung des Einflusses der Haftfähigkeit bei armierten Betonbalken wurden vom Verfasser 16 verschieden armierte Balken gewählt. Wohl wäre es gut gewesen, eine größere Anzahl von Versuchsbalken herzustellen, derart, daß für jede Armierungsart wenigstens zwei Proben

hätten gemacht werden können. Da aber der Verfasser aus eigenen Mitteln die nicht geringen Kosten dieser Untersuchungen zu bestreiten hatte, hat er sich mit einzelnen Proben begnügt, umsomehr, als es sich nicht darum handelte, eine Uebereinstimmung von gewissen Zahlenwerten zu erzielen,

Fig. 2. Querschnitte der Versuchsbalken

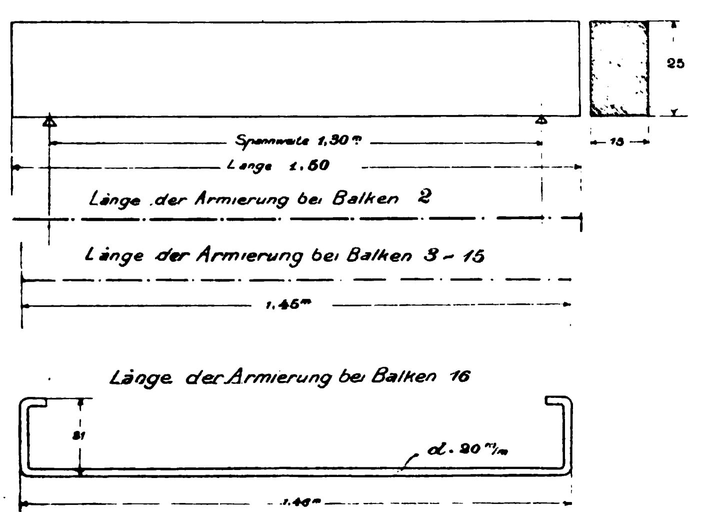


sondern um die Klarlegung einer Eigenschaft, die sich bei jedem Balken mit der Lage, der Oberflächenbeschaffenheit und der Festigkeit der Armatur ändert.

Die 16 Balken, deren Form und Armierungsart aus Fig. 2 und 2a ersichtlich sind, wurden genau so hergestellt, wie man in der Praxis arbeitet,

aber mit der dort leider nur zu oft vermißten Achtsamkeit sowohl in der Herstellung des Betons und im Stampfen, als auch in der Einlage der Armierungsstangen. Die Probekörper wurden wegen der Kälte in einem gedeckten und geheizten Raum hergestellt in der bereits beschriebenen

Dimensionen eines Probebalkens Fig. 2a
und Anordnung der Armierung



Weise. Eine Woche vor Ausführung der Untersuchungen wurden sie von dem Herstellungsort nach der Materialprüfungsanstalt gebracht und für die Versuche derart hergerichtet, daß die Auflagerungsstellen sorgfältig geglättet und geebnet wurden. Zur Sichtbarmachung der Risse wurden die Balken mit einem ganz dünnen Kalkbrei angestrichen, was, wie sich bei vorherigen Versuchen zeigte, sehr gute Dienste tut.

Bei Untersuchungen in Ingenieurlaboratorien ist es wohl am zweckmäßigsten, die Probekörper so vorzubereiten, als ob es Ausführungen der Praxis wären, und in nicht zu kleinen Abmessungen; dies gilt insbesondere bei Untersuchungen mit armiertem Beton. Bei der Auswahl des Materials soll man nicht immer darauf bedacht sein, die günstigsten Bedingungen auszusuchen. Zweckentsprechender ist es, die Materialien zu wählen, die man vorfindet, und deren Eigenschaften nach jeder Richtung hin festzustellen. Hält man an diesen Grundsätzen fest, so wird man Resultate bekommen, die sich mit denjenigen der Praxis direkt vergleichen lassen.

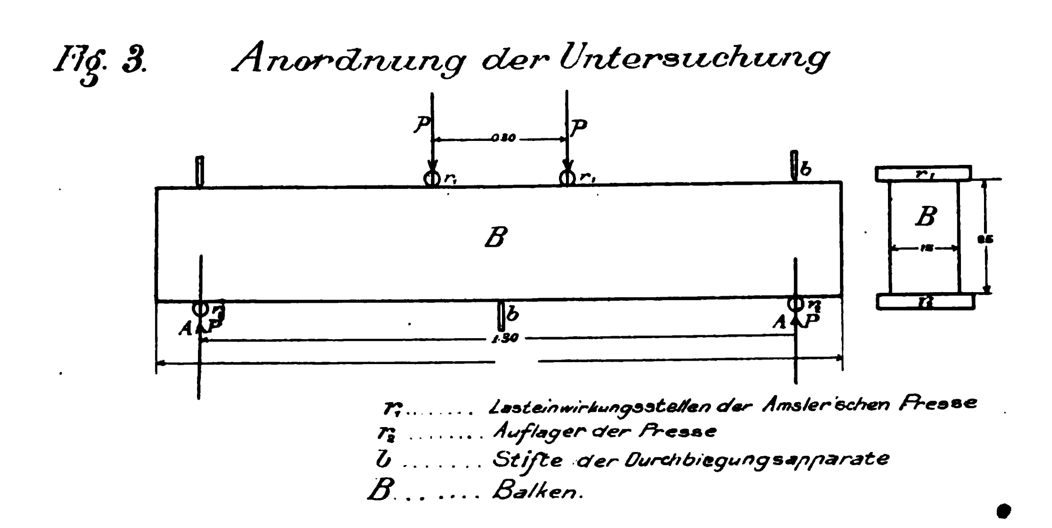
Was die Wahl und Anordnung der Armierung anbelangt, sei vorerst bemerkt, daß ihr Verhältnis zum nutzbaren Betonquerschnitt (siehe Tabelle 2 später) derart gewählt wurde, daß der Bruch ebensowohl durch die Festigkeitseigenschaften des Eisens als auch die des Betons erfolgen kann.

Die Eiseneinlagen wurden ohne Haken und ohne Abbiegung angenommen, damit eine nach Ueberwindung der Haftfähigkeit eintretende

Bewegung des Eisens kein Hindernis finde. Von der Anordnung der Bügel wurde aus demselben Grunde abgesehen, umsomehr, als der Wert solcher Bügel sehr zweifelhafter Natur ist. Ueber die Anordnung der verschiedenen Armierungen soll bei jedem einzelnen Balken getrennt gesprochen werden.

Die Versuche wurden auf der 100 t-Presse von Amsler-Laffon durchgeführt, nachdem diese vorher mit jenen Anordnungen ausgestattet wurde, die für Biegeversuche notwendig sind (siehe Abb. 1 und Fig. 3). Die Zentren der als Lasteinwirkungsstellen und als Auflager tätigen 30 cm starken Rollen waren symmetrisch zur Mitte im gegenseitigen Abstand von 0,30 m beziehungsweise 1,30 m angeordnet (siehe Fig. 3); dadurch

Fig. 3. Anordnung der Untersuchung



wurde auf der Strecke von 30 cm ein konstantes Moment erzielt, wenn man von der geringen Aenderung durch das Eigengewicht absieht, und auf beiden Seiten auf eine größere Länge (auf 50 cm) eine gleichbleibende Querkraft, welche für unsere Versuche ausschlaggebend ist, weil von dieser sowohl die Schubkräfte als auch die Haftfestigkeit abhängen, die den Gegenstand der Untersuchung bilden.

Die Durchbiegungsapparate (siehe Abb. 1) wurden in der Mitte und an beiden Auflagern angebracht, und die Durchbiegung in der Mitte ergab sich als die Differenz aus der mittleren Ablesung und dem arithmetischen Mittel der Ablesungen an beiden Auflagern.

Als Belastungsstufen wurden bis zum Auftreten der ersten Risse 200 kg gewählt, nach dem Auftreten derselben wurden die Belastungsstufen auf 300 oder 400 kg erhöht, je nach der Höhe der zu erwartenden Bruchlast.

Das Absuchen der Risse geschah nach jeder Belastung mit peinlicher Sorgfalt, und wurde deren Verlauf unter jeweiliger Angabe der die Risse bewirkenden Lasten verzeichnet.

Die Ablesungen der Durchbiegung, bezogen auf die Ausgangslesung als Nullpunkt, ebenso die charakteristischen Spannungswerte sind tabellarisch zusammengestellt.

Gang der Untersuchung und Berechnung.

Der der Untersuchung zugrunde gelegte Hauptgedanke ist folgender: Zwischen Eisen und Beton besteht eine bloß mechanische Verbindung, die bei der Ueberwindung der Zugfestigkeit, also beim ersten Auftreten der Risse, gelockert wird. Die Haftung ist aber auf der Strecke, wo die Zugfestigkeit des Betons noch nicht überwunden ist, vorhanden und verhindert den Bruch des Balkens. Die Armierung wirkt an der Rißstelle als Anker, und diese Wirkung wird so lange andauern, bis die Zugkraft des Eisens stark genug ist, das Eisen herauszuziehen. Bei allen Versuchsbalken traten dieselben folgenden Erscheinungen auf: Nach Ueberwindung der Zugfestigkeit des Betons traten an den Stellen des größten Biegungsmomentes vertikale Risse auf, und mit steigender Belastung erweiterten sich diese Risse, oder es traten je nach der Armierung außerhalb der Belastungsstellen neue Risse auf. An der letztentstandenen Rißstelle trat der Bruch ein, was an dem Zurückgehen der Belastungsskala der Maschine kenntlich war. Hierbei wurde jedesmal das Armierungseisen (von der Rißstelle bis zum Auflager) nachgezogen, und nach dem Abfallen der unteren Betonschichte konnte man sehen, daß die Oberfläche des Eisens dasselbe Aussehen hatte wie vor der Einbettung. Mit dem Aufhören der Haftung des Eisens am Beton trat der Bruch ein.

Um einen Ausdruck für die Größe der Haftfähigkeit zu erhalten, wurde folgender Rechnungsvorgang eingehalten:

An der den Bruch herbeiführenden Rißstelle herrscht im Eisen eine Zugkraft Z, welche ein Herausziehen des Eisens auf die Länge c bewirkt (siehe Fig. 4). Wenn h die Haftfähigkeit des Eisens für 1 cm² Eisenoberfläche bezeichnet, so ergibt sich für die Haftfähigkeit das Produkt aus der herauszuziehenden Eisenoberfläche uc und h.

Es besteht sonach die Gleichung (Fig. 4a)

$$Z = cuh$$

$$h = \frac{Z}{cu} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 1)$$

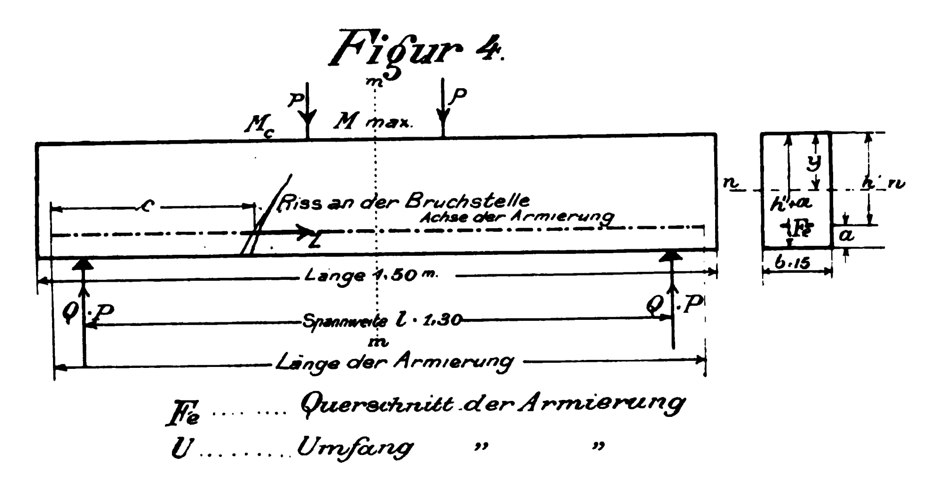
c und u sind jedesmal gegeben; kennt man auch Z, so läßt sich h, die Haftfähigkeit, finden. Es wäre nun aus den gegebenen Belastungen die Größe Z, der Spannung im Eisen, zu bestimmen.

$Z = \sigma_{Eisen} F_e$;

F_e = Querschnitt der Armierung

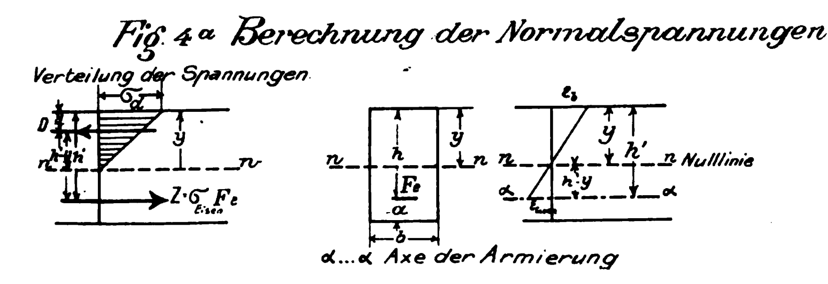
σ_{Eisen} = Zugspannung des Eisens für 1 cm².

Für diese Berechnungen sei die Annahme gemacht, daß die Kurve der Druckspannungen im Beton von der neutralen Achse bis zur äußersten



Faser geradlinig verläuft, daß also der Elastizitätsmodul für Beton konstant sei. Diese Annahme ist im gegebenen Fall hinreichend genau, wo es sich in erster Linie um die Lage des Druckmittelpunktes handelt, der sich mit der Aenderung der Nullinie nur wenig verschiebt.

Vorausgesetzt wird weiter, daß der Beton keine Zugspannungen aufnimmt. Für die Versuche zur Feststellung der Hafttähigkeit ist erst jener



Zustand von Interesse, bei welchem die Zugfestigkeit des Betons nicht mehr mitwirkt, also nach Auftreten der Risse auf der Zugseite.

Aus der ersten Voraussetzung ergibt sich die Gleichung

$$D = \frac{\sigma_d y b}{2};$$

D . . . Druckkraft des Betons

σ_d . . . max. Druckspannung im Beton für 1 cm².

Da $D = Z$, so erhält man, wenn für $Z = \sigma_{Eisen} F_e$ gesetzt wird:

$$b \sigma_d y = 2 \sigma_{Eisen} F_e \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Es verhält sich (siehe Abb. 4a)

$$\varepsilon_b : \varepsilon_{\text{Eisen}} = \frac{\sigma_d}{E_b} : \frac{\sigma_{\text{Eisen}}}{E_F} = y : (h' - y);$$

daraus:

$$\frac{\sigma_d}{E_b}(h' - y) = \frac{\sigma_{\text{Eisen}}}{E_F}\, y$$

$$\frac{\sigma_{\text{Eisen}}}{\sigma_d} = \frac{E_F}{E_b}\,\frac{h - y}{y}\,;\quad \frac{E_F}{E_b} = n$$

$$\frac{\sigma_{\text{Eisen}}}{\sigma_d} = n\,\frac{h' - y}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

E_F . . . Elastizitätsmodul des Eisens

E_b . . . „ „ Betons.

Setzt man die Gleichung 3) in 2) ein, so erhält man

$$by = 2\,F_e\,n\,\frac{h' - y}{y}.$$

oder

$$by^2 = 2\,F_e\,n\,(h' - y),$$

und daraus ergibt sich die Lage der Nullinie

$$y = \frac{nf_e}{b}\left[\sqrt{1 + \frac{2\,b\,h'}{nf_e}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die Gleichung für das Biegungsmoment an der Stelle des Risses M_c ergibt sich aus der Summe der Momente der inneren Kräfte, bezogen auf den Druckmittelpunkt:

$$M_c = Z\left(h' - \frac{y}{3}\right);$$

daraus erhält man

$$Z = \frac{M_c}{y - \frac{h'}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

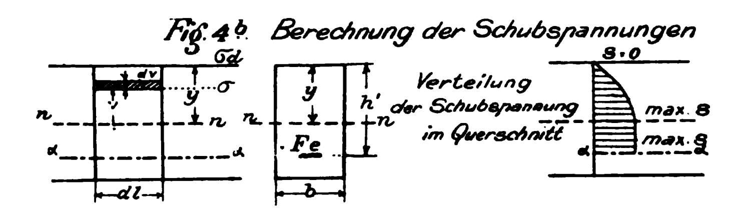
Dieser Ausdruck, in die Gleichung 1) eingesetzt, ergibt für

$$h = \frac{M}{cu\left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Die Gleichung 6) gibt ein Maß für die Haftfähigkeit des Eisens im Beton in kg/cm² Eisenoberfläche. Der aus dieser Gleichung sich ergebende Wert gibt ein Mittel zur Vergleichung verschiedener Haftfähigkeiten, nicht aber eine Festigkeitszahl an.

Berechnung der Schubfestigkeit (Fig. 4b).

Bei der Beurteilung der Festigkeit von armierten Betonbalken spielt die Schubfestigkeit des Betons eine sehr wichtige Rolle. Bei jungem Beton insbesondere, mit dem man in der Praxis rechnen muß, tritt der Bruch häufig nach Ueberwindung der Schubspannungen bezw. der aus diesen und



den Normalspannungen abgeleiteten Hauptspannungen ein. Daher war es bei der Untersuchung notwendig, die Größe der maximalen Schubspannungen zu bestimmen. Die Schubspannung in aa' auf die Länge dl läßt sich als die Differenz der Normalspannungen rechnen; es besteht die Gleichung

$$dS = b\, dv\, d\sigma$$

$$S = \int_v^y b\, dv\, d\sigma.$$

Bezeichne s die Schubspannung für eine Flächeneinheit und b die Breite des Balkens, so ergibt sich anderseits für $S = b\, s\, dl$ auf die unendlich kleine Länge dl.

Zur Bestimmung von $d\sigma$ dient die Momentengleichung

$$M = D\left(h' - \frac{y}{3}\right) = \frac{\sigma_d b y}{2}\left(h' - \frac{y}{3}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\sigma_d = \frac{2M}{b y \left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \text{und}$$

$$\frac{d\sigma_d}{dl} = \frac{2}{b y \left(h' - \frac{y}{3}\right)} \frac{dM}{dl}, \quad \text{da} \quad \frac{dM}{dl} = Q = \text{Querkraft}$$

$$= \frac{2Q}{b y \left(h' - \frac{y}{3}\right)}.$$

Aus der Proportion $d\sigma : d\sigma_d = v : y$ ergibt sich

$$d\sigma_d = \frac{d\sigma y}{v}.$$

Nach Einsetzen erhält man

$$\frac{d\sigma y}{v} = -\frac{2\,Q}{b\,y\left(h' - \frac{y}{3}\right)}\,dl$$

$$d\sigma = \frac{2\,Qv}{b\,y^2\left(h' - \frac{y}{3}\right)}.$$

Nach Einsetzen von $d\sigma$ in die Gleichung für S und Integration ergibt sich

$$sb = \frac{y^2 - v^2}{\left(h' - \frac{y}{3}\right)y^2}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7a)$$

$$s = \frac{Q\,(y^2 - v^2)}{\left(h' - \frac{y}{3}\right)by^2}.$$

Für $v = y$ ergibt sich $s = 0$; für $v = 0$ erhält man

$$\max s = \frac{Q}{b\left(h' - \frac{y}{3}\right)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Der Verlauf der Schubspannungen in einem Querschnitte ist aus Abb. 4b ersichtlich.

Die Schubspannung ist, wie aus der Gleichung 7a) ersichtlich ist, am größten in der neutralen Faser und wird am obersten Rande 0; unterhalb der neutralen Faser bleibt sie konstant, da vorausgesetzt wurde, daß die Zugspannungen im Beton 0 sind. Die in die Tabellen aufgenommenen charakteristischen Werte für die Schubspannungen beim ersten Auftreten der Risse und beim Bruch sind aus Gleichung 7 gerechnet. Die dazu gehörige Querkraft Q ist die Hälfte der jeweiligen Belastung, wenn man von der durch das Eigengewicht hervorgerufenen, die nur ganz gering ist, absieht.

In die gleiche Tabelle sind auch die charakterischen Werte für die „Haftfestigkeit" nach der allgemein üblichen Berechnungsmethode aufgenommen. Die „Haftfestigkeit" rechnet sich nach diesen aus der Schubfestigkeit, indem angenommen wird, daß die in der Faserschicht der Armierung tätige Schubkraft von dem Umfange der Armierung aufgenommen wird. Bezeichnet k die Haftfestigkeit für 1 cm² Oberfläche, U den Umfang der Armierung, so ergibt sich aus dieser Beziehung die Gleichung

$$ku = bs$$

$$k = \frac{bs}{u}.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$k = 15\,\frac{s}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Tabelle 2.

Angaben über die Probebalken.

Balken Nr.	Tag der Erzeugung 1906	Tag der Erprobung 1906	Alter in Tagen	Nutzbare Höhe h in cm	Art der Armierung mm	Querschnitt in cm	Armierung in Prozenten des nutzbaren Querschnitts
1	27. Jan.	30. März	61	ohne Armierung			—
2	3. Febr.	2. April	57	22	Rund-E. 20 lose	3,14	0,95
3	27. Jan.	29. März	60	24,1	Quadr.-E. 18	3,24	0,91
4	27. Jan.	29. März	60	24	Rund-E. 20	3,14	0,87
5	27. Jan.	29. März	60	23,2	„ 20	3,14	0,90
6	27. Jan.	29. März	60	22,8	„ 20	3,14	0,92
7	27. Jan.	30. März	61	21,9	„ 20	3,14	0,96
8	28. Jan.	30. März	60	21,1	„ 20	3,14	0,99
9	3. Febr.	31. März	56	20	„ 20	3,14	1,05
10	28. Jan.	30. März	60	22,3	2 „ 14	3,08	0,92
11	28. Jan.	31. März	61	22,5	4 „ 10	3,14	0,93
12	3. Febr.	2. April	57	22	„ 20 rostig	3,14	0,95
13	3. Febr.	2. April	57	22,1	Quadr.-E. 18	3,24	0,98
14	3. Febr.	2. April	57	22,2	Johnson-Eisen mit min. Dim. 14,6 × 14,6	2,13	0,64
15	3. Febr.	3. April	58	22,2	Ransome-, gewundenes Eisen 16 × 16	2,56	0,77
16	3. Febr.	3. April	58	22	Rund-E. 20 mit dem Druckgurt verankert	3,14	0,95

Besprechung der Versuchsresultate.

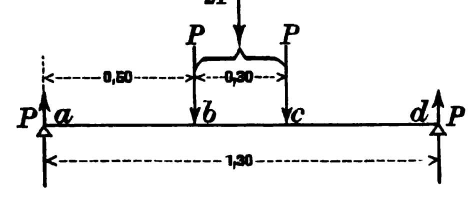
Balken Nr. 1 war ohne Armierung und sollte als Grundlage zur Vergleichung der Bruchlasten dienen. Die Ausgangsbelastung war 200 kg, und es wurde ebenso wie bei allen folgenden Balken von jeder höheren Belastung auf diese Ausgangsbelastung zurückgegangen, um die Größe der bleibenden

Durchbiegung zu bestimmen. Es ergaben sich als Durchbiegung in cm für die Belastung von

	total	bleibend
200 kg	$\frac{cm}{1000}$	
400 „ . . .	0,003	0
600 „ . . .	0,004	0
800 „ . . .	0,008	0
1000 „ . . .	0,012	0.

Bei 1100 kg trat der Bruch plötzlich unterhalb der rechten Laststelle ein.

Für die bei den Versuchen vorkommende Belastung ist das maximale Moment zwischen beiden Laststellen $b - c$: $M_{max} = P \times 50$ in kgcm oder, da immer $2P$ gegeben ist: $\frac{2P}{2} 50 = 25 (2P)$ in kgcm. (Siehe beistehende Skizze.)



Die Querkraft ist am Auflager $\frac{2P}{2}$ und kann innerhalb ab und cd als konstant angenommen werden.

Balken Nr. 2 wurde mit einem 20 mm starken Rundeisen armiert, welches 2 cm oberhalb Unterkante in der Achse des Balkens eingelegt wurde. Ein 2 m langer Stab wurde durch vorgebohrte Löcher an den Stirnseiten der Holzform durchgesteckt und nach Einbetonieren fortwährend um seine eigene Achse gedreht, um auf diese Weise ein Anhaften durch das Zusammenziehen des Betons zu verhindern. Dieser Vorgang wurde innerhalb der Abbindungszeit öfter wiederholt als nach der Abbindezeit. Nach 14 Tagen war es nicht mehr möglich, den Stab um seine Achse zu drehen, aber man konnte ihn an den Enden des Balkens bewegen, ein Beweis dafür, daß er tatsächlich gegen das Auflager hin ganz lose war und ein geringes Anhaften nur in der Mitte vorhanden war. Das Resultat der Untersuchung war eine Erhöhung der Bruchlast gegenüber den reinen Betonbalken auf nahezu das Doppelte, auf 2050 kg. Die ersten Risse traten innerhalb der Lasteinwirkungsstellen, an den Stellen der größten Momente, auf und waren vertikal, ein Beweis, daß sie auf die Ueberwindung der Zugfestigkeit des Betons zurückzuführen sind; sie traten in der Nähe derjenigen Belastung auf, bei welcher der Bruch des Balkens 1 erfolgte.

Da das Eisen außerhalb der Laststellen gelockert war, war eine Uebertragung der Zugspannungen durch das Eisen ausgeschlossen, und der Balken brach an der Rißstelle unterhalb des Lastpunktes unter Nachziehen des Eisens.

Balken Nr. 2.

Eigengewicht { gewogen: 128,9 kg, gerechnet: 128,8 kg. } Armierung R.-E. 20 mm, an den Enden gelockert { $F_e = 3{,}14$ cm², $U = 6{,}28$ cm.

Alter: 58 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22 cm
400					1	5	5	0,002	
200					0	3	1	0	
600					4	9	11	0,004	
200					2	6	4	0	
800					6	12	15	0,006	
200					3	8	6	0,001	
1000					8	15	23	0,011	
200					4	11	11	0,003	
1200	30 000	600	2,1	—	10	19	32	0,017	Vertik. Risse unterhalb und innerhalb Lastpunkt (L.-P.)
200					5	13	14	0,005	
1400					14	22	52	0,034	Verlängerung der Risse unterh. L.-P.
200					7	15	30	0,019	
1800					17	27	88	0,066	Verlängerung des Risses unterh. L.-P.
200					8	19	52	0,038	L.-P. . . . Lasteinwirkungsstelle.
2050	51 250	1025	8,6	—					

Bruch an der Rißstelle unter Nachziehen des Eisens, das glatt mit blanker Oberfläche herausgezogen wird.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}8$, $D = 9{,}1$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 27{,}6$, $D = 39{,}5$, $N = 30{,}4$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 940$, $D = 860$, $N = 915$.

Betrachtet man die Durchbiegungskurve (Fig. 5), so findet man, daß die Durchbiegung bis zum Auftreten der Risse bei 1200 kg sich mit zunehmender Belastung nur wenig ändert und in der Nähe der Durchbiegungskurve für den nicht armierten Balken bleibt. Nach dieser Belastung tritt eine rasche Zunahme der Durchbiegung ein, was nur auf die Ueberwindung

der Haftfähigkeit zurückzuführen ist. Die beim Bruch sich ergebenden Werte für die maximalen Spannungen (über die Berechnungen siehe Anhang) sind:

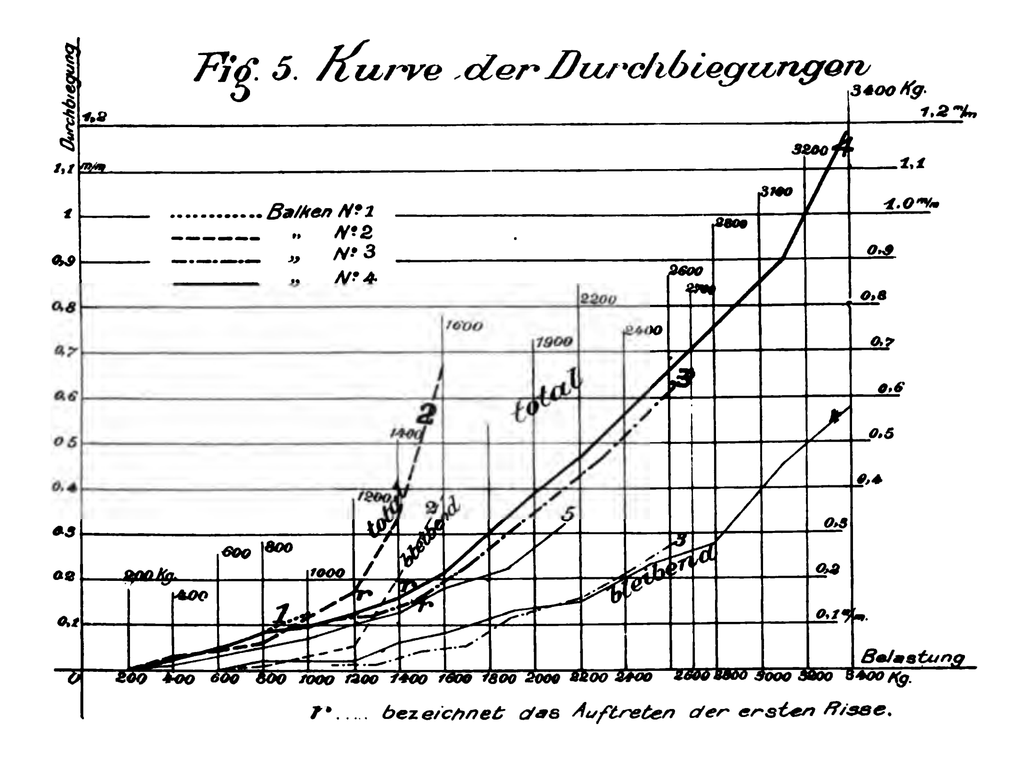
$\sigma_{Eisen} = 915$ kg/cm² $\qquad\qquad \sigma_d = 30$ kg/cm²

σ_{Eisen} . . . Zugspannung im Eisen $\qquad \sigma_d$ . . . Druckspannung im Beton

$s = 8{,}6$ kg/cm².

Auf diese kann der Bruch nicht zurückgeführt werden; er ist vielmehr eine Folge der Lockerung des Eisens an beiden Enden.

Der Versuch mit diesem Balken zeigt klar, daß mit Aufhören der Zugfestigkeit des Betons auch die Haftfähigkeit auf-



hört, weil dadurch die Verbindung des Eisens mit der Druckzone aufhört. Die Zugfestigkeit des Betons kann wegen der Lockerung des Eisens nicht wie bei Balken 12 — derselbe Balken ohne Lockerung der Armierung — auf die außerhalb der Laststellen gelegenen Teile übertragen werden, und der Bruch erfolgt an der äußersten Rißstelle bei einer Zugspannung im Eisen, die groß genug ist, um das Eisen von den Haftstellen loszulösen.

Balken Nr. 3. Bei diesem Balken wurde als Armierung ein Quadrateisen verwendet mit nahezu gleichem Querschnitt wie bei dem 20 mm starken Rundeisen. Der Stab wurde in die Achse des Balkens an der

Balken Nr. 3.

Eigengewicht {gewogen: 127,6 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung Q.-E. 18 × 18 {$f_e = 3{,}24$ cm², $U = 5{,}4$ cm.

Alter: 60 Tage.

Belastung 2 *P* kg	Maximal-Moment *M* kgcm	Maximal-Querkraft *Q* kg	Maximal-Schubspannungen in Beton *s* kg/cm²	„Haftspannung" *k* kg/cm²	Durchbiegung in cm *l*	*r*	*m*	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 24,1 cm
300									
200									
500									
200									
700									
200									
900									
200									Die bisherigen Ablesungen sind unverläßlich
1100					3	1	13	0,011	
200					−2	−2	0	0,002	
1300					6	5	18	0,012	
200					0	0	1	0,001	
1500					8	5	23	0,016	
200					0	0	4	0,004	
1700	42 500	850	2,8	7,4	9	6	30	0,022	Vertikaler Riß unter dem L.-P.
200					0	0	5	0,005	
1900					9	7	39	0,031	
200					−1	+1	11	0,011	
2300					11	10	57	0,046	
200					0	1	18	0,017	
2700					14	11	79	0,066	
200					2	2	32	0,030	
3200	80 000	1600	5,1	13,9					

Bei 3200 kg Bruch unter der rechten Laststelle unter sukzessivem Herausziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 14{,}2$, $D = 9{,}7$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 40{,}6$, $D = 52$, $N = 42{,}8$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 1270$, $D = 1180$, $N = 1240$.

tiefsten Stelle eingebettet. Die Bruchlast betrug 3200 kg; die maximalen Spannungswerte waren:

$$\sigma_{Eisen} = 1180 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 42 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 5{,}1 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach den aus den Versuchen ersichtlichen Festigkeitszahlen kann der Bruch auf diese Werte nicht zurückzuführen sein; er ist vielmehr auf das Aufhören der Haftfähigkeit zurückzuführen.

Das Bruchmoment an der Rißstelle $M_c = 80\,000$ kgcm, $c = 57$ cm, $h' = 24{,}1$ cm und $\frac{y}{3} = 3{,}2$ cm; und der vom Beton umhüllte Umfang ist 5,4 cm. Mithin ist

$$h = \frac{80000}{57 \times 5{,}4\,(24{,}1 - 3{,}2)} = \mathbf{12{,}5} \text{ kg/cm}^2 \text{ Oberfläche}$$

der vom Beton umgebenen Eisenoberfläche; die allgemein übliche Berechnung für die „Haftfestigkeit" ergibt 13,9 kg/cm² Eisenoberfläche.

Balken Nr. 4. Die Armierung hat dieselbe Lage wie bei 3 und besteht aus einem 20 mm starken Rundeisen. Bei einer Bruchlast von 3550 kg ergaben sich für

$$\sigma_{Eisen} = 1350 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 48 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 5{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

Diese Werte liegen weit unter den Bruchfestigkeiten; auch hier ist der Bruch auf das Aufhören der Haftfähigkeit zurückzuführen. Für $h' = 24$ cm, $y = 9{,}4$ cm, $u = 6{,}28$ cm, $c = 57$ cm und das Bruchmoment 88750 kgcm eingesetzt, erhält man für die Haftfähigkeit den Ausdruck

$$h = \frac{88750}{57 \times 6{,}28\,(24 - 3{,}1)} = \mathbf{11{,}6} \text{ kg/cm}^2$$

der vom Beton umgebenen Eisenoberfläche; der in der allgemein üblichen Weise gerechnete Wert für die „Haftfestigkeit" beträgt 13,5 kg/cm².

Balken Nr. 5. Die Armatur, 1 Rundeisen mit 20 mm Durchmesser, ist parallel zur Längsachse des Balkens in der Mitte derart angeordnet, daß der Abstand der Achse der Armierung von der Unterkante 1,8 cm beträgt. Der Versuch ergab eine Bruchlast von 3850 kg; die gerechneten maximalen Spannungen sind:

$$\sigma_{Eisen} = 1530 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 53{,}6 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 6{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Rißstelle, an welcher der Bruch eintrat, liegt unterhalb der rechten Laststelle, und der Bruch erfolgte nach einer nahezu vertikalen Ebene.

$$c = 57 \text{ cm},$$
$$h' = 23{,}2 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 3{,}1,$$
$$u = 6{,}28 \text{ cm},$$
$$M_c = 96250 \text{ kgcm}.$$

Balken Nr. 4.

Eigengewicht {gewogen: 128,3 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm {f_e = 3,14 cm², U = 6,28 cm.

Alter: 60 Tage.

Belastung 2 P kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 24 cm
400					3	1	4	0,002	
200					−1	1	0	0,000	
600					1	1	6	0,005	
200					−1	1	1	0,000	
800					0	4	10	0,008	
200					−1	1	2	0,002	
1000					2	6	13	0,009	
200					3	3	4	0,001	
1200					3	6	17	0,012	
200					0	3	6	0,002	
1400	35 000	700	2,2	5,3	9	7	24	0,016	Vertikaler Riß unter rechtem L.-P.
200					−1	3	8	0,006	
1600					8	9	30	0,021	Vertikaler Riß unter linkem L.-P.
200					−1	4	10	0,008	
1900					10	10	45	0,035	
200					0	4	15	0,013	
2200					10	13	58	0,046	
200					4	5	20	0,015	
2500					13	14	75	0,061	Vertikaler Riß in der Mitte
200					4	6	28	0,023	
2800					15	15	90	0,075	
200					5	6	34	0,028	
3100					16	17	107	0,090	
200					7	8	53	0,045	
3400					15	19	139	0,122	
200					9	7	66	0,058	
3550	88 750	1775	5,6	13,5					

Bei 3550 kg erfolgt der Bruch unterhalb der linken Laststelle unter Nachziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

S = 14,2, D = 9,4, N = 12,5.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

S = 47,2, D = 60, N = 47,6.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

S = 1455, D = 1350, N = 1425.

Balken Nr. 5.

Eigengewicht { gewogen: 130,7 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm { $f_e = 3{,}14\ cm^2$, $U = 6{,}28\ cm$.

Alter: 60 Tage.

Belastung 2 P kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 28,2 cm
400					3	3	4	0,001	
200					2	1	2	0	
600					5	4	7	0,003	
200					0	4	2	0	
800					4	8	11	0,005	
200					2	5	3	0	
1000					7	8	15	0,007	
200					4	5	5	0	
1200					9	10	20	0,010	
200					4	5	6	0,001	
1400					11	12	24	0,012	
200					4	6	7	0,002	
1600	40000	800	2,7	6,4	11	13	30	0,018	Vertikale Risse unter L. P.
200					5	6	10	0,004	
1900					17	15	39	0,023	
200					7	7	13	0,006	
2200					17	17	52	0,035	Riß in der Mitte
200					10	7	17	0,008	
2500					19	18	68	0,049	
200					9	8	21	0,012	
2800					22	19	94	0,073	
200					11	10	33	0,022	
3100					22	20	112	0,091	
200					11	10	38	0,027	
3400					24	22	129	0,106	
200					11	10	43	0,032	
3700					28	21	176	0,151	
200					12	10	87	0,076	
3850	96250	1925	6,4	15,2					

Bei 3850 kg Bruch unter der rechten Laststelle unter Herausziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 14{,}1,\quad D = 9{,}4,\quad N = 12{,}5.$

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 53{,}5,\quad D = 67{,}5,\quad N = 53{,}6.$

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 1670,\quad D = 1530,\quad N = 1610.$

Daraus ergibt sich nach Gleichung 6) die Haftfähigkeit

$$h = \frac{96250}{6{,}28 \times 57 \times (23{,}2 - 3{,}1)} = \mathbf{13{,}4} \text{ kg/cm}^2,$$

während sich für $k = 15{,}2$ kg/cm² ergibt.

Balken Nr. 6. Die Armierung ist wie bei Balken 5, aber mit einer kleineren nutzbaren Höhe $h' = 22{,}8$ cm. Die Bruchlast ist 4000 kg; die auftretenden charakteristischen maximalen Spannungen sind:

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 1610 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d' = 57{,}5 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 6{,}7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$u = 6{,}28 \text{ cm},$$

$$c = 47 \text{ cm},$$

$$\frac{y}{3} = 3{,}0,$$

$$M_c = P \times 40 = 80\,000 \text{ kgcm};$$

da der Bruch außerhalb der Laststellen stattfindet, ist M_c kleiner als das maximale Moment und ergibt sich als Produkt der Kraft mit dem zugehörigen Abstand (40). Für die Haftfähigkeit ergibt sich sonach

$$h = \frac{80\,000}{47 \times 6{,}28\,(22{,}8 - 3)} = \mathbf{13{,}7} \text{ kg/cm}^2,$$

$$k = 16{,}1 \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 7. Die gleiche Armierung wie bei 6 mit einer Nutzhöhe von 21,9 cm. Die Bruchlast ist auch 4000 kg. Die kleinere Nutzhöhe macht sich in einer Vergrößerung der maximalen Spannungen bemerkbar. Es sind:

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 1690 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 60{,}2 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 7{,}1 \text{ kg/cm}^2.$$

Die für die Berechnung der Haftfähigkeit notwendigen Werte sind bis auf h' dieselben.

$$h = \frac{80\,000}{47 \times 6{,}28\,(21{,}9 - 3{,}0)} = \mathbf{14{,}4} \text{ kg/cm}^2;$$

k wurde mit 16,8 kg/cm² berechnet.

Balken Nr. 8. Die Armatur ist gleichgeblieben, aber die Nutzhöhe ist auf 21,1 cm verkleinert worden. Die Bruchlast beträgt 4000 kg, und die maximalen Spannungen sind größer geworden.

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 1750 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 62{,}6 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 7{,}3 \text{ kg/cm}^2,$$

$$h' = 21{,}1 \text{ cm und } \frac{y}{3} = 2{,}8 \text{ cm};$$

die anderen Werte zur Bestimmung der Haftfähigkeit sind gleichgeblieben.

$$h = \frac{80000}{47 \times 6{,}28\,(21{,}1 - 2{,}8)} = \mathbf{14{,}9} \text{ kg/cm}^2,$$

$$k = 17{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 6.

Eigengewicht { gewogen: 129,5 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm { f_e = 3,14 cm², U = 6,28 cm.

Alter: 60 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d=m-\frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					—	—	—	—	Nutzbare Höhe: 22,8 cm
400					1	1	4	0,003	
200					2	0	1	0	
600					5	2	8	0,005	
200					3	0	2	0	
800					7	5	12	0,006	
200					4	1	3	0,001	
1000					8	7	16	0,008	
200					5	1	3	0	
1200					8	8	20	0,012	
200					5	2	5	0,001	
1400					11	10	25	0,014	
200					6	3	8	0,003	
1600					14	11	31	0,018	
200					6	3	10	0,005	
1800	45 000	900	3,0	7,3	15	13	38	0,024	Vertikale Risse unterhalb und innerhalb L.-P.
200					8	4	12	0,006	
2000					17	15	44	0,028	
200					6	5	15	0,009	
2400					17	17	59	0,042	
200					8	6	21	0,014	
2800					22	21	82	0,060	Risse außerhalb der L.-P.
200					10	8	30	0,021	
3200					24	25	106	0,081	
200					15	10	36	0,023	
3600					27	27	128	0,101	Erweiterung der äußeren Risse
200					13	10	41	0,029	
4000					29	30	163	0,133	
200					13	11	68	0,056	
4000	100 000	2000	6,7	16,1					

Bei 4000 kg Bruch auf der linken Seite unter Herausziehen des Eisens. (10 cm links vom linken L.-P.).

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 14{,}1,\quad D = 9{,}1,\quad N = 12{,}5.$

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 57{,}5,\quad D = 74,\quad N = 57{,}2.$

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 1760,\quad D = 1610,\quad N = 1700.$

Balken Nr. 7.

Eigengewicht {gewogen: 131,7 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm {f_e = 3,14 cm², U = 6,28 cm.

Alter: 61 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 21,9 cm
400					3	1	2	0	
200					2	0	1	0	
600					5	2	6	0,002	
200					3	0	2	0	
800					7	3	9	0,004	
200					2	1	2	0	
1000					6	5	13	0,007	
200					2	1	3	0,001	
1200					9	6	18	0,010	
200					4	1	5	0,002	
1400					12	7	24	0,014	
200					7	2	7	0,002	
1600					14	8	29	0,018	
200					7	2	8	0,003	
1800	45000	900	3,2	7,5	16	9	38	0,025	Riß vertikal unter L.-P. und in der Mitte
200					9	3	9	0,003	
2000					15	10	47	0,034	
200					9	3	13	0,007	
2400					19	13	64	0,048	
200					10	4	20	0,013	
2800					23	15	82	0,063	Riß außerhalb der Laststelle
200					12	4	26	0,018	
3200					27	18	101	0,078	Riß in einer Entfernung von 40 cm vom linken Auflager
200					14	5	31	0,021	
3600					30	20	126	0,101	
200					18	7	39	0,026	
4000	100000	2000	7,1	16,8					

Bei 4000 kg Bruch auf der linken Seite unter raschem Zurückgehen der Belastung und Nachziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist; Rißstelle 40 cm vom Auflager entfernt.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

S = 13,9, D = 9,1, N = 12,5.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

S = 57,5, D = 77,5, N = 60,2.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

S = 1830, D = 1690, N = 1790.

Balken Nr. 8.

Eigengewicht $\begin{cases}\text{gewogen: } 128{,}1\text{ kg,}\\ \text{gerechnet: } 128{,}8\text{ kg.}\end{cases}$ Armierung R.-E. 20 mm $\begin{cases}f_e = 3{,}14\text{ cm}^2,\\ U = 6{,}28\text{ cm.}\end{cases}$

Alter: 60 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 21.1 cm
400					2	2	4	0,002	
200					0	0	0	0	
600					2	4	8	0,005	
200					0	2	1	0	
800					3	6	12	0,007	
200					1	3	2	0	
1000					4	7	17	0,011	
200					1	4	4	0,001	
1200					6	9	23	0,015	
200					2	4	6	0,003	
1400					8	11	31	0,021	Kleinerer Riß unter L.-P.
200					5	6	19	0 004	
1600	40 000	800	2,9	6,9	9	11	34	0,024	Riß unterhalb und innerhalb L.-P. vertikal
200					3	6	11	0,006	
2000					12	15	57	0,043	Risse 10 cm außerhalb L.-P.
200					4	7	21	0,015	
2400					15	18	75	0,058	Verlängerung des letztentstandenen Risses
200					5	8	29	0,022	
2800					17	21	95	0,076	
200					6	9	37	0,029	
3200					20	22	123	0,102	
200					9	10	46	0,036	
3600					22	24	141	0,128	
200					8	10	50	0,041	
4000	100 000	2000	7,3	17,4					

Bei 4000 kg Bruch auf der rechten Seite; dieselben Erscheinungen wie bei Balken 7.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}8, \quad D = 8{,}5, \quad N = 12{,}5.$

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 60, \quad D = 85, \quad N = 62{,}6.$

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 1920, \quad D = 1750, \quad N = 1870.$

Balken Nr. 9. h', die nutzbare Höhe des Balkens, beträgt bei diesem Balken 20 cm, sonst ist die Armierung gleichgeblieben. Die Bruchlast ist 5150 kg; mithin ist $P = 2575$ kg. M_c ist hier, da der Bruch unterhalb des Lastpunktes stattfindet, gleich max. $M = 128\,750$ kgcm. Die erreichten maximalen Spannungen sind viel größer geworden als bei Balken 8; es sind:

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 2360 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 76 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 9{,}9 \text{ kg/cm}^2;$$

$$h' = 20 \text{ cm},$$

$$u = 6{,}28 \text{ cm},$$

$$c = 57 \text{ cm},$$

$$\frac{y}{3} = 2{,}7 \text{ cm}.$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{128\,750}{57 \times 6{,}28\,(20 - 2{,}7)} = \mathbf{20{,}8} \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 10. Die Armierung dieses Balkens hat nahezu den gleichen Querschnitt wie die vorangehenden; sie besteht aus 2 Rundeisen mit 14 mm

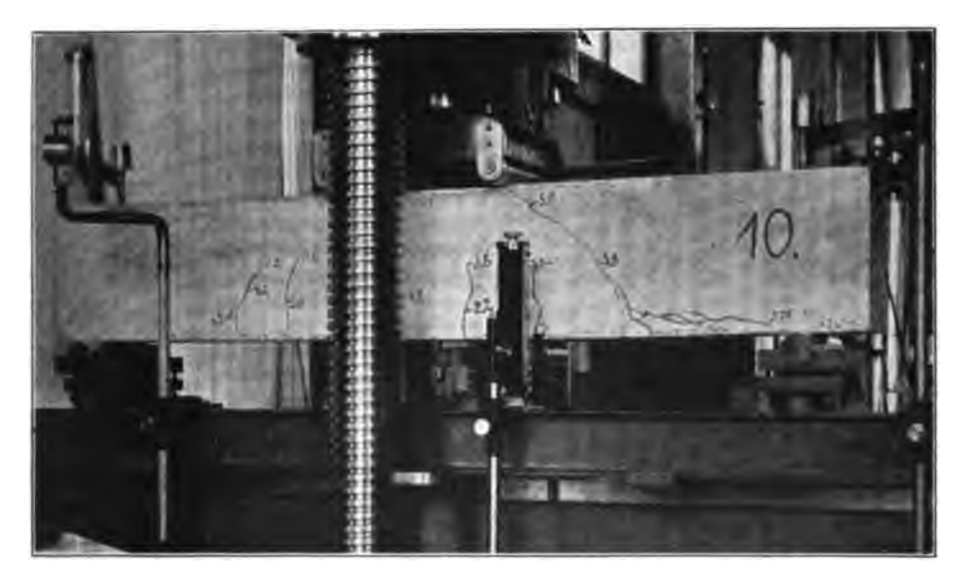


Abb. 1.

Durchmesserstärke. Die vom Beton umhüllte Oberfläche ist jedoch größer, 8,8 cm. Diese Armierung war imstande, die Bruchlast auf 5750 kg zu erhöhen. Der Zerstörungsvorgang ist wesentlich anders als bei den vorhergehenden Balken. Bei diesen bilden sich vertikale Risse innerhalb der Laststrecke; wenn die unterhalb liegende Betonschicht nicht zu schwach war, bildeten sich auch 10 cm außerhalb der Laststrecke Risse. Beim Bruch erweiterte sich der Riß gegen die Laststelle, und das Armierungseisen wurde nachgezogen. Bei Balken 10 (siehe Abb. 1) bildeten sich die ersten Risse, wie aus der Beschreibung ersichtlich ist, auch innerhalb der Last-

Balken Nr. 9.

Eigengewicht { gewogen: 130,1 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm { $f_e = 3,14$ cm², $U = 6,28$ cm.

Alter: 56 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 20 cm.
400					1	1	3	0,002	
200					0	1	1	0	
600					3	3	6	0,003	
200					0	1	1	0	
800					4	4	11	0,007	
200					2	2	2	0	
1000					6	7	17	0,010	
200					3	3	7	0,004	
1200					8	7	23	0,015	
200					4	4	9	0,005	
1400					10	8	31	0,022	
200					5	4	13	0,008	
1600	40 000	800	3,1	7,4	11	9	40	0,030	Vertikaler Riß unterhalb L.-P.
200					5	5	16	0,011	
2000					13	12	58	0,045	
200					6	4	25	0,020	
2400					15	13	80	0,066	
200					7	7	31	0,024	
2800					18	16	102	0,085	
200					8	6	37	0,030	
3200					19	16	121	0,103	
200					8	8	44	0,036	
3600					23	18	143	0,122	Erweiterung und Verlängerung der Risse unter L.-P.
200					10	7	51	0,042	
4000					23	19	164	0,141	
200					12	8	57	0,047	
4400					26	21	194	0,170	
200					11	8	66	0,056	
4800					28	23	228	0,202	
200					12	9	89	0,078	
5150	128 750	2575	9,9	23,6					

Bei 5150 kg langsames Zurückgehen der Belastung; Bruch unterhalb rechten Lastpunkt; Nachziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13,6, \quad D = 8,2, \quad N = 12,5.$

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 76, \quad D = 86, \quad N = 86,4.$

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 2630, \quad D = 2360, \quad N = 2580.$

Balken Nr. 10.

Eigengewicht {gewogen: 127,6 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung 2 R.-E. 14 mm {$f_e = 3{,}08$ cm², $U = 8{,}8$ cm.

Alter: 60 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22,3 cm.
400					3	2	4	0,001	
200					2	2	2	0	
600					8	4	8	0,002	
200					2	3	3	0	
800					12	13	15	0,002	
200					5	3	7	0	
1000					14	18	18	0,002	
200					8	10	9	0	
1200					17	22	22	0,002	
200					10	13	12	0	
1400					19	24	26	0,004	
200					12	16	14	0	
1600					21	27	32	0,008	
200					13	16	15	0	
1800					24	27	38	0,012	
200					14	18	16	0	
2000					24	30	45	0,018	
200					15	21	18	0	
2200	55 000	1100	3,8	6,5	27	30	53	0,024	Vertikale Risse unter L.-P.
200					16	23	21	0,001	
2600					29	35	68	0,036	
200					18	23	26	0,005	
3000					33	37	28	0,053	
200					20	25	31	0,008	
3400					36	40	106	0,068	
200					25	26	36	0,010	
3800					39	41	126	0,086	Neuer Riß, 25 cm vom rechten Auflager entfernt.
200					24	26	41	0,016	
4200					42	44	145	0,102	Riß auf der linken Seite, symmetrisch zum vorigen.
200					26	27	45	0,018	
4600					46	44	165	0,120	Erweiterung und Verlängerung des äußersten rechten Risses gegen den Lastpunkt.
200					27	28	51	0,023	
5000					47	46	198	0,151	
200					28	30	64	0,035	
5400					50	47	232	0,184	
200					29	31	77	0,047	
5750	143 750	2875	9,9	16,9					

Bei 5750 kg Bruch auf der rechten Seite, 25 cm vom Auflager entfernt, unter Nachziehen der Eisen, deren Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}9$, $D = 8{,}9$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 78{,}5$, $D = 111$, $N = 84{,}5$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 2620$, $D = 2410$, $N = 2560$.

strecke, die sich aber mit steigender Belastung nur wenig verlängerten, weil neue Risse außerhalb entstanden. Der äußerste Riß ist hier nur 25 cm vom Auflager entfernt. Die Verankerung durch die beiden kleinen Eisen mit der größeren Haftfläche ist eine festere, was sich auch an der Art der Lösung der Haftfähigkeit zeigt (Abb. 1). Beim Bruche wurde das Eisen nachgezogen wie bei den anderen vorhergehenden Armierungen, aber es trat ein Lostrennen des Betons längs der Armierungsstangen ein. Die Schubspannung längs der Faserschicht, welche der Höhe der Armierungsachse entspricht, ergibt sich als

$$s = \frac{2875}{12{,}2\ (22{,}3 - 3{,}0)} = 12{,}2 \text{ kg/cm}^2,$$

selbst wenn man die Breite der Armierungseisen von der Balkenbreite in Abzug bringt (15 — 2,8). Die Schubfestigkeit ist nicht überwunden; das Lostrennen des Betons ist auf die kleine Distanz zwischen Rißstelle und Auflager zurückzuführen, was sich auch aus dem Verlauf des horizontalen Risses erkennen läßt. Eine Ueberwindung der Schubfestigkeit des Betons hätte ein Lostrennen des Betons bis zum Ende des Balkens zur Folge gehabt. Die maximale erreichte Druckspannung im Beton wurde mit 84,5 kg/cm² und die maximale Zugspannung im Eisen mit 2410 kg/cm² gerechnet. Auf diese beiden Werte läßt sich der Bruch nicht zurückführen; aus den Vorversuchen geht hervor, daß die im Eisen erreichte Spannung innerhalb der Elastizitätsgrenze liegt und die Beanspruchung des Betons die Druckfestigkeit noch nicht erreicht hat.

Die Lösung der Haftung ist auch hier die Bruchursache.

$$c = 32{,}5 \text{ cm},$$
$$u = 8{,}8 \text{ cm},$$
$$h' = 22{,}3 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 3{,}0 \text{ cm},$$
$$M_c = 2875 \times 25 = 71875 \text{ kgcm},$$
$$h = \frac{71875}{32 \times 8{,}8\ (22{,}3 - 3{,}0)} = \mathbf{13{,}2} \text{ kg/cm}^2,$$
$$k = 16{,}9 \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 11. Die Armatur besteht aus 4 Rundeisen à 10 mm mit dem gleichen Querschnitt wie ein Rundeisen von 20 mm Durchmesser; der im Beton eingebettete Umfang ist 12,56 cm. Die Bruchlast ist 5000 kg, also verhältnismäßig geringer als bei Balken 10. Die gerechneten maximalen Spannungen beim Bruch sind:

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 2050 \text{ kg/cm}^2, \qquad \sigma_d = 72{,}4 \text{ kg/cm}^2.$$

Als Schubspannung wurde 8,6 kg/cm² gerechnet bei Annahme einer vollen Betonfaserschicht. An der Stelle der Armierung ist aber tatsächlich

Balken Nr. 11.

Eigengewicht {gewogen: 127 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung 4 R.-E. 10 mm {$f_e = 3,14\ cm^2$, $U = 12,56$ cm.

Alter: 61 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22,5 cm.
400					1	1	3	0,002	
200					0	0	0	0	
600					2	2	7	0,005	
200					1	1	1	0	
800					2	3	10	0,007	
200					1	1	1	0	
1000					3	5	13	0,009	
200					1	1	1	0	
1200					3	5	17	0,012	
200					1	1	1	0	
1400					6	7	21	0,014	
200					1	1	1	0	
1600					7	7	24	0,017	
200					0	1	1	0	
1800					7	8	28	0,020	
200					0	1	2	0,001	
2000					8	8	32	0,024	
200					1	1	2	0,001	
2200	55 000	1100	3,8	4,5	9	9	38	0,029	Vertikaler Riß unterhalb r. L.-P.
200					3	1	4	0,002	
2600					10	11	47	0,036	Verlängerung des Risses.
200					1	1	6	0,005	
3000					12	13	63	0,050	Risse außerhalb der L.-P.
200					1	3	11	0,009	
3400					17	15	80	0,062	Neue Risse außerhalb.
200					2	3	14	0,011	
3800					17	17	94	0,077	
200					4	4	17	0,012	Erweiterung der äußersten Risse (25 cm vom Auflager entfernt).
4200					19	19	111	0,092	
200					6	4	21	0,016	
4600					21	22	126	0,104	
200					6	6	24	0,018	
5000	125 000	2500	8,6	10,3					

Bei 5000 kg bewirkt ein neuer großer Riß plötzlichen Bruch (15 cm vom Auflager).

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13,9$, $D = 9,6$, $N = 12,5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 68$, $D = 91$, $N = 72,4$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

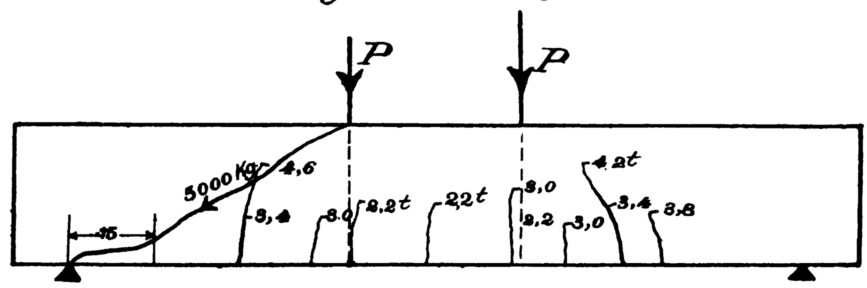
$S = 2220$, $D = 2050$, $N = 2170$.

nur eine Breite von 11 cm vorhanden, wenn die vom Eisen eingenommene Breite abgezogen wird. Mithin ergibt sich

$$s = \frac{2500}{11\,(22{,}5 - 3{,}1)} = 11{,}8 \text{ kg/cm}^2.$$

Die maximale Zugspannung im Eisen wurde mit 2050 kg/cm², die Druckspannung im Beton mit 72,4 kg/cm² ermittelt. Diese Werte liegen alle unterhalb der Bruchfestigkeiten. Wie erfolgte bei diesem Balken der Bruch? Zu diesem Zwecke verfolgen wir den in Fig. 6 aufgezeichneten Verlauf der Risse. Die ersten Risse traten hier wie bei Balken 10 bei der Belastung von 2200 kg auf, also bedeutend höher als bei den stärkeren einfachen Armierungseisen. Das scheint auf eine kleine Erhöhung der Dehnungsfähigkeit des Betons bei verteilter Armierung hinzuweisen, wenn auch nicht

Fig. 6. Bruchbild für Balken № 11. und Aufzeichnung der Risse.



in dem Maße, wie es Considère angibt (10- bis 20fach der Dehnungsfähigkeit des nicht armierten). Es scheint, daß die Dehnungsfähigkeit des Betons bei gleichbleibendem Querschnitt der Armierung größer wird, wenn an Stelle von starken Eisen mehrere schwächere über die Breite verteilt werden. Bei höherer Belastung traten außerhalb der Laststellen Risse auf; auch hier zeigt sich, daß mehrere kleine Eisen eine bessere Verankerung der Zugzone bilden, als ein größeres Eisen von demselben Querschnitt. Bei 3800 kg traten im Abstand von 25 cm von beiden Auflagern die äußersten Risse auf, die sich mit Zunahme der Belastung verlängerten, während die inneren Risse sich nicht wesentlich veränderten. Bei 5000 kg trat plötzlich der äußerste Riß auf, der vom Auflager ausging, und dieser Riß führte den Bruch herbei. Die Bruchursache ist hier nicht das Versagen der Haftfähigkeit; diese hätte, da die Oberfläche der Armierung eine viel größere ist als bei den bisherigen Balken, eine bedeutend höhere Bruchlast erzielt, wenn nicht der neue Riß eingetreten wäre, der durch Ueberwindung der Scherfestigkeit entstanden ist. Die Ursache liegt zweifellos in der durch die große Eisenoberfläche hervorgerufenen Verminderung des Betonquer-

schnittes. Die maximalen Eisenspannungen sind 2050 kg/cm², also weit unter der Elastizitätsgrenze, die maximalen Bruchspannungen im Beton 72,4 kg/cm²; weder auf diese Resultate, noch auf die bereits erwähnten Schubspannungen kann der Bruch zurückgeführt werden.

$$c = 22 \text{ cm},$$
$$u = 12{,}56 \text{ cm},$$
$$h' = 22{,}5 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 3{,}1 \text{ cm},$$
$$M_c = 2500 \times 22 = 55\,000 \text{ kgcm};$$

nach Einsetzen erhält man für

$$\boldsymbol{h} = \frac{55\,000}{22 \times 12{,}56\,(22{,}5 - 3{,}1)} = \mathbf{10{,}3} \text{ kg/cm}^2.$$

Für k wurde 10,3 kg/cm² Eisenoberfläche gefunden.

Die Uebereinstimmung der für h und k gerechneten Werte weist darauf hin, daß die Haftfähigkeit in diesem Falle infolge Ueberwindung der Scherfestigkeit vermindert wurde.

Balken Nr. 12. Dieser Balken ist ebenso armiert wie Balken 2, mit dem Unterschiede, daß hier das Armierungseisen nicht gelockert wurde. Mit diesem Versuche war eine andere Beobachtung verbunden; über das Verhalten von verrosteten Eisen in armiertem Beton. Die zur Armierung verwendete Eisenstange wurde vor der Einbettung durch Lagerung im Freien vollständig von Rost überzogen. Nach der Erprobung des Balkens und dessen Zerstörung zeigte sich, daß die Roststellen mit Zementmilch überdeckt waren (bei den anderen Balken war die Oberfläche des Eisens nach der Erprobung ebenso blank wie vor der Verwendung); durch Abschaben des Zementes konnte man die verrosteten Stellen wieder freilegen. — Die Bruchlast beträgt 4250 kg, eine kleine Erhöhung gegenüber den anderen Balken mit der gleichartigen Armierung, wahrscheinlich eine Folge der verrosteten Oberfläche.

Die charakteristischen Bruchspannungen sind:

$$\sigma_{\text{Eisen}} = 1790 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_d = 63{,}4 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 7{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Bruch erfolgt durch Ueberwindung der Haftung.

$$c = 37 \text{ cm},$$
$$u = 6{,}28 \text{ cm},$$
$$h' = 22 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 3{,}0 \text{ cm},$$
$$M_c = 2125 \times 30 = 63\,750 \text{ kgcm};$$

mithin ist

$$\boldsymbol{h} = \frac{63\,750}{37 \times 6{,}28\,(22 - 3)} = \mathbf{14{,}4} \text{ kg/cm}^2.$$

k wurde mit 17,9 kg/cm² gerechnet.

Balken Nr. 12.

Eigengewicht { gewogen: 129 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm { $f_e = 3{,}14$ cm², $U = 6{,}28$ cm.

Alter: 57 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22 cm.
400					2	1	4	0,002	
200					0	0	0	0	
600					4	2	8	0,005	
200					2	0	2	0,001	
800					6	5	13	0,007	
200					2	1	3	0,001	
1000					7	6	16	0,010	
200					3	3	4	0,001	
1200					9	8	21	0,012	
200					4	3	6	0,002	
1400	35 000	700	2,5	5,9	11	10	29	0,018	Vertikal. Riß unter rechtem L.-P.
200					5	4	10	0,005	
1600					13	11	36	0,024	Vertikaler Riß in der Mitte.
200					5	5	14	0,009	
2000					15	14	49	0,034	
200					6	5	19	0,013	
2400					17	17	65	0,048	Riß etwa 10 cm links vom l. L.-P.
200					8	7	26	0,018	
2800					19	18	81	0,062	Riß 30 cm vom rechten Auflager entfernt
200					10	7	31	0,022	
3200					20	21	99	0,078	Verlängerung des mittleren Risses.
200					10	8	34	0,025	
3600					24	21	128	0,103	Riß 30 cm vom linken Auflager.
200					10	8	43	0,034	Verlängerung des letzten Risses gegen das Auflager.
4000					26	25	157	0,131	
200					12	9	53	0,042	
4250	106 250	2125	7,5	17,9					

Bei 4250 kg Bruch an der letzten Rißstelle; Zurückgehen der Belastung. An den verrosteten Stellen hat sich Zementmilch angelegt und diese Stellen umhüllt.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}9$, $D = 9{,}1$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 62{,}5$, $D = 82$, $N = 63{,}4$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 1950$, $D = 1790$, $N = 1900$.

Die Abb. 2a ist im Stadium des Bruches aufgenommen und zeigt die bereits wiederholt besprochenen Vorgänge bis zum Bruche; das Aussehen des Balkens nach vollständiger Zerstörung ist in Abb. 3 ersichtlich.

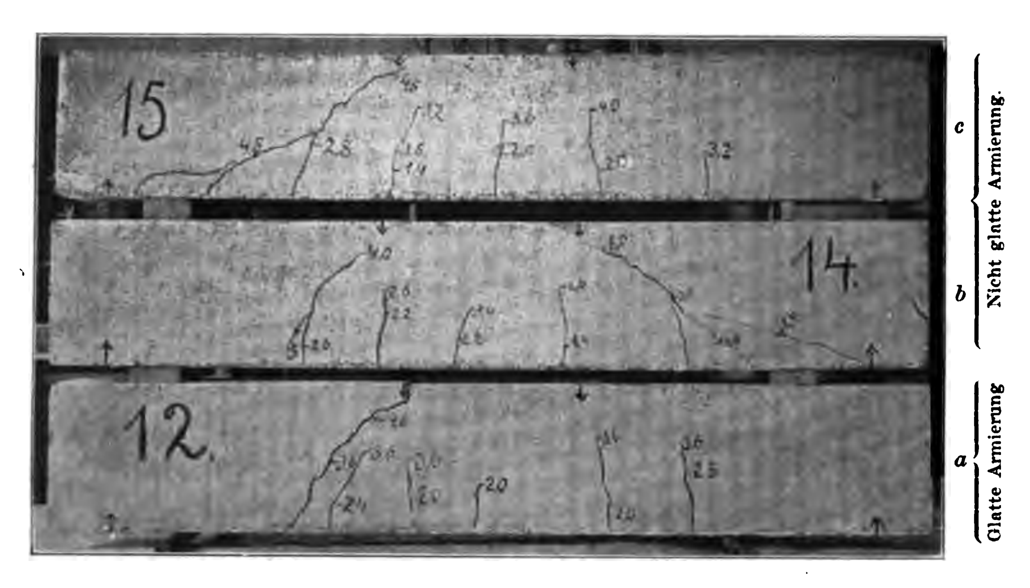


Abb. 2.



Abb. 3.

Balken Nr. 13. Ein Quadrateisen 18 × 18 mm ist in einem Abstand von 2 cm von der Unterkante des Balkens in der Achse eingebettet. Die Bruchlast ist wegen der größeren Oberfläche und Querschnittsfläche größer geworden (5510 kg). Die Zugspannung des Eisens erreicht einen maximalen Wert von 2220 kg/cm², kleiner als die Elastizitätsgrenze; die Druckspannung

Balken Nr. 13.

Eigengewicht {gewogen: 127,8 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung Q.-E. 18 × 18 {$f_e = 3,24\ cm^2$, $U = 7,2$ cm.

Alter: 57 Tage.

Belastung 2 P kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22,1 cm.
400					2	1	3	0,001	
200					1	1	1	0	
600					3	4	7	0,003	
200					2	2	2	0	
800					6	6	13	0,007	
200					2	4	3	0	
1000					8	7	17	0,009	
200					4	4	5	0,001	
1200	30 000	600	2,1	4,5	9	10	26	0,016	Kleiner Riß unter L.-P.
200					3	5	10	0,006	Kurzer vertikaler Riß in der Mitte und unterhalb L.-P
1400					11	11	35	0,024	
200					6	5	13	0,007	
1800					14	13	50	0,036	
200					6	7	22	0,015	
2200					15	16	68	0,052	
200					7	7	31	0,024	
2600					18	17	86	0,068	
200					8	10	37	0,028	
3000					20	20	104	0,084	
200					10	10	44	0,034	
3400					22	21	129	0,107	
200					11	12	53	0,041	
3800					25	23	151	0,127	
200					13	12	61	0,048	
4200					26	25	173	0,147	
200					14	13	68	0,052	
4600					29	26	196	0,168	
200					15	14	74	0,059	
5000					31	27	223	0,194	
200					16	15	81	0,065	
5500	137 500	2750	9,7	20,2					

Bei 5500 kg Bruch, 40 cm vom Auflager entfernt, unter Nachziehen des Eisens, dessen Oberfläche blank ist.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 14$, $D = 9,1$, $N = 12,5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 78$, $D = 106$, $N = 81,4$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 2430$, $D = 2220$, $N = 2360$.

im Beton 81,4 kg/cm²; $s = 9{,}7$ kg/cm². Die Haftfähigkeit h ergibt sich aus folgenden Werten:

$$h' = 22{,}1 \text{ cm},$$
$$u = 7{,}2 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 3{,}0 \text{ cm},$$
$$e = 47 \text{ cm},$$
$$M_c = 2750 \times 40 = 110\,000 \text{ kgcm},$$
$$h = \frac{110\,000}{47 \times 7{,}2\,(22{,}1 - 3{,}0)} = \mathbf{17{,}2} \text{ kg/cm}^2,$$
$$k = 20{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 14. Die Armatur dieses Balkens ist das in Amerika häufig zur Anwendung kommende „Johnson-Eisen" (Abb. 4), ein Stahl mit einer Elastizitätsgrenze von 3,8 t/cm². Wie aus der Abbildung ersichtlich,



Abb. 4.

wechselt der Querschnitt dieses Eisens; zur Berechnung der Zugfestigkeit wurde aber selbstverständlich der kleinste Querschnitt $\frac{14{,}6}{14{,}6}$ mm angenommen. Das Bruchbild in Abb. 2b zeigt, daß die ersten Risse bei 1400 kg innerhalb der Laststrecke auftraten. Mit steigender Belastung bildeten sich auch außerhalb Risse in einem Abstande 35 cm vom Auflager. Wäre die Oberfläche des Eisens glatt, so würde an dieser Stelle der Bruch durch Herausziehen des Eisens stattfinden, wie es z. B. bei Balken 12 geschah (Abb. 2a); so aber findet die Bewegung des Eisens an den Vorsprüngen der Oberfläche ein Hindernis. Aus dem gleichen Grunde dürfte auch die Erhöhung der Bruchlast trotz des geringeren Eisenquerschnittes eingetreten sein. Die vom letzten Risse ausgehenden Ab-

Balken Nr. 14.

Eigengewicht {gewogen: 128,6 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung Johnson-E. mit {$f_e = 2,13$ cm², min. Dimension 14,6 × 14,6 {$U = 6,4$ cm.

Alter: 57 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22.24.
400					1	1	3	0,002	
200					0	0	0	0	
600					2	1	6	0,004	
200					2	0	1	0,000	
800					4	4	10	0,006	
200					2	1	2	0	
1000					7	5	14	0,008	
200					2	1	3	0,001	
1200					9	6	20	0,012	
200					3	1	5	0,003	
1400	35 000	700	2,4	5,6	10	8	31	0,022	Vertikaler Riß unter r. L.-P.
200					5	2	9	0,005	
1800					13	10	50	0,038	
200					6	2	15	0,011	
2200					15	12	68	0,054	Vertikaler Riß in der Mitte.
200					6	1	21	0,017	
2600					17	13	89	0,074	Risse 15 cm links u. rechts v. L.-P.
200					9	2	28	0,022	
3000					21	15	110	0,092	Verlängerung der letzten Risse.
200					9	5	34	0,027	
3400					23	17	134	0,114	
200					11	7	40	0,031	
3800					26	20	161	0,138	Verlängerung der letzten Risse
200					13	5	47	0,038	
4200					33	21	188	0,161	Erweiterung des vorigen und Abzweigung des Risses gegen das Auflager.
200					12	5	56	0,047	
4600					30	24	227	0,200	
200					14	6	70	0,060	
5000					32	25	270	0,241	Erweiterung der Abzweigungen.
200					15	6	85	0,074	
5400	135 000	2700	9,2	21,6					

Bei 5400 kg rasches Zurückgehen der Belastungsskala und Herausziehen des Eisens unter Wegsprengen des Betons.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13,6$, $D = 79$, $N = 12,5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 78$, $D = 116$, $N = 79,6$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 3560$, $D = 3220$, $N = 3500$.

zweigungen zeigen deutlich, daß der Beton durch die Bewegung des Eisens abgesprengt wird. Nach der Zerstörung des Balkens (Abb. 5) konnte man sehen, daß der Beton zwischen den Vorsprüngen der Eisenoberfläche haften blieb, was den Eindruck macht, daß die Wirkung beim Herausziehen des Eisens dieselbe ist wie die bei einem Eisen mit der um die Stärke der Vorsprünge vermehrten Dicke des Eisens.

Die Eisenspannung beim Bruch beträgt 3220 kg/cm und liegt unterhalb der Elastizitätsgrenze.

$$\sigma_d = 79{,}6 \text{ kg/cm}^2,$$
$$s = 9{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Bruch erfolgte also an der Ueberwindung der Haftung bei 5400 kg.

$$c = 42 \text{ cm},$$
$$h' = 22{,}24 \text{ cm},$$
$$\frac{y}{3} = 2{,}6 \text{ cm}.$$

Berücksichtigt man bei der Berechnung von h nach den oben erwähnten Wahrnehmungen die Stärke der Vorsprünge, so bestimmt sich

$$u = 4 \times 1{,}6 = 6{,}4 \text{ cm},$$
$$M_c = 2700 \times 35 = 94\,500 \text{ kg/cm}.$$

Mithin ist

$$h = \frac{94\,500}{42 \times 6{,}4\,(22{,}24 - 2{,}6)} = \mathbf{17{,}9} \text{ kg/cm}^2,$$
$$k = 21{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

Balken Nr. 15. Die Armatur ist das amerikanische „Ransome-Eisen", gewunden (Abb. 5), ein Stahl mit einer Elastizitätsgrenze von 3,1 t/cm². Die Erscheinungen bis zum Eintreten des Bruches sind ähnlich den bei



Abb. 5.

Balken Nr. 15.

Eigengewicht {gewogen: 125,9 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung Ransome-Eisen 16 × 16 mm {$f_e = 2{,}5$ cm², $U = 6{,}4$ cm.

Alter: 58 Tage.

Belastung $2P$ kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22,2 cm.
400					0	1	3	0,002	
200					0	0	0	0	
600					1	3	6	0,004	
200					0	0	0	0	
800					3	5	9	0,005	
200					1	1	1	0	
1000					4	5	13	0,008	
200					0	2	1	0	
1200					6	7	18	0,011	
200					0	1	2	0,001	
1400	35 000	700	2,4	5,7	8	6	27	0,020	Vertikaler Riß unter link. L.-P.
200					1	1	6	0,005	
1600					9	7	35	0,027	Riß in der Mitte.
200					2	1	8	0,006	
2000					12	10	54	0,043	
200					4	2	14	0,011	
2400					14	10	72	0,060	Verlängerung der Risse unter L.-P.
200					5	3	21	0,017	
2800					17	12	92	0,077	Neuer Riß 30 cm vom Auflager.
200					9	3	26	0,020	
3200					18	15	108	0,091	
200					9	3	30	0,024	
3600					21	14	131	0,113	
200					10	1	36	0,030	
4000					24	16	153	0,133	Verlängerung des letzten Risses.
200					10	3	42	0,035	
4400					28	17	199	0,176	
200					14	5	60	0,050	
4500	112 500	2250	7,7	18,2					

Bruch bei 4500 kg unter raschem Zurückgehen der Belastungsskala bei dem letzten Riß unter Wegsprengen des Betons.

Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}7$, $D = 8{,}5$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 65{,}2$, $D = 91$, $N = 66{,}4$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 2500$, $D = 2260$, $N = 2430$.

Balken 14; auch hier bietet die Oberfläche einen Widerstand gegen die Bewegung des Eisens (Abb. 2c). Die Bruchlast ist hier aber kleiner als bei Balken 14; sie beträgt nur 4500 kg. Die maximalen Spannungen sind:

$\sigma_d = 66{,}4$ kg/cm², $\sigma_{Eisen} = 2260$ kg/cm² (unterhalb der Elastizitätsgrenze).

$s = 7{,}7$ kg/cm²;

$c = 37$ cm,

$h' = 22{,}2$ cm,

$\frac{y}{3} = 2{,}8$ cm,

$u = 6{,}4$ cm,

$M_c = 2250 \times 30 = 67500$,

$$h = \frac{67500}{37 \times 6{,}4\,(22{,}2 - 2{,}8)} = \mathbf{14{,}7}\ \text{kg/cm}^2,$$

$k = 18{,}2$ kg/cm².

Balken Nr. 16. Lage und Querschnitt der Armatur sind wie bei 12, doch ist das Eisen mit dem Obergurt verankert (s. Fig. 1a). Die Ver-



Abb. 6.

ankerung hat eine bedeutend höhere Bruchlast zufolge — 5800 kg —; diese ist darauf zurückzuführen, daß die Verankerung eine Bewegung des Eisens verhindert.

Die beim Bruch auftretenden Spannungen sind:

$\sigma_{Eisen} = 2430$ kg/cm² (innerhalb der Elastizitätsgrenze).

Selbst wenn σ_d nach der deutschen Methode gerechnet wird, erhält man einen Wert (112 kg/cm²), der die Druckfestigkeit des Betons noch nicht erreicht hat; $s = 9{,}9$ kg/cm².

Der Bruch kommt dadurch zustande, daß der Beton längs der Achse der Armierung vom Auflager gegen die Mitte gespalten wird (Abb. 6); die Verankerung ermöglichte es, daß der Beton nahezu seine Druckfestigkeit erreichen konnte.

Balken Nr. 16.

Eigengewicht {gewogen: 126,1 kg, gerechnet: 128,8 kg. Armierung R.-E. 20 mm {$f_e = 3{,}14\ cm^2$, $U = 6{,}28$ cm.

Alter: 58 Tage.

Belastung 2 P kg	Maximal-Moment M kgcm	Maximal-Querkraft Q kg	Maximal-Schubspannungen in Beton s kg/cm²	„Haftspannung" k kg/cm²	Durchbiegung in cm l	r	m	$d = m - \frac{l+r}{2}$	Anmerkung
200					0	0	0	0	Nutzbare Höhe: 22 cm.
400					4	2	3	0,001	
200					1	1	1	0	
600					4	4	8	0,004	
200					2	2	2	0	
800					6	6	13	0,007	
200					4	4	4	0	
1000					8	6	18	0,012	
200					4	4	6	0,002	
1200					10	9	24	0,014	
200					5	5	9	0,004	
1400					11	12	33	0,021	
200					6	6	14	0,008	
1600					11	13	38	0,026	
200					7	5	14	0,008	
1800	45 000	900	3,2	7,6	13	14	49	0,035	Vertikale Risse unterhalb L.-P. und in der Mitte.
200					7	7	20	0,013	
2200					14	16	64	0,049	
200					8	8	26	0,018	
2600					15	19	83	0,066	Verlängerung der Risse unter L.-P.
200					10	9	34	0,024	
3000					17	23	107	0,087	
200					11	10	42	0,031	
3400					18	24	131	0,110	
200					10	12	50	0,039	
3800					19	26	156	0,133	
200					11	12	58	0,046	
4200					20	28	187	0,163	Abzweigung des letzten linkseitigen Risses.
200					11	13	67	0,055	
4600					21	30	223	0,197	
200					12	14	80	0,067	
5000					22	34	261	0,233	
200					7	15	96	0,085	
5400					23	36	311	0,281	
200					8	16	121	0,109	
5800	145 000	2900	9,9	24,5					

Bei 5800 kg Bruch durch Zersprengen des Betons längs der Achse.
Lage der Nullinie in cm von der Oberkante:

$S = 13{,}9$, $D = 9{,}1$, $N = 12{,}5$.

Maximale Druckspannung im Beton in kg/cm²:

$S = 85$, $D = 112$, $N = 87$.

Maximale Zugspannung im Eisen in kg/cm²:

$S = 2650$, $D = 2430$, $N = 2580$.

Das Eisen ist jetzt imstande, den Zuggurt so lange zusammenzuhalten, bis der Widerstand des Obergurts gegen seine Bewegung aufgehoben wird; die Spaltung längs der Achse zeigt die Bewegungsrichtung an.

Bei diesem Balken läßt sich eine Haftfähigkeit im Sinne der Ausführungen des Verfassers nicht ermitteln; die Verankerung hat eine Ueberwindung der Haftfähigkeit gehindert.

Berechnet man in der allgemein üblichen Weise die „Haftfestigkeit“ für diesen Balken, so erhält man 24,5 kg/cm² Eisenoberfläche; für die Berechnung der „Haftfestigkeit“ bei Balken 12 gelten dieselben Annahmen und Bedingungen, und es ergibt sich für $k = 17{,}9$ kg/cm².

Der Vergleich dieser beiden Resultate veranschaulicht die Unhaltbarkeit der Theorie der Haftspannungen und Haftfestigkeiten und deren Berechnungsweise.

Einfluß der Haftfähigkeit auf die Durchbiegung.

Es handelt sich hier nicht darum, die Frage der Durchbiegung von armierten Betonbalken zu lösen, sondern den Einfluß der Haftfähigkeit vor

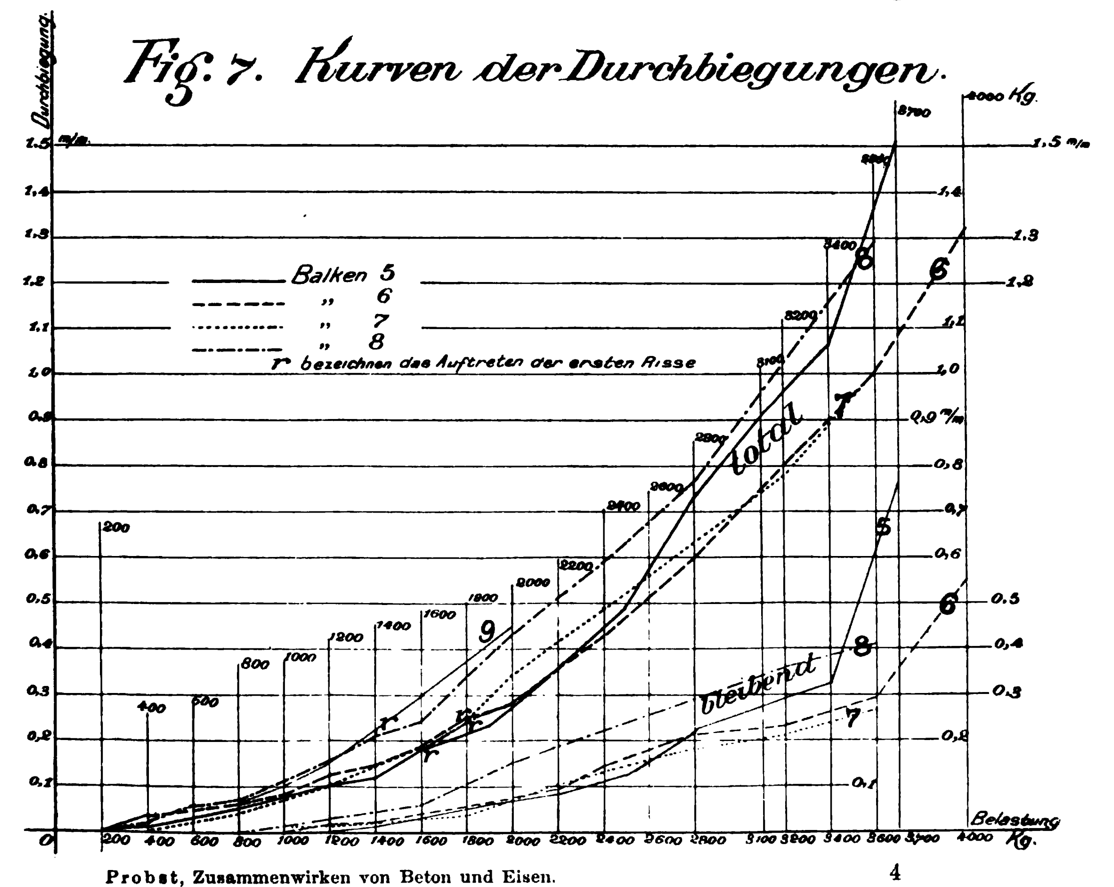
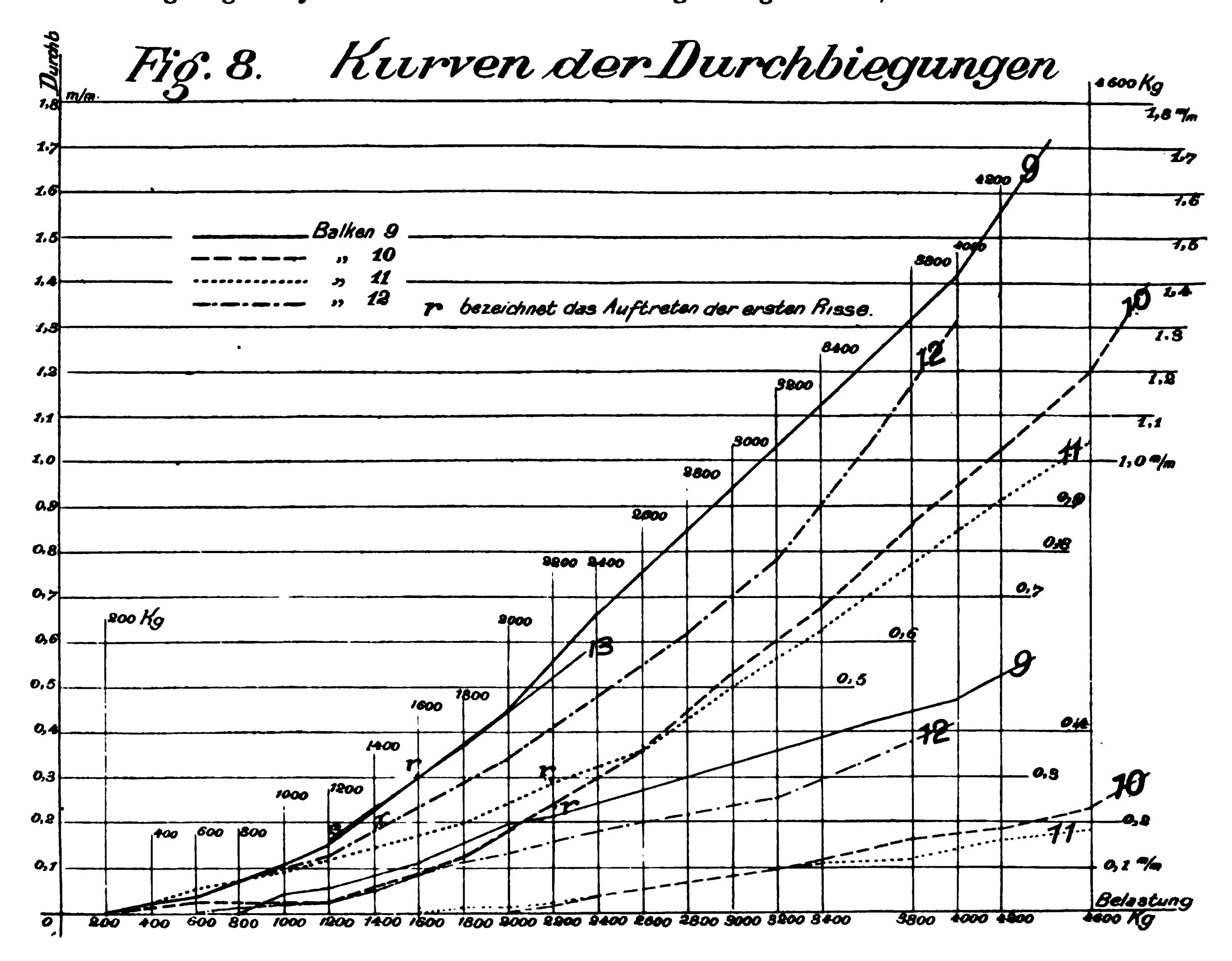


Fig. 7. Kurven der Durchbiegungen.

Augen zu führen. In Fig. 5, 7, 8 u. 9 sind die Kurven der Durchbiegungen aufgetragen derart, daß die Belastungen als Abszissen und die Durchbiegungen als Ordinaten verzeichnet sind. Außer den totalen sind auch die jeder Belastung entsprechenden bleibenden Durchbiegungen aufgetragen. Je vier Kurven sind in einer Figur eingezeichnet, ebenso ein Teil



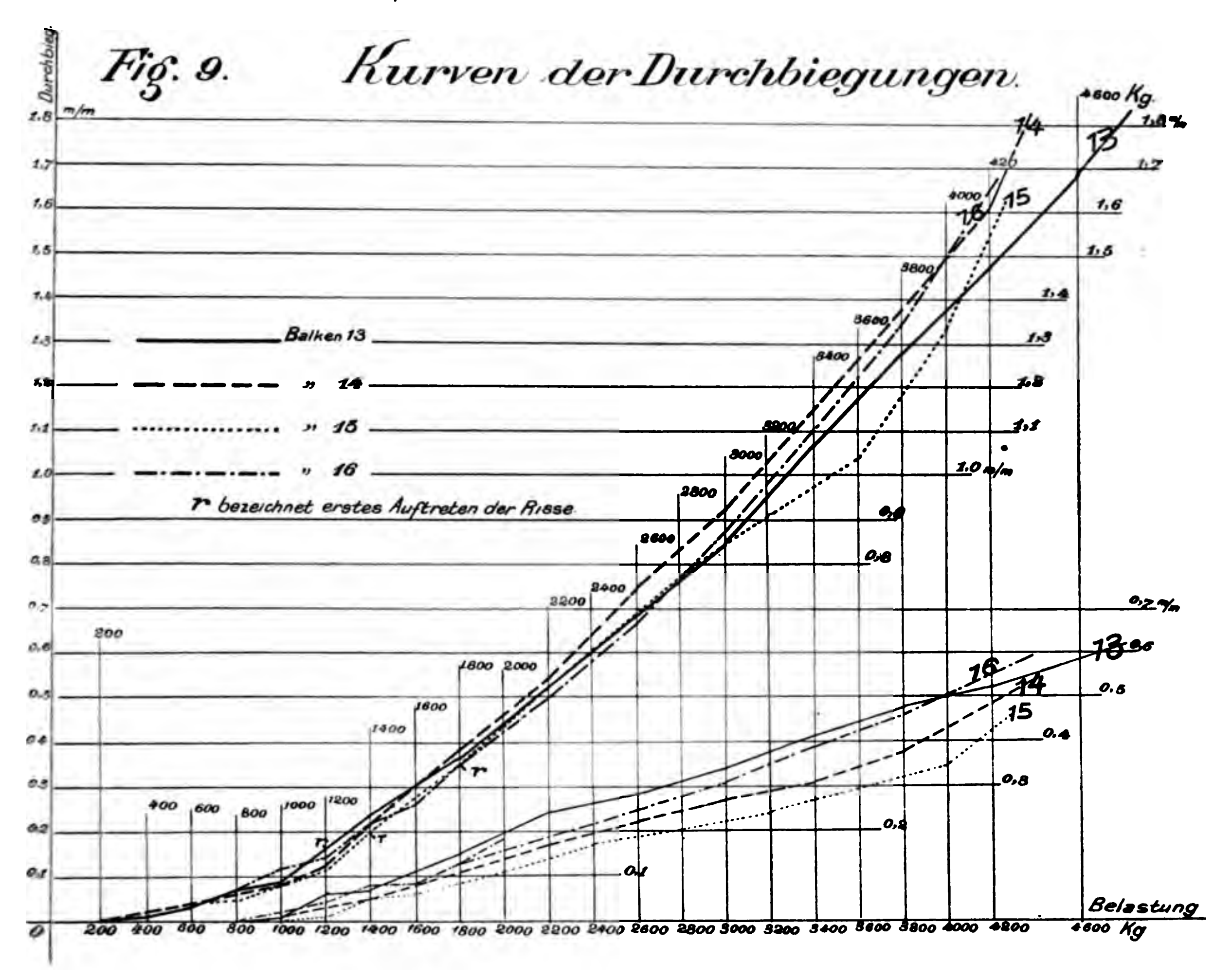
der darauffolgenden Kurve, um deren Verlauf vergleichen zu können. Der Verlauf der Durchbiegungskurven läßt drei Stadien unterscheiden:

1. Bis zum ersten Auftreten der Risse (mit *r* bezeichnet),
2. nach dem Auftreten der Risse,
3. Bruch.

Vergleicht man die Durchbiegungskurven, so findet man dieselben Erscheinungen bei allen 16 Balken.

Im ersten Stadium sind die Durchbiegungen sehr gering und bleiben in der Nähe derjenigen Kurve, die dem nicht armierten Balken Nr. 1 entspricht; die bleibenden Durchbiegungen beim Zurückgehen auf die Ausgangsbelastung sind 0.

Nach Auftreten der Risse — also nach Lockerung der Haftfähigkeit — nehmen die Durchbiegungen stärker zu und sind in ihrem Verlaufe nahezu proportioniert. Dieses zweite Stadium beginnt bei dem ersten Knie der Durchbiegungskurve und endet bei dem zweiten Knie, bei dem Eintreten des dritten Stadiums, des Bruchstadiums.



Mit Beginn des zweiten Stadiums treten auch bleibende Durchbiegungen auf, welche mit zunehmender Belastung stetig wachsen.

Was den Verlauf der Kurven anbelangt, sei bemerkt, daß die Verankerung, sei es durch die Gestaltung der Oberfläche, sei es durch eine feste Verbindung mit dem Druckgurt, einen regelmäßigen Verlauf der Kurven bewirkt (s. Fig. 9).

Die Verwendung von mehreren Eisenstäben an Stelle eines einzigen von gleichem Querschnitt verringert die Durchbiegungen, wie es an den Kurven für Balken 10 und 11 ersichtlich ist (Fig. 8).

Zusammenfassung der Versuchsresultate; Ergebnisse und Folgerungen.

Ueberblickt man die Versuchsresultate der 16 Probebalken, so wird man finden, daß alle armierten Balken mit dem Aufhören der Haftung zum Bruche kamen In keinem einzigen Falle ist die Druckfestigkeit des Betons erreicht worden; für die Schubspannungen ergaben sich derart kleine Werte, daß man trotz der geringen Verläßlichkeit aller bisher vorliegenden Versuchsresultate für Schubfestigkeiten annehmen darf, daß die gefundenen Werte die Schubfestigkeit nicht erreicht haben. Anderseits hat die Zugspannung im Eisen bei keinem Balken die Elastizitätsgrenze erreicht; selbst wenn man diese als Grundlage für die Wahl der zulässigen Eisenspannungen wählt, ist die Bruchursache des Balkens nicht dem Eisen zuzuschreiben. Gäbe es eine Adhäsion oder, wie es in neuerer Zeit genannt wird, eine „Haftfestigkeit" zwischen Beton und Eisen, so müßte sie von einer Verankerung irgend welcher Art unabhängig sein. Wenn man den Verlauf der Untersuchungen verfolgt und die auftretenden Erscheinungen beobachtet, wird man finden, daß das Zusammenwirken von Eisen und Beton ein bloß mechanisches ist. Es findet ein Festklemmen der Armierung durch den beim Erhärten sich zusammenziehenden Beton statt, das je nach verschiedenen Umständen früher oder später aufhört.

Um die Abhängigkeit dieser Eigenschaft von den erzielten Bruchlasten als Maß der Tragsicherheit festzustellen, hat der Verfasser die Bezeichnung Haftfähigkeit *h* f. 1 cm^2 der Eisenoberfläche angenommen; die in der nebenstehenden Zusammenstellung vorkommende Bezeichnung „Haftkraft" ist der beim Herausziehen des Eisens längs des ganzen Umfanges auf 1 cm Länge wirkende Widerstand.

Aus der Zusammenstellung ersieht man auf den ersten Blick die Abhängigkeit der Bruchlast von der Haftkraft. Unter sonst gleichbleibender Beschaffenheit der Oberfläche und der Festigkeitsverhältnisse des Eisens wächst die Bruchlast mit der Haftkraft, doch ist diese Erhöhung der Bruchlast noch von anderen Verhältnissen abhängig, die noch zu besprechen sind.

Vergleichen wir die Größe der Haftfähigkeit bei Balken 4, 5, 6, 7, 8, 9, bei welchen die Oberfläche und der Querschnitt, ebenso die Festigkeitsverhältnisse dieselben sind, so finden wir unter sonst gleichen Abmessungen des Balkens: Die Haftfähigkeit wächst mit der Zunahme des Prozentgehaltes der Armierung, wenn man die Querschnittsfläche des Eisens in Prozenten des nutzbaren Betonquerschnittes ausdrückt, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Die Haftfähigkeit wächst mit abnehmender Nutzhöhe des Betonquerschnittes.

Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Balken Nr.	Nutzhöhe h' in cm	Bruchlast in kg	Haftfähigkeit in kg/cm²	Umfang der Armierung und Eisenoberfläche in cm	Haftkraft in kg	Bruchursache
1	—	1100	—	nicht armiert	—	—
2	22	2050	—	—	—	Lockerung des Eisens an den Enden.
3	24,1	3200	12,5	5,4	67,5	Aufhören der Haftung.
4	24	3550	11,6	6,28	72,9	Ebenso.
5	23,2	3850	13,4	6,28	84,3	Ebenso.
6	22,8	4000	13,7	6,28	86,2	Ebenso.
7	21,9	4000	14,4	6,28	90,6	Ebenso.
8	21,1	4000	14,9	6,28	93,8	Ebenso.
9	20	5150	20,8	6,28	13,10	Ebenso.
10	22,3	5750	13,2	8,8	116,0	Ebenso.
11	22,5	5000	10,3	12,56	129,5	Aufhören der Haftung durch Abscheren.
12	22	4250	14,4	6,28	90,5	Aufhören der Haftung.
13	22,1	5500	17,2	7,2	123,9	Ebenso.
14	22,24	5400	17,9	6,4	114,5	Ebenso.
15	22,2	4500	14,7	6,4	94,0	Ebenso.
16	22	5800	—	6,4	—	Zersprengen des Betons.

Bei Vergleichung der Bruchlasten von Balken mit Armierungen mit verschiedenem Umfang, aber dem gleichen Querschnitt muß die Größe der mit dem Umfang multiplizierten Haftfähigkeit, die Haftkraft herangezogen werden.

Bei Zusammenstellung der Haftkräfte der Balken 10, 11, 12 und 13 findet man, daß der Querschnitt der Armierung dieser Balken nahezu gleich und die Höhe der Einbettung im Beton die gleiche ist. Die Haftkraft hängt hier also nur von dem Umfang der eingebetteten Armierung ab, und es ergibt sich, daß die Haftkraft mit zunehmendem Umfang der Armierung wächst.

Bei Nebeneinanderstellung der Versuchsresultate bei Balken 12, 14 und 15 findet man die Abhängigkeit der Haftfähigkeit von der Beschaffenheit der Oberfläche. Bei Balken 12 hat die durch Verrostung hervorgerufene Rauhigkeit der Oberfläche eine Erhöhung der Haftfähigkeit hervorgerufen. Bei Balken 14 und 15 ist die Erhöhung der Haftfähigkeit nicht nur auf die Gestaltung der Oberfläche, sondern auch auf die Festigkeitsverhältnisse des Eisens zurückzuführen; trotz des bedeutend geringeren Querschnittes der Eisen wurden insbesondere bei Balken 14 sehr hohe Bruchlasten erzielt. Es würde jedoch zu weit führen, im Rahmen dieser Abhandlung auch den Einfluß der Festigkeitsverhältnisse der Armierung auf die Festigkeit von armierten Betonkonstruktionen zu untersuchen. Es handelt sich hier nur darum, die Abhängigkeit der Haftfähigkeit von der Form der

Oberfläche festzustellen. Bei der Armierung mit dem gewundenen Ransomeeisen (Balken 15) zeigte sich ebenso wie bei den Balken mit glatter Armierung beim Eintreten des Bruches ein rasches Sinken der Belastung und nach Herausziehen des Eisens eine blanke Oberfläche; anders war es bei Balken 14 (das mit Vorsprüngen versehene Johnsoneisen). Zwischen den einzelnen Vorsprüngen hatte sich der Beton festgesetzt und wurde mit dem Eisen herausgezogen. Die Vorsprünge hindern eine Bewegung des Eisens, und damit ein Aufhören der Haftung, solange die bleibenden Verlängerungen der Armierung nicht zu groß sind und der Beton nicht durch die bei der Durchbiegung erfolgende Verlängerung zerstört wird. Hat aber diese eine gewisse Grenze überschritten, so kann eine Bewegung des Eisens unter gleichzeitiger Zerstörung des Betons erfolgen, und damit hört die Haftung auf. Die Versuchsergebnisse bei Balken 12, 14 und 15 haben aber ohne Zweifel ergeben, daß die Haftfähigkeit bei sonst gleichen Verhältnissen bei rauher Oberfläche größer ist als bei glatter Oberfläche.

Durch Vergleichung der Bruchlasten von Balken 12 und 16 findet man, daß der Widerstand des Eisens gegen das Herausziehen aus dem Beton durch eine Verankerung mit dem Druckgurt größer wird, daß also die Art des Zusammenwirkens von Beton und Eisen durch eine Verankerung des Eisens vollständig geändert wird. Die Haftfähigkeit wird durch die Verankerung nicht erhöht, sie hindert nur eine Bewegung des Eisens, wie sie bei den nicht verankerten Armierungen stattfindet.

Die Bruchursachen bei den armierten Probebalken sind, wie direkt und indirekt nachgewiesen wurde, auf die Ueberwindung der Haftfähigkeit zurückzuführen; bei Balken 11 wurde das Aufhören der Haftfähigkeit durch Abscherung bewirkt, bei den anderen Balken war das Ueberschreiten der Zugfestigkeit die Ursache des Aufhörens der Haftfähigkeit, wie bei der Besprechung der einzelnen Proben auseinandergesetzt wurde.

Ueberblickt man die Resultate der Untersuchung und der Berechnung, so läßt sich daraus folgern:

Die Angabe von bestimmten Zahlen für sogenannte Haftfestigkeiten hat keine Berechtigung, weil es keine Haftfestigkeit gibt. Es besteht nur ein Nebeneinanderwirken von Beton und Eisen, welches von der Zugfestigkeit beziehungsweise der Dehnungsfähigkeit des armierten Betons, von der Scher- oder Schubfestigkeit des Betons, von dem Umfang und der Oberflächenbeschaffenheit der Eiseneinlagen und bei sonst gleichen Verhältnissen in der Dimensionierung von der Lage der Armierung abhängt.

Von der Bedeutung für die Praxis ist insbesondere die Abhängigkeit der Haftfähigkeit von der Zugfestigkeit des Betons. Die für

die Berechnung angenommene Voraussetzung, daß der Beton keinen Zug aufzunehmen hat, hat dahin geführt, daß man bei armierten Betonkonstruktionen die Frage des Einflusses der Zugfestigkeit gar nicht berücksichtigt; und deshalb soll hervorgehoben werden, daß eine Grundbedingung für die Tragsicherheit eine möglichst hohe Zugfestigkeit des Betons ist. Wie Professor Schüle in seinen letzten Untersuchungen (an welchen der Verfasser mitzuarbeiten Gelegenheit hatte) durch direkte Messungen nachgewiesen hat, tritt durch wiederholte Belastungen nach Ueberwindung der Zugfestigkeit des Betons eine Erhöhung sowohl der Druckspannungen als auch der Durchbiegungen ein; der Einfluß der wiederholten Belastungen auf die Haftfähigkeit wurde zwar nicht direkt untersucht, aber es ist einleuchtend, daß der Einfluß der Wiederholungen auf die Haftfähigkeit sehr bedeutend sein wird. Solange aber die Zugfestigkeit des Betons nicht überschritten ist, also vor dem Auftreten der Zugrisse, ist die Einwirkung der Wiederholungen nicht von so ausschlaggebender Bedeutung.

An Stelle eines starken Eisens als Armierung wird es immer angezeigt sein, mehrere schwächere Eisen von gleichem Querschnitt zu verwenden, weil dadurch eine größere Oberfläche und eine gute Verteilung der Zugspannungen auf die ganze Zugzone des Betons erzielt wird. Die Grenze hierfür gibt die Scherfestigkeit des Betons an; man darf mit der Verteilung der Eisen nur so weit gehen, als dadurch nicht eine allzu große Verminderung des Betonquerschnittes eintritt.

Die Lage des Eisens in der Zugzone soll nicht zu nahe der Nullinie, aber auch nicht zu nahe vom Rande liegen. Im letzten Falle wird die Haftfähigkeit verringert, im ersten Falle werden die spezifischen Spannungen im Eisen und Beton erhöht. Am zweckmäßigsten dürfte es sein, den Abstand von der äußersten Zugfaser gleich der Armierungsstärke zu machen.

Unter allen Umständen ist es notwendig, die Armierungen mit dem Druckgurt gut zu verankern, weil dadurch der Zusammenhang des Eisens mit dem Beton auch nach dem Aufhören der effektiven Haftfähigkeit erhalten bleibt.

Anhang.

Es ist noch notwendig, einiges über die Berechnungen der durch die Bruchlasten hervorgerufenen maximalen Spannungen im Eisen und im Beton zu sagen. Der Verfasser hat auf drei verschiedenen Wegen die in den Tabellen enthaltenen Werte gefunden:

a) nach der Schweizer Methode, mit S bezeichnet;

b) nach der Methode, wie sie in Deutschland üblich ist, mit D bezeichnet;

c) nach einer Näherungsmethode, mit N bezeichnet.

Alle drei Methoden beruhen auf der Voraussetzung der eben bleibenden Querschnitte nach der Durchbiegung. Daß diese Annahme eine unrichtige ist, hat Professor Schüle in Zürich klar und einwandfrei bewiesen. Es ist nun augenscheinlich, daß eigentlich alle Methoden, die auf dieser unrichtigen Voraussetzung fußen, Näherungsmethoden sind, und es fragt sich, welcher Rechnungsweg am raschesten zum Ziele führt.

Im folgenden sei der Rechnungsweg für die erwähnten drei Methoden angegeben.

a) Berechnung der Spannungen nach der in der Schweiz üblichen Methode.

Diese setzt einen einheitlichen idealen Querschnitt voraus, welcher gleich ist der Summe aus dem Betonquerschnitt und dem mit n multiplizierten Eisenquerschnitt F, wobei $n = \frac{E_{\text{Eisen}}}{E_{\text{Beton}}} = 20$ angenommen wird. Vergleicht man die in den Vorversuchen für die Elastizitätsmoduli gefundenen Werte für Eisen und Beton, so wird man finden, daß $n = 20$ nur gültig ist für Druckspannungen im Beton gegen 70 kg/cm²; für alle unterhalb 70 kg liegenden Spannungen ist $n = 20$ zu groß gewählt. Daraus geht hervor, daß die Bestimmung der Lage der Nullinie, die von n direkt abhängig ist, unterhalb dieser Grenze einen zu großen Wert ergibt. Die weitere Folge ist, daß die gefundenen Druckspannungen kleiner und die Zugspannungen im Eisen größer werden, als bei der Annahme eines kleineren n. Weiter gilt die Annahme, daß die Kurve der Druckspannungen im Beton von der

Achse bis zum oberen Rande geradlinig verlaufe; die Lage des Druckmittelpunktes ist $\frac{y}{3}$ von der Oberkante entfernt. Für die Berechnung der Zugspannungen im Eisen ist vorausgesetzt, daß der Beton keine Zugspannungen aufnimmt, so daß der Zugmittelpunkt in die Schwerachse des Eisens fällt.

Bezeichne b die Breite, h' die nutzbare, $(h' + a)$ die ganze Höhe des Balkenquerschnittes, F_e den Eisenquerschnitt, so ergibt sich für

$$F = b\,(h' + a) + n\,F_e.$$

Das statische Moment der Fläche des Querschnittes S, bezogen auf die Oberkante:

$$S = b\,\frac{(h' - a)^2}{2} + n\,h' F_e;$$

daraus $y =$ dem Abstand der Nullinie von der Oberkante:

$$y = \frac{S}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

J; das Trägheitsmoment des idealen Querschnittes, bezogen auf die Oberkante

$$J = \frac{b\,(h' - a)^3}{3} + n\,h'^2 F_e,$$

und reduziert auf die neutrale Faserschicht: $Jy = J - Fy^2$.

Das obere Widerstandsmoment $Wo = \frac{Jy}{y}$.

Daraus ergibt sich

$$\max \sigma_d = \frac{\max M}{Wo} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

Aus der Momentengleichung der inneren Kräfte, bezogen auf dem Druckmittelpunkt:

$$\max M = \sigma_{\text{Eisen}}\, F_e \left(h' - \frac{y}{3}\right)$$

folgt

$$\sigma_{\text{Eisen}} = \frac{\max M}{F_e \left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 geben die Lage der Nullinie, die maximale Druckspannung im Beton und die maximale Zugspannung des Eisens nach der in der Schweiz gebräuchlichen Methode und dienten als Grundlage für die Ermittlung der in den Tabellen unter S eingetragenen Werte.

b) Die in Deutschland von den Behörden vorgeschriebene Rechnungsmethode beruht auf der Annahme, daß der Beton von vornherein als gerissen angenommen wird, die Zugspannungen also nur vom Eisen übertragen werden. Für $n = \frac{E_{\text{Eisen}}}{E_{\text{Beton}}} = 15$ angenommen wird ein Wert, der erst bei 45 kg/cm² Druckspannung im Beton den Versuchsverhältnissen entspricht. Die Annahme einer proportionierten Spannungsänderung im Beton, welche für den Verlauf der Druckspannungen wie bei der vorigen Methode

eine gerade Linie ergibt, weicht von der effektiven Kurve insofern ab, als sie für die Randspannungen zu große Werte ergibt. Für die Lage der Nullinie gilt die im ersten Teil abgeleitete Gleichung 4:

$$y = \frac{nf_c}{b}\left[\sqrt{1 + \frac{2bh'}{nf_c}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ 4$$

Die der Bruchlast entsprechende maximale Druckspannung im Beton geht aus der Momentengleichung der inneren Kräfte, bezogen auf den Zugmittelpunkt; die maximale Eisenspannung aus der Momentengleichung, bezogen auf den Druckmittelpunkt, hervor.

$$\max M = D\left(h' - \frac{y}{3}\right) = Z\left(h' - \frac{y}{3}\right);$$

$$D = b\,\frac{y}{2}\,\sigma_d; \qquad Z = \sigma_{\text{Eisen}}\, f_e;$$

$$\sigma_d = \frac{\max M}{by\left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ 5$$

$$\sigma_{\text{Eisen}} = \frac{\max M}{F_e\left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ 6$$

Aus 4, 5, 6 ergeben sich die unter D in den Tabellen eingetragenen Werte.

c) Näherungsmethode.

Diese Methode beruht darauf, daß die Nullinie in der Mitte des Balkenquerschnittes angenommen wird. Professor Schüle in Zürich hat gezeigt, daß diese Annahme bei einem rechteckigen Querschnitt Resultate liefert, die ebenso richtig sind als die der vorerwähnten Methode, und vor dieser den Vorzug der Einfachheit hat.

y ist bei dieser Annahme

$$\frac{h' + a}{2} \quad \ldots\ldots\ 7$$

Aus der Momentengleichung

$$M = \sigma_{\text{Eisen}}\, F_e\left(h' - \frac{y}{3}\right) = Z\left(h' - \frac{y}{3}\right)$$

ergibt sich

$$\sigma_{\text{Eisen}} = \frac{M}{F_e\left(h' - \frac{y}{3}\right)} \quad \ldots\ldots\ 8$$

Da die horizontalen Kräfte in einem Querschnitte gleich sind, ist

$$D = Z = \frac{by}{2}\,\sigma_d;$$

$$\sigma_d = \frac{2Z}{by} \quad \ldots\ldots\ 9$$

Diese drei einfachen Gleichungen 7, 8, 9 ersparen die Anwendung größerer Formeln wie bei der deutschen Methode und die umständliche Berechnung der Trägheitsmomente bei der Schweizer Methode. Vergleicht man in den Tabellen die nach den drei Methoden ermittelten Werte, so wird man finden, daß die nach der Näherungsmethode ermittelten Span nungen zwischen den beiden anderen Methoden zu finden sind und nahezu ein Durchschnittswert sind; ihre Genauigkeit ist daher nicht minder.

Zur Beurteilung der maximalen Spannungen hat der Verfasser daher für die Druckspannungen im Beton den nach der Näherungsmethode bestimmten Wert verwendet; bei den maximalen Eisenspannungen den nach der deutschen Methode gefundenen Wert (D) angenommen, weil es der kleinste Wert ist und es erwiesen ist, daß die Eisenspannungen nach allen Methoden zu große Werte ergeben.

Einschlägige Literatur.

Bach: Elastizität und Festigkeit, Druckversuche mit Beton, Versuche über den Gleitwiderstand von einbetonierten Eisen.

Büsing u. Schumann: Der Portlandzement und seine Anwendungen im Bauwesen.

Considère: } Versuche über Dehnungsfähigkeit des armierten und nicht
Kleinlogel: } armierten Betons.

„Beton u. Eisen“, Internationales Organ für Betonbau, Jahrgänge 1902 bis 1906.

Emperger: Die Rolle der Haftfestigkeit im Verbundbalken. (Forscherarbeiten Heft III.)

— Die Abhängigkeit der Bruchlast vom Verbunde. (Forscherarbeiten Heft V.)

Ferret: Versuche über Gleitwiderstände von einbetonierten Eisen.

Mörsch, Wayss u. Freytag: Der Eisenbetonbau.

Schüle, Zürich: Résistance et déformations du béton armé.

— Untersuchungen mit rechteckigen und T-Balken.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES

EISENBETONS

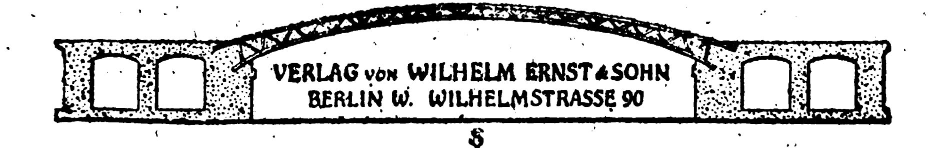
MONOLITÄT DER BETON-BAUTEN

HEFT VII

PREIS 5 MARK

VON

INGENIEUR-OBERST N. A. SHITKEWITSCH
PROFESSOR DER KAISERLICHEN INGENIEUR-AKADEMIE
ZU ST. PETERSBURG



MONOLITÄT

DER

BETONBAUTEN

VON

N. A. SHITKEWITSCH

INGENIEUR-OBERST

PROFESSOR DER KAISERLICHEN INGENIEUR-AKADEMIE

ZU ST. PETERSBURG

Mit **60** Textabbildungen

Autorisierte Ausgabe

BERLIN 1906

Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

INHALTS-ÜBERSICHT.

Einleitung.

Mit der Entwicklung der Zementindustrie hat die Bautechnik die Möglichkeit erhalten, in dauerhafte Betonmassive — Monolithe — jene feine Steinmaterialien zu verwandeln, welche in Form von Sand, Kies, Kieselsteinen und Bruchstücken von Felssteinen in der Natur im Überfluß zu finden sind, oder welche Abfälle der Industrie bilden, z. B. Schlacke, Schamotte, Ziegelschutt usw. In den Händen eines gegenwärtigen Baumeisters bildet der Portlandzement eine Quelle jener verborgenen, inneren Naturkräfte, durch welche die Dauerhaftigkeit und Festigkeit der natürlichen Steinmaterialien bestimmt wird. Deswegen gibt eine gewandte Benutzung der hydraulischen Bindemittel die Möglichkeit, ein künstliches Steinmaterial — Beton — erforderlicher Qualitäten und Dimensionen, mit kleinsten Ausgaben versehen, herzustellen. Außerdem hat der Beton einen wesentlichen Vorzug vor anderen Steinmaterialien durch seine ungewöhnliche Formungsfähigkeit bei seiner Verwendung. Alle festen Bestandteile des Betons werden in Form von trockenen Stoffen gebraucht, und die Arbeit bei Aufführungen von Betonbauten erstreckt sich auf die Formung, anstatt auf die kompliziertere Arbeit bei der Mauerung. Diese Möglichkeit des Erhaltens von Beton-Monolithen erforderlicher Dimensionen und Qualitäten bei billigsten Ausgaben hat eine weiteste Verwendung des Betons zu Festungs-, Hafen- und sonstigen Bauten hervorgerufen. So wurden z. B. in Deutschland im Laufe nur des einen Jahres 1887 zu Festungsbauten 4 800 000 cbm Beton verbraucht.[1])

Anderseits aber ist die rasche und weite Verwendung des Betons zu Hafen- und Festungsbauten bedeutend zuvorgekommen der theoretischen Ausarbeitung der Frage über Beton als Baumaterial. Fast alle bis jetzt vorgenommenen Prüfungen tragen einen laboratorischen Charakter, und wenn auch auf diesem streng wissenschaftlichen Wege die Fragen über die Bestandteile und die Bereitungsarten des Zementbetons erläutert sind, so

[1]) Ingen.-Journal 1889, Nr. 4, S. 605: „Versuche mit Betons".

bleiben anderseits die Fragen über die mechanischen Eigenschaften des Betons und über die Verwendung dieses Materials zur Aufführung von Monolithbauten noch bedeutend unaufgeklärt. Bis heute zahlreich vorgenommene mechanische Prüfungen waren für die Aufklärung dieser Fragen in den meisten Fällen wenig günstig, weil die Herstellungsbedingungen der Proben von den Bedingungen der Praxis verschieden waren, die Prüfungen nicht nach einem allgemeinen Programm vorgenommen wurden und sich hauptsächlich auf Druckproben verhältnismäßig kleiner Betonkörper erstreckten. Die Frage über die gleichartigen Anfertigungs- und Prüfungsbedingungen von Beton wurde zuerst von Prof. Gary auf dem Kongreß deutscher Betontechniker im Jahre 1900[1]) angeregt, und bald darauf, auf dem Kongreß im Jahre 1901,[2]) gelangten zur Annahme von einem besonderen Ausschuß ausgearbeitete Normen für die einheitliche Anfertigung und Druckprobe von Betonprobekörpern. Auf diese Weise wurde zur Erlernung der mechanischen Eigenschaften des Betons sozusagen erst unlängst der erste Schritt getan. Im allgemeinen wird die Frage über die Eigenschaften des Betons noch dadurch bedeutend komplizierter, daß während der ganzen längeren Dauer des Erhärtungsprozesses die mechanischen Eigenschaften des Betons sich ununterbrochen ändern. Im ersten Augenblick nach der Herstellung wird die Bindung der verschiedenartigen Bestandteile des Betons hauptsächlich mittels der Reibungskraft, welche durch die Dichtung der trockenen Masse hervorgerufen wird, bestimmt. In solchem Zustande stellt der Beton kein selbständiges Baumaterial dar, sondern bildet nur eine Mischung verschiedener Baumaterialien. Das Erscheinen seiner individuelen Eigenschaften beginnt erst mit dem Moment, in welchem die gegenseitige Wirkung des Zements und des Wassers eintritt, und nur der weitere Verlauf dieses chemischen Prozesses, die Bindung der trägen Bestandteile vergrößernd, gibt dem Beton nach und nach die Eigenschaften eines festen Körpers. Diese schaffende Erhärtungsperiode wird nach Jahren gemessen. So z. B. zeigten nach Prüfungsergebnissen von Dyckerhoff,[3]) siehe Tabelle 1, an der Luft erhärtete Zementmörtelproben zum Schluß des 5. Jahres eine Zunahme in der Zugfestigkeit:

1. Mörtel 1 : 1 . . . $\frac{69{,}1 - 63{,}3}{63{,}3} \times 100 = 9{,}2$ vH.

2. „ 1 : 2 . . . $\frac{64{,}3 - 59{,}3}{59{,}3} \times 100 = 8{,}4$ „

3. „ 1 : 3 . . . $\frac{57{,}9 - 56{,}3}{56{,}3} \times 100 = 2{,}8$ „

---

[1]) Bericht über die III. Hauptversammlung des Deutschen Betonvereins, 1900, S. 36.

[2]) Desgl. 1901, S. 71.

[3]) Protokoll der Verhandl. des Vereins deutscher Portland-Zement-Fabrikanten 1893, S. 90.

Tabelle 1.

Bestandteile des Mörtels	Zugfestigkeit kg/qcm								
	1 Woche	4 Wochen	13 Wochen	26 Wochen	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
1 Zement, 1 Sand	25,5	27,4	41,4	41,9	45,5	63,3	61,5	63,3	69,1
1 „ 2 „	22,2	26,5	38,3	39,1	42,4	55,2	58,1	59,3	64,3
1 „ 3 „	18,6	23,4	34,5	35,4	36,6	50,9	46,2	56,3	57,9

Anderseits ist der Beton mit dem ersten Moment seines Bestehens dem Einfluß vieler äußeren und inneren Kräfte, welche den normalen Verlauf des Erhärtungsprozesses verändern, unterworfen. In dieser Beziehung haben den größten Einfluß: Temperatur- und Feuchtigkeitswechsel der umgebenden Atmosphäre, das Beisein nachteiliger Bestandteile, z. B. freier Kalk, Gips und Magnesiaverbindungen, endlich die Erhärtung begleitende Nebenerscheinungen, z. B. Wärmeausscheidung, Volumenänderung des Zements usw. Natürlich kann man bei der Mannigfaltigkeit in der Vereinigung jener Bedingungen, welche in der Praxis bei der Anfertigung und der Verwendung des Betons eintreten, letzteren nicht als gänzlich bestimmtes Baumaterial, wie z. B. das Eisen, anerkennen. Darin besteht der wesentliche Unterschied des Betons von anderen Baumaterialien, angefangen mit den Natursteinen, welche als träge Körper in Arbeit kommen und welche somit in jedem einzelnen Falle über gänzlich bestimmte Eigenschaften verfügen. Bei der Verwendung von künstlichen Steinen, z. B. Ziegelsteinen zeigt sich gleichfalls die totale Unabhängigkeit der beiden Hauptfragen: 1. die Herstellung und 2. die Anwendung als Baumaterial. Deswegen wird der Ziegelstein als vollständig bestimmtes Material in Arbeit genommen, dessen Eigenschaften vorher bestimmt und dann erst, mit dem ersten Moment der Verwendung angefangen, vollständig ausgenutzt werden können.

Die Aufgabe des Baumeisters wird aber komplizierter bei der Aufführung von Betonbauten: der Beton kommt in den Bau in rohem Zustande, und nur mit dem Moment des Auftragens tritt ein ziemlich andauernder Erhärtungsprozeß, die Betonbildung, ein; von diesem Augenblick an ist der Beton dem Einfluß der umgebenden Atmosphäre ausgesetzt und später, nach vergleichsweise kurzer Zeit, auch der Belastung. Also ergibt sich in gegebenem Falle eine Vereinigung der Maetrialbildung mit der Periode seiner Exploitation.

Unter solchen Umständen ist es natürlich möglich, Bauten, welche ihrer Bestimmung vollständig entsprechen, nur zu erhalten bei einer Aufklärung aller den Erhärtungsprozeß begleitenden Nebenerscheinungen und bei einer Möglichkeit der Beseitigung jener Umstände, welche das ordnungsmäßige Fortschreiten des Erhärtungsprozesses ändern oder innere Spannungen

hervorrufen könnten, welch letztere die mechanischen Eigenschaften verringern und im äußersten Falle die Monolität des Baues brechen können.

Der Zweck dieses Artikels ist, die Haupteigenschaften des Betons, welche den größten Einfluß auf seine Monolität haben, zu erläutern und zugleich einige Sonderheiten in der Anwendung des Betons zur Aufführung massiver Bauten oberhalb der Wasserfläche anzuführen.

I. Allgemeine, die Monolität der Betonbauten bestimmende Bedingungen.

Wenn man die Monolität als eine Eigenschaft der festen Körper, in großen, dem Einfluß äußerer Bedingungen ausgesetzten Massen ihr Ganzes und ihre Unzertrennlichkeit zu bewahren, betrachtet, so besteht die Frage über die Monolität der Betonbauten darin, daß man die gegenseitige Wirkung der äußeren Kräfte und der Eigenschaften des Betons als Baumaterial erläutert.

Als äußere Kräfte erscheinen die Belastung und der Einfluß der umgebenden Atmosphäre, hauptsächlich Temperatur- und Feuchtigkeitswechsel. In dieser Hinsicht ist der Beton, welcher sozusagen eine künstliche Wiederherstellung zerstörter Steinmaterialien bildet, vom ersten Augenblick seines Bestehens dem Einfluß gleicher atmosphärischer Kräfte ausgesetzt, die eine allmähliche Zerstörung der ursprünglichen monolithen Steinarten hervorrufen, deren Resultat die festen, trockenen Materialien (Sand, Kies) sind, welche das Gerippe, den Grund des Betons bilden. Deswegen stellt sich natürlich die Frage: wie muß sich der Einfluß derselben Kräfte auf die Monolität der Betonbauten gestalten, in welchen das Gebinde der trockenen Steinmaterialien durch die Bindungskraft des Zements bestimmt wird; letztere ersetzt das natürliche Gebinde, welches die Monolität der zerstörten, ursprünglichen Steinarten feststellte.

Sämtliche die Hauptmasse, das Gerippe des Betons bildenden Steinmaterialien erscheinen ganz untätig, träge, und, alle Eigenschaften der zerstörten, ursprünglichen Steinart bewahrend, bleibt dadurch in denselben die Beständigkeit einer Gegenwirkung auf die atmosphärischen Kräfte bestehen.

Im Beton ist der einzige wirkende Bestandteil der Zement, weswegen, im allgemeinen gesagt, auch die Eigenschaften des Betons hauptsächlich bestimmt werden:

1. nach den Eigenschaften und der Beschaffenheit des Zements,
2. nach dem Quantitätsverhältnis des Zements zu den anderen trägen Bestandteilen,

3. nach den Herstellungs- und Anwendungsarten des Zements,
4. nach dem Einfluß der äußeren Atmosphäre auf den Verlauf des chemischen Erhärtungsprozesses des Zements.

In der nachfolgenden Auslegung werden alle aufgezählten Hauptbedingungen nur in dem Maße betrachtet werden, inwiefern dieselben auf die Monolität des Betons einen Einfluß haben; alle Fragen, welche einen allgemeinen Charakter tragen und welche sich auf die Aufklärung der übrigen Eigenschaften des Betons beziehen, werden beiseite gelassen.

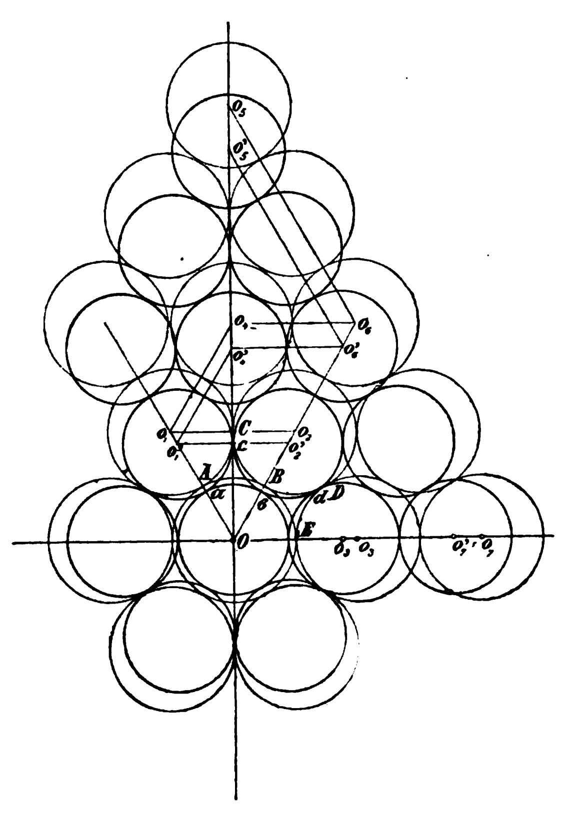


Abb. 1.

In gegebenem Falle erhalten einen besonderen Wert die mechanischen Eigenschaften des Betons, welche seine Widerstandsfähigkeit nicht nur gegen die äußeren Kräfte bestimmen, sondern auch gegen solche inneren Anstrengungen, die durch den Einfluß der umgebenden Atmosphäre und durch die Erhärtung des Betons begleitende Nebenerscheinungen hervorgerufen werden. Das Eintreten innerer, von der Wirkung der äußeren Kräfte unabhängiger Anstrengungen im Betonmassiv wird durch eine jegliche Erscheinung, welche von der Volumenänderung der Betonbestandteile begleitet wird, hervorgerufen.

Zur Erklärung dieser Frage denken wir uns, siehe Abb. 1, einen aus gleichem kugelförmigen Steinschlag bestehenden Teil eines Betonmassivs und nehmen an, daß die ganze Masse des bindenden Zementmörtels an den Berührungspunkten der Kugeln $A, B, C, D \ldots$ konzentriert ist.

Falls wir sodann zulassen, daß das Volumen sämtlicher Kugeln sich aus irgend einem Grunde verändert, z. B. verringert, so müssen sich bei der Bedingung einer Unzertrennbarkeit des Massivs die Zentren der Kugeln so verschieben, daß sie sich in derselben verhältnismäßigen Reihenfolge um das Zentrum O einer mittleren Kugel gruppieren werden; in entsprechender Weise verschieben sich auch die Berührungspunkte $A, B, C, D \ldots$ nach $a, b, c, d \ldots$ Bei gleicher Volumenänderung drücken sich die Ver-

schiebungen der Kugelzentren, welche an den durch das Zentrum O der mittleren Kugel laufenden Horizontal- und Vertikalachsen liegen, folgendermaßen aus:

Für die Kugel O_3 ist die relative Verschiebung des Zentrums an der Horizontalachse:

$$O_3 O_3' = O O_3 - O O_3' = 2R - 2r = 2(R - r),$$

worin R und r der ursprüngliche und der veränderte Radius sind; ebenso für die nächste Kugel:

$$O_7 O_7' = O O_7 - O O_7' = 4R - 4r = 4(R - r) \text{ usw.}$$

Für die Kugeln, deren Zentren an der Vertikalachse liegen, ist die relative Verschiebung:

$$O_4 O_4' = O O_4 - O O_4' = 2 \times OC - 2 \times Oc.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OCO_1 und OcO_1' folgt:

$$OC = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3} \text{ und}$$

$$Oc = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3};$$

also:

$$O O_4 - O O_4' = 2 \times \sqrt{3} \times (R - r).$$

Für die nächstfolgende Kugel O_5 ergibt sich gleichfalls:

$$O O_5 - O O_5' = 4 \times \sqrt{3} \times (R - r) \text{ usw.}$$

Bei gleicher Volumenänderung sämtlicher Kugeln werden die relativen Verschiebungen ihrer Berührungspunkte, welche durch die Längendifferenz der Bogen zwischen den früheren und neuen Berührungspunkten ausgedrückt sind, einander gleich sein, d. h. $AC - ac = CB - cb = AB - ab$ usw. Bezeichnen wir den früheren Radius der Kugeln durch den Buchstaben R, den neuen aber durch r, wobei $R - r = a$, so wird die relative Verschiebung der Berührungspunkte A und B sein:

$$AB - ab = \frac{2\pi \times R}{6} - \frac{2\pi \times r}{6} = \frac{\pi}{3}(R - r) = \frac{\pi . a}{3}.$$

Die Bindungskraft des Zementmörtels, bedingungsweise an den Berührungspunkten der Kugeln konzentriert, wirkt gegen eine jegliche Verschiebung derselben; deswegen werden mögliche Verschiebungen der Berührungspunkte, ohne Trennen des Gebindes der Kugeln, als elastische Eigenschaften des Zementmörtels und des Kugelmaterials erklärt.

In Wirklichkeit werden sich die Form, die Größen und die Stellung der steinförmigen Bestandteile des Betons von betrachtetem Falle unterscheiden.

In Abhängigkeit von der Auswahl, dem quantitativen Verhältnisse der Bestandteile und von der Dichtung des Betons durch Stampfen werden sich außerdem seine Eigenschaften und der Einflußgrad eines jeden Bestandteiles auf die Volumenänderung des ganzen Massivs verändern.

In dieser Hinsicht steht dem betrachteten theoretischen Falle am nächsten der dünne Beton, bestehend aus Zement und Kies von gleichartiger Korngröße. In der verdichteten Masse werden die Körner des Kieses, welcher das Gerippe, den Grund des Betons bildet, dicht aneinandergepreßt sein; deswegen wird der Zementmörtel von den Berührungspunkten der Steinstückchen *a*, *a*, *a* . . . (Abb. 2) weggedrückt werden und sich in einer dünnen Schicht an der Oberfläche der Körner verteilen; um die Berührungspunkte der Steinstückchen werden sich dank der Klebkraft verhältnismäßig größere Ansammlungen des Zementmörtels bilden. Deswegen wird die Widerstandskraft eines solchen Betons gegen die mechanischen Anstrengungen bestimmt: 1. durch die Bindekraft des Mörtels, 2. durch die Größen der Flächen, welche an den bei den Berührungspunkten konzentrierten Mörtel grenzen, und 3. durch den Zustand dieser Flächen.

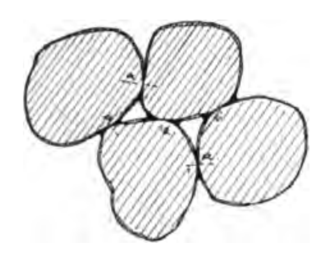


Abb. 2.

Die Steinstückchen, welche sich unmittelbar aufeinanderstemmen, werden natürlich einen stärkeren Einfluß auf die Volumenänderung des Massivs haben; die Volumenänderung des Zements wird aber hauptsächlich für Rechnung der Hohlräume zwischen den Steinstückchen geschehen, und bei vergleichsweise kleiner relativer Quantität des bei den Berührungspunkten der Steinstückchen konzentrierten Zements kann deswegen die Volumenänderung des Zements einen unbedeutenden Einfluß auf die Volumenänderung des ganzen Massivs haben. Ebenso wird auch im mageren (porösen) Zementmörtel der verdichtete Sand, welcher das Gerippe bildet, einen vorherrschenden Einfluß auf die Volumenänderung des Massivs im Vergleich zum Zement, welcher sich wie im vorigen Falle verteilen wird, haben.

In fetten und dichten Mörteln, wo die Zwischenräume der Sandkörner mit Zementbrei ausgefüllt sind, muß der Einfluß der Volumenänderung des Zements auf die Volumenänderung des ganzen Massivs größer sein als in mageren Mörteln, denn 1. bei gleicher Volumenporosität des Sandes und bei gleichen Verdichtungsarten des Mörtels ist in einem fetten Mörtel die relative Zementquantität größer als in einem mageren Mörtel, und 2. sind in einem dichten Mörtel weniger Hohlräume, welche die Volumenänderungen der Bestandteile verschlingen, vorhanden.

Im allgemeinen gesagt, kann der Unterschied zwischen mageren und fetten Mörteln nicht allein durch die relative Quantität (nach Gewicht) von Zement und Sand bestimmt werden; in Abhängigkeit von der Verdichtungsart des Mörtels kann sich die relative Quantität von Zement, welche zum Ausfüllen aller Zwischenräume im Sande nötig ist, in großen Grenzen verändern.

Die Verdichtung des Mörtels aber kann auf folgende Arten erfolgen

1. durch Feststampfen, 2. durch Vergrößerung der Sandkörner und 3. durch Anwendung einer Sandmischung.

In beifolgender Tabelle 2[1]) sind die Verhältnisse der Zementmörtel geringster Porosität bei erwähnten Verdichtungsarten angeführt.

Tabelle 2.

Verdichtungsart des Mörtels	Sand, durchgesiebt durch ein Sieb von Maschen in 1 qcm	Stampfarbeit kg/m auf 343 ccm des Mörtels	Mörtelmischung nach Gewicht
Stampfen	(320—900)	30	1 : 1,5
	(320—900)	150	1 : 2,5
	(4—16)	30	1 : 2,5
	(4—16)	150	1 : 3,5
Vergrößerung der Sandkörner	(320—900)	30	1 : 1,5
	(4—16)	30	1 : 2,5
	(320—900)	150	1 : 2,5
	(4—16)	150	1 : 3,5
Anwendung von Sandmischungen	(320—900)	30	1 : 1,5
	(320—900) (4—16)	30	1 : 3,5
	(4—16) (60—120)	150	1 : 5

Die letzte Kolonne der Tabelle zeigt, daß 1. in Abhängigkeit von der Verdichtungsart als Grenzen zwischen fetten und mageren Mörteln die Proportionen von 1 : 1,5 bis 1 : 5 und 2. die vorteilhafteste Verdichtungsart die Anwendung von Sandmischungen ist.

Jedenfalls muß in einem fetten, ganz dichten Mörtel die geringste Volumenänderung des Zements im Massiv bestimmt das Erscheinen von inneren Kräften hervorrufen, und in dieser Hinsicht gleicht sich der Einfluß des Zements mit dem des Sandes aus.

In Betons, welche in der Praxis verwendet werden, besteht das Gerippe aus steinartigen Körpern (Kies und Steinschlag), in welchen die Zwischenräume der Körper in gewissem Grade mit Zementmörtel ausgefüllt werden. Deswegen bezieht sich alles, was über den Einfluß der Volumenänderung der Bestandteile auf die Volumenänderung der Mörtel gesagt wurde, gleichfalls auf die Betons. Nur in gegebenem Falle ist die relative Zementquantität in der Volumeneinheit der fetten und dichten Betons, dank der

[1]) J. Maljuga, „Die Bestandteile und die Herstellungsart des Zementmörtels", Ingenieur-Journal 1895, Seite 650.

großen Verschiedenheit in den Dimensionen und der Form der trägen Bestandteile, geringer als in Mörteln gleicher Eigenschaften, was eine Verringerung des verhältnismäßigen Einflusses des Zements auf die Volumenänderung des Betonmassivs zur Folge hat. So z. B. macht der Zement in den meistens in der Praxis verwendeten Betons von $^1/_6$ bis $^1/_2$ Gewichtsteil der trägen Bestandteile aus, in Mörtel aber $^1/_1$ bis $^1/_3$.

Ueberhaupt gesagt, wird das gegenseitige Verhältnis der Bestandteile in jedem einzelnen Falle nach den erforderlichen Eigenschaften des Betons bestimmt.

Bei der Herstellung von fetten und dichten (undurchdringlichen) Betons, wobei einige Unvollkommenheit beim Mischen in Betracht kommt, nimmt man den Zementmörtel um 10 bis 15 vH. mehr, als der Inhalt der Hohlräume im Steinschlag ausmacht; ebenso wird auch der Ueberfluß an Zementbrei bei der Herstellung des Zementmörtels für die Sicherstellung eines nötigen Ausfüllens aller Hohlräume im Sande in Betracht genommen.

Deswegen drängt in der verdichteten Betonmasse einiger Ueberfluß an Sand und Zement sozusagen die Kies- und Steinschlagkörner auseinander und beseitigt die Möglichkeit einer unmittelbaren dichten Berührung zwischen den größeren steinartigen Körpern, welche das Gerippe des Betons bilden. Unter solchen Umständen kann man die Volumenänderung des ganzen noch nicht erhärteten Massivs als gleich mit der Summe der Volumenänderungen aller seiner Bestandteile annehmen.

Die Grenze des Ueberganges von fetten (dichten) Betons zu mageren (porösen) bildet der ideal dichte Beton, in welchem die Quantität des Mörtels dem Inhalt der Hohlräume im Steinschlag genau entspricht und die verwendete Zementquantität im Mörtel ohne Ueberfluß alle Hohlräume im Sande ausfüllt.

In diesem Falle wird im ersten Moment der Abbindung des Zements, d. h. bei der Beweglichkeitsbedingung der Betonbestandteile die Volumenvergrößerung des Massivs gleichfalls gleich sein der Summe der Volumenvergrößerungen aller Betonbestandteile; aber eine Volumenverringerung des Zements oder des Sandes wird das Eintreten einiger Porosität hervorrufen und ist gleich stark einer entsprechenden Magerung des Betons.

Bei der Herstellung von mageren (porösen Betons) kann das Sortieren der Bestandteile auf zweierlei Art erfolgen: 1. die Quantität des Mörtels wird ebenso wie für fetten Beton nach dem Inhalt der Hohlräume im Steinschlag und Kies bestimmt, aber die Zementquantität im Mörtel ist geringer als der Inhalt der Hohlräume im Sande, d. h. es werden magere Mischungen angewendet, und 2. die Quantität des Mörtels ist geringer als der Inhalt der Hohlräume im Steinschlag und Kies, aber der Mörtel selbst wird fett hergestellt.

Im ersteren Falle erhält man den Beton schwach porös, im zweiten stark porös, wobei der stark poröse Beton sich mehr dem oben betrachteten

theoretischen Beton (s. Abb. 1 und 2), welcher aus Kieskörnern gleicher Form und Größe besteht, annähert.

Bei unendlicher Verschiedenheit in der Form und Größe der Körner der festen Bestandteile, ihrer gegenseitigen Lage und der Verteilung des Zements im Betonmassiv ist es in Wirklichkeit nicht möglich, den Einfluß der Volumenänderung eines jeden Bestandteiles auf die Volumenänderung des ganzen Massivs theoretisch zu bestimmen. Das Wesentliche in der Frage bleibt aber in allen Fällen gleich, und die verhältnismäßige Bedeutung der Volumenänderung der Bestandteile kann in allgemeinen Zügen dargestellt werden, wenn man den Beton am Anfangsmoment der Erhärtung, d. h. in rohem Zustande und eine totale Beweglichkeit der einzelnen Teilchen zulassend, betrachtet. Unter solchen Umständen werden die steinähnlichen Körper (Kies und Steinschlag), welche die Hauptmasse des Betons bilden und die Rolle seines Gerippes spielen, bei mageren wie auch bei fetten Betons den vorherrschenden Einfluß auf die Volumenänderung des Massivs haben; der Einfluß der Volumenänderung des Sandes und des Zements muß in beiden Fällen eine verhältnismäßig kleinere Bedeutung haben, wobei bei mageren Betons der Einfluß der Volumenänderung des Zements auf die Volumenänderung des Massivs am geringsten sein muß.

In trockenem Zustande, d. h. bei der Bedingung einer dichten Berührung der Teilchen und ihrer Beweglichkeit, wird die Volumenänderung der steinähnlichen Körper immer eine Volumenänderung der ganzen Masse zur Folge haben und wird so lange von einiger Verschiebung der Teilchen begleitet werden, bis eine dichte Berührung nach der Volumenänderung eintritt. Ebenso wird eine Volumenvergrößerung des Massivs und eine mit dieser Erscheinung verbundene Verschiebung der Teilchen bei einer Volumenvergrößerung der Sand- und Zementteilchen in dichten (fetten), nicht erhärteten Betons erhalten; in dünnen rohen Betons kann aber einige Volumenvergrößerung der Sand- und Zementteilchen von den Hohlräumen verschlungen werden, ohne eine merkliche Auseinanderschiebung der Steinschlag- und Kieskörner hervorzubringen und ohne eine sichtbare Volumenänderung des Massivs hervorzurufen. Die Volumenverringerung der Sand- und Zementteilchen hat unter gleichen Umständen einen noch minderen Einfluß auf die Volumenänderung der ganzen Masse, vergrößert aber nur die Porosität des Mörtels. Aber in erhärtetem Beton widersteht die Bindungskraft des Zementmörtels einer jeden Verschiebung der Teilchen, infolgedessen im Bindemittel und in den mit ihm verbundenen trägen Teilen innere Kräfte entstehen; alle möglichen Verschiebungen der Teilchen ohne Sprengen ihres Gebindes werden erklärt als elastische Eigenschaften des Bindemittels und der trägen Teilchen.

Deswegen stehen bei der Frage über die Monolität des Betons an erster Stelle dessen mechanische Eigenschaften, welche die Widerstands-

fähigkeit gegen die Brechung der Verbindung zwischen den Bestandteilen bestimmen.

Also zur Erklärung der Frage über die Monolität der Betonbauten ist es einerseits erforderlich, zu betrachten: 1. den Einfluß der Feuchtigkeit und der Temperatur, der äußerlichen Hauptkräfte, auf die Volumenänderung der Bestandteile des Betons, 2. den Einfluß der inneren Erscheinungen, welche den Erhärtungsprozeß des Zements begleiten, auf die Volumenbeständigkeit des Betons.

Anderseits ist es notwendig, aufzuklären: 1. die mechanischen Eigenschaften des Betons als Baumaterial und 2. den Einfluß der angewendeten Aufführungsarten von Betonbauten und der Konstruktionen auf ihre Monolität. Eine Vergleichung aller dieser Bedingungen gibt die Möglichkeit, folgende Fragen zu beantworten:

1. die Bestimmung der größten Dimensionen, welche eine Monolität der Betonbauten erzielen lassen,
2. die Aufklärung der Arten der Arbeitsverrichtung, welche am meisten dem Erzielen einer Monolität entsprechen, und
3. Konstruktionen auszuarbeiten, welche die Bewahrung einer Monolität der Betonbauten auf der Oberfläche des Wassers sichern.

II. Einfluß der Feuchtigkeit auf die Volumenänderung der Bestandteile des Betons.

Die trägen Bestandteile des Betons zeigen in feuchter Mitte eine Volumenvergrößerung und bei Trockenheit eine Volumenverringerung. Die von Schumann[1]) angestellten Versuche mit Prismen von 10 cm Länge und 5 qcm Querdurchschnitt lieferten nach 2wöchentlicher Lagerung im Wasser und an der Luft folgende Längenänderungszahlen (siehe Tabelle 3).

Aus den angeführten Zahlen läßt sich schließen, daß den größten Schwankungen in der Volumenänderung Sandsteine ausgesetzt sind, wobei Schumann zum Beschluß kam, daß eine Volumenänderung bei Sandsteinen hauptsächlich von der Natur des zementierenden Stoffes, aber nicht von der Beschaffenheit ihrer Körner abhängt.

Wenn man die angeführten Durchschnittszahlen der linearen Aenderungen mit dem Ausdehnungskoeffizienten des Eisens, welcher 0,0000123 um 1° C. ist, vergleicht, so sieht man, daß beim Schwinden der Proben die durchschnittlichen relativen Längenänderungen bei Ziegel- und Kalksteinen fast 10mal größer sind als der Ausdehnungskoeffizient des Eisens,

[1]) Der Portlandzement und seine Anwendungen im Bauwesen, Büsing u. Schumann, S. 79.

Tabelle 3.

Materialien	Relative Ausdehnung im Wasser	Relative Schwindung an der Luft
1. Ziegelstein.		
Roter Ziegelstein, leicht gebrannt	0,00016	0,00015
Weißer „ , scharf „	0,00010	0,00009
„ „ , „ „	0,00019	0,00010
Oldenburger Klinker	0,00006	0,00008
Durchschnitt	0,00013	0,00011
2. Sandstein.		
Roter Pfälzer Sandstein, feinkörnig	0,00006	0,00018
„ „ „ , grobkörnig	0,00016	0,00023
„ „ „ , feinkörnig	0,00046	0,00055
Grauer Miltenberger Sandstein, feinkörnig . .	0,00050	0,00050
„ „ „ , sehr feinkörnig	0,00206	0,00178
Durchschnitt	0,00065	0,00065
3. Kalkstein.		
Lothringer weißer, poröser	0,00004	0,00008
Liaskalk „ , „	0,00007	0,00008
Litorinellenkalk von Biebrich	0,00011	0,00009
Dichter, tonhaltiger	0,00026	0,00026
Durchschnitt	0,00012	0,00013
4. Basalte.		
Basalt von Kirn	0,00041	0,00050
„ „ Obenbrechen bei Limburg . . .	0,00025	0,00027
„ „ Steinheim bei Hanau	0,00048	0,00050
„ „ Neurod bei Wiesbaden	0,00023	0,00027
Durchschnitt	0,00034	0,00038
5. Granit	0,00006	0,00015

bei Basalt 30mal größer, bei Sandstein 54mal größer und bei Granit 5mal größer als der Ausdehnungskoeffizient des Eisens.

Die Zahlen der Tabelle 3 drücken verhältnismäßige Längenveränderungen nach 2wöchentlicher Lagerung im Wasser und an der Luft aus. In Wirklichkeit können die trägen Bestandteile des Betons im Laufe eines weit größeren Zeitraums der Wirkung des sich im Beton befindlichen oder von außen eindringenden freien Wassers ausgesetzt sein; deswegen können

auch die entsprechenden Volumenänderungen die in der Tabelle 3 angeführten Zahlen übersteigen.

Jedenfalls hat die Form- und Größenverschiedenheit des Steinschlags und der Kies- und Sandkörner eine Verschiedenheit in der Dauer und dem Grade ihrer Sättigung zur Folge, was ihrerseits eine ungleichmäßige Volumenänderung der steinernen, trägen Bestandteile des Betons, sogar bei gleichen äußeren Bedingungen hervorrufen muß.

Der Einfluß der Feuchtigkeit auf die Volumenänderung der Zementmörtel stellt eine kompliziertere Erscheinung dar, als die betrachteten Fälle mit trägen Steinmaterialien. Die unmittelbaren Ausmessungen der Längenveränderungen der im Wasser oder an der Luft sich erhärtenden Zementmörtelproben stellen vor eine algebraische Summe jener Aenderungen, welche hervorgerufen werden: 1. durch den Erhärtungsprozeß des Zements und 2. durch das allgemeine physische Gesetz, welches nach Maßgabe des Erhärtens des Mörtels in Kraft tritt.

Die Hauptumstände, welche auf die Volumenänderung des Zements bei seiner Erhärtung Einfluß haben, sind folgende: 1. Beisein von freiem Kalk, Gips und Magnesia, 2. Grad des Brandes, 3. Feinheit der Mahlung und 4. Lagerungsdauer des Zements. Zahlreiche Versuche von Dyckerhoff, Schumann, Meier, Grant, Durand-Clay, Considère ergaben, daß den angenommenen Normen entsprechende Zementmörtel bei Erhärtung im Wasser sich ausdehnen; aber bei Erhärtung an der Luft wird vorher eine Ausdehnung beobachtet, und nachher tritt das Schwinden ein.

Die allgemeinen Resultate der von Grant und Dyckerhoff angestellten Proben über Volumenänderungen von Zement und Mörtel sind folgende:[1])

1. Alle Zemente zeigen bei Erhärtung im Wasser mehr oder weniger eine Volumenvergrößerung;
2. die Volumenvergrößerung der guten Zemente ist so gering, daß sie keine besondere praktische Bedeutung hat;
3. die Volumenänderung nimmt ab, nach Maßgabe der Vergrößerung des Sandgehalts im Mörtel;
4. bei Zementen mit Kalküberfluß und bei schwach gebrannten Zementen ist die Volumenvergrößerung am höchsten;
5. bei frischen Zementen ist die Volumenvergrößerung am höchsten und bei abgelagerten am geringsten, und
6. die Volumenvergrößerung nimmt zu nach Maßgabe eines Zusatzes von Gips.

Schumann stellte im Laufe eines Jahres Proben mit Prismen von 10 cm Länge mit einem Querdurchschnitt von 5 qcm an; die Probekörper waren aus 10 verschiedenen Zementen hergestellt und lagerten im Wasser. Relative

---

[1]) Sutcliffe, Concrete, its nature and uses, S. 83.

Längenvermehrungen der Probekörper aus reinem Zement und Mörtel, 1 Teil Zement und 3 Teile Sand, sind in den Tabellen 4 und 5 angeführt.[1])

Tabelle 4.

Relative Verlängerungen für Mörtel aus reinem Zement.

Nr. der Proben	Binde-zeit in Minuten	Erhärtungsfrist im Wasser. Wochen.					
		1.	4.	13.	26.	39.	52.
1.	30	0,00047	0,00067	0,00081	0,00094	0,00113	0,00123
2.	660	0,00014	0,00029	0,00037	0,00055	0,00065	0,00070
3.	35	0,00047	0,00092	0,00113	0,00148	0,00174	0,00187
4.	540	0,00122	0,00154	0,00171	0,00191	0,00199	0,00202
5.	35	0,00044	0,00085	0,00110	0,00133	0,00154	0,00165
6.	600	0,00014	0,00026	0,00030	0,00041	0,00050	0,00059
7.	20	0,00069	0,00113	0,00152	0,00180	0,00198	0,00213
8.	210	0,00032	0,00062	0,00088	0,00111	0,00122	0,00127
9.	120	0,00043	0,00088	0,00119	0,00140	0,00148	0,00151
10.	420	0,00054	0,00104	0,00136	0,00156	0,00164	0,00167
durchschnittlich		0,00048	0,00082	0,00104	0,00125	0,00139	0,00146

Tabelle 5.

Relative Verlängerungen für Mörtel 1 : 3.

Nr. der Proben	Binde-zeit in Minuten	Erhärtungsfrist im Wasser. Wochen.					
		1.	4.	13.	26.	39.	52.
1.	30	0,00013	0,00017	0,00018	0,00023	0,00026	0,00032
2.	660	0,00007	0,00009	0,00009	0,00009	0,00010	0,00010
3.	35	0,00017	0,00020	0,00020	0,00024	0,00027	0,00032
4.	540	0,00039	0,00044	0,00048	0,00051	0,00053	0,00057
5.	35	0,00009	0,00012	0,00012	0,00013	0,00014	0,00022
6.	600	0,00004	0,00008	0,00008	0,00008	0,00008	0,00012
7.	20	0,00016	0,00026	0,00032	0,00037	0,00039	0,00043
8.	210	0,00012	0,00019	0,00023	0,00031	0,00034	0,00035
9.	120	0,00018	0,00030	0,00040	0,00045	0,00045	0,00046
10.	420	0,00017	0,00029	0,00032	0,00036	0,00039	0,00039
durchschnittlich		0,00015	0,00021	0,00024	0,00028	0,00030	0,00033

[1]) Büsing u. Schumann, der Portlandzement und seine Anwendungen im Bauwesen, S. 78.

Nach den Durchschnittsergebnissen der Tabellen 4 und 5 sind für 10 Zemente beigelegte Diagramme konstruiert, Abb. 3, welche die relativen Längenvermehrungen der Proben aus reinem Zement und Mörtel 1 : 3, bei Lagerung im Wasser in der Zeit eines Jahres, bildlich darstellen.

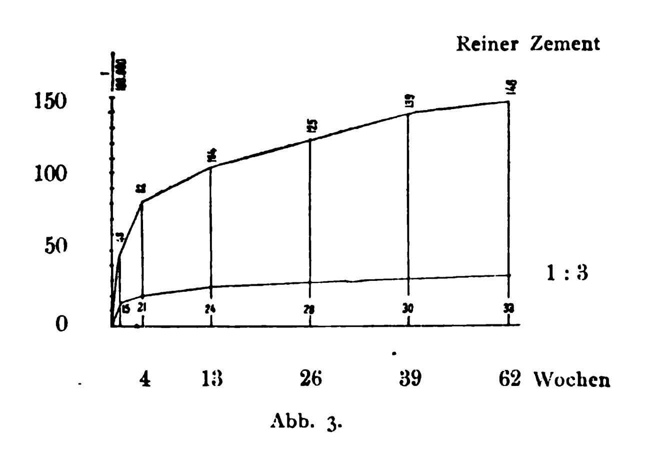


Abb. 3.

Aus den Zahlen der Tabellen 4 und 5 ersieht sich, daß: 1. bei Erhärtung im Wasser die Durchschnittsgrößen der relativen Verlängerungen in Mörtel aus 1 Teil Zement und 3 Teilen Sand fast viermal geringer sind als die relativen Verlängerungen in Mörtel ohne Sandzusatz, 2. die größten Ausdehnungen in den Anfangsmomenten des Abbindens und der Erhärtung stattfinden und 3. die langsam abbindenden Zemente Nr. 2 und 6 die geringsten Volumenänderungen zeigten.

Bei Vergleich der Zahlen der Tabellen 5 und 3 findet man:

1. daß bei Lagerung im Wasser die relativen Längenvermehrungen der Ziegel- und Kalksteine am Schluß der 2. Woche sich der relativen Längenvermehrung der Zementmörtel 1 : 3, welche eine Woche im Wasser lagen, nähern; zum Schluß der 4. Woche ist die Verlängerung derselben Mörtel fast zweimal größer als die angeführten Verlängerungen der Ziegelsteine und Kalksteine;
2. die Verlängerung der Basalte nähert sich am Schluß einer 2 wöchentlichen Lagerung im Wasser der Verlängerung der Zementmörtel 1 : 3, welche unter gleichen Bedingungen im Laufe eines Jahres aufbewahrt wurden, und
3. die Verlängerung des Granits ist zum Schluß der 2. Woche fast zweimal geringer als die Verlängerung des Mörtels 1 : 3, 1 Woche im Wasser gelagert, und fast fünfmal geringer als die Längenvermehrung derselben Mörtel zum Schluß einer einjährigen Erhärtung im Wasser.

Von einer staatlichen Kommission der Vereinigten Staaten Nordamerikas[1]) an amerikanischen Zementen vorgenommene Versuche ergaben, daß an Probekörpern aus reinem Zement bei Erhärtung im Wasser zum Schluß einer Zeit von 3 Monaten eine relative Verlängerung von 0,0004 bis

[1]) Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1887.

0,0025 beobachtet wurde, aber an Probekörpern aus Mörtel 1 : 3 — bis 0,008. In gleichem Zeitraum zeigten gleiche Probekörper bei Erhärtung an der Luft eine relative Schwindung für reinen Zement von 0,0014 bis 0,0032 und für Mörtel 1 : 3 von 0,0008 bis 0,0017.

Versuche zur Bestimmung der Ausdehnung der Zementmörtel bei ihrer Erhärtung im Wasser wurden von Durand-Clay[1]) an Probekörpern aus reinem Zement von 80 cm Länge und 1,2 × 1,2 qcm Querdurchschnitt vorgenommen.

In Abb. 4 u. 5 sind die Resultate dieser Prüfungen bildlich dargestellt, wobei die gebrochenen Linien OA sich auf normal gebrannte Zemente be-

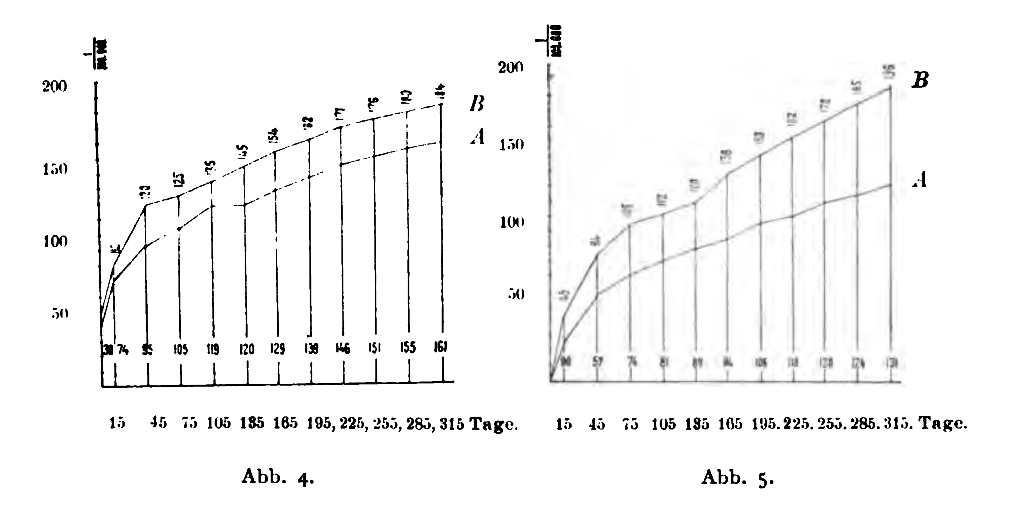


Abb. 4. Abb. 5.

ziehen, und die gebrochenen Linien OB aber auf Zemente desselben Gehalts, aber bei weit niedrigerer Temperatur gebrannt; deswegen ist es, als ob die Differenz der Ordinate der gebrochenen Linien OB und OA jene Ergänzungsausdehnung, welche in Zementen infolge ihres Brandes bei nicht genügend hoher Temperatur erscheint, deutlich ausdrückt.

Die das Diagramm Abb. 4 betreffenden Proben wurden vor ihrer Versenkung ins Wasser einige Tage an gewöhnlicher Luft gehalten; aber die Proben zum Diagramm Abb. 5 wurden bis zu ihrer Versenkung ins Wasser unter feuchter Leinwand aufbewahrt. Der Einfluß dieser Umstände rief im zweiten Falle (gebrochene Linien OA) hervor: 1. eine geringere Volumenänderung der normal gebrannten Zemente, insbesondere bei Beginn der Erhärtung, und 2. eine weit fließendere Volumenvermehrung.

Im Jahre 1898 stellte Considère im Laufe von 63 Tagen Versuche an über Volumenänderungen von Prismen von 60 cm Länge und 6 × 2,5 qcm Durchschnitt, hergestellt aus reinem Zement und Mörtel von 600 kg Zement pro 1 cbm Sand; in jeder Gruppe von Probekörpern war längs der Achse

[1]) Annales des Ponts et Chaussées 1888, S. 810.

einer der Prismen eine Eisenstange (Kreisschnitt; Durchmesser 1,02 cm) eingestampft.

Genaue Messungen ergaben:

1. daß alle Probekörper bei Erhärtung im Wasser sich ausdehnten und an der Luft schwanden, und
2. Zunahmen der Volumenänderungen verringerten sich mit dem Laufe der Zeit.

Lineare Aenderungen, welche Considère[1]) fand, sind in der Tabelle 6 angeführt und in $^1/_{100}$-Teilen eines Millimeters pro 1 m Länge der Prismen ausgedrückt.

Tabelle 6.

Verlängerung bei Erhärtung im Wasser.

Nr. der Probe	Bestand der Proben	Tage														
		1	2	3	4	5	6	7	14	21	28	35	42	49	56	63
1.	Zement ohne Eisen	7	15	21	27	32	37	41	59	69	73	75	77	78	78	79
2.	Zement mit Eisen .	2	3	4	5	6	8	9	13	16	18	20	21	22	22	22
3.	600 kg Zement pro 1 cbm Sand ohne Eisen	3	10	13	15	17	18	19	20	22	24	26	27	27	27	28
4.	600 kg Zement pro 1 cbm Sand mit Eisen	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6
	Schwindung bei Erhärtung an der Luft.															
5.	Zement ohne Eisen	60	58	57	58	60	64	70	95	110	118	123	128	130	131	132
6.	Zement mit Eisen .	6	9	12	14	16	17	20	22	23	24	25	25	25	25	25
7.	600 kg Zement pro 1 cbm Sand ohne Eisen	22	21	20	21	22	26	29	38	42	44	45	47	47	49	50
8.	600 kg Zement pro 1 cbm Sand mit Eisen	4	6	7	8	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10

Zwecks einer anschaulicheren Vorstellung der Volumenänderungen der Mörtel bei Erhärtung ist im Diagramm Abb. 6 (S. 18) bildlich dargestellt die Abhängigkeit der Erhärtungsdauer im Wasser und an der Luft von den entsprechenden relativen Ausdehnungen und Schwinden bei Mörteln aus reinem Zement ($O\,A$ und $O\,A_1$) und Mörtel aus 600 kg Zement pro 1 cbm Sand (Kurven $O\,B$ und $O\,B_1$).

[1]) Comptes recdus des séances de l'Académie des Sciences 1899, S. 468.

In 12 Stunden abbindender Zement zeigte in der Zwischenzeit von 6 bis 10 Stunden nach dem Anmachen an der Luft die größte relative Schwindung 0,00060, wonach (Kurve $O\,A_1$) im Laufe von 3 Tagen eine unbedeutende Ausdehnung gesehen wurde; nachdem trat wieder eine Schwindung ein, welche aber in geringerem Grade als in der Anfangsperiode anwuchs. Der bezeichnete Uebergang vom Schwinden zur Ausdehnung traf zusammen mit jener Periode, während welcher in den Proben die größte Temperaturerhöhung bemerkt wurde. Deswegen kann man annehmen, daß eine gewisse Wärmequantität, welche sich bei der Abbindungund der Erhärtung abteilte, für die Verdunstung des Wassers im Mörtel verbraucht wurde, was das größte Schwinden der Probekörper nach sich zog; aber der Ueberfluß der sich abteilenden Wärme, welche im Probekörper blieb, offenbarte sich durch die Temperaturerhöhung des Probekörpers, was auch eine entsprechende Ausdehnung hervorrief. So lange, bis die innere Temperatur des Probekörpers sich mit der Temperatur der umgebenden Luft nicht ausglich, wurde durch die Ausdehnung, als eine chemische Reaktion erscheinend, die ununterbrochene Schwindung, in den meisten festen Körpern durch das physische Gesetz hervorgerufen, maskiert.

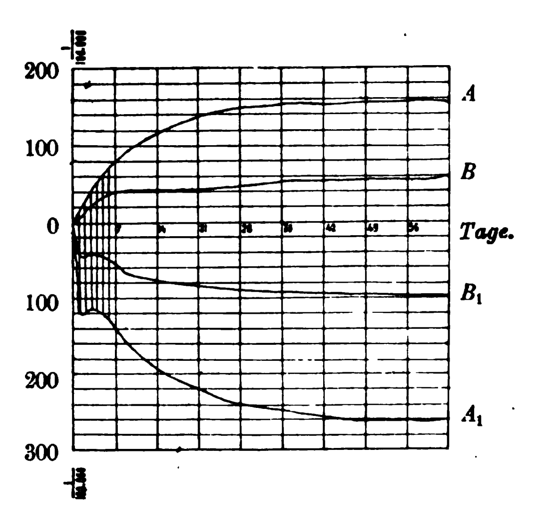


Abb. 6.

Auf Grundlage anhaltenderer Versuche, welche in „l'École des Ponts et Chaussées" und in Deutschland (Meier und Schumann) angestellt wurden, gibt Considère folgende möglichen Größen relativer Ausdehnungen und Schwindungen an:[1])

1. Bei Erhärtung im Wasser zeigen Probekörper aus reinem Zement relative Ausdehnungen: zum Schluß des ersten Monats 0,0005 (d. h. 0,5 mm pro 1 m), zum Schluß des ersten Jahres nicht weniger als 0,001 und zum Schluß des zweiten oder dritten Jahres von 0,0015 bis 0,002 (d. h. 1,5 bis 2,0 mm pro 1 m).
2. Bei gleichen Bedingungen zeigen Mörtel aus 600 kg Zement pro 1 cbm Sand (oder nach Gewicht 1 : 3) fast dreimal kleinere relative Ausdehnungen als Proben aus reinem Zement.
3. Beim Erhärten an der Luft zeigen Proben aus reinem Zement einige Stunden nach der Herstellung eine relative Schwindung

[1]) Considères Bericht auf dem Kongreß der Internationalen Gesellschaft für Materialien-Prüfungen in Budapest, 1901.

bis 0,0005 (d. h. 0,5 mm pro 1 m), zum Schluß einer 2wöchentlichen oder 1monatlichen Frist bis 0,001 und zum Schluß einer 2- oder 3jährigen Frist die größten relativen Schwindungen von 0,0015 bis 0,002 (d. h. 1,5 bis 2 mm pro 1 m).

4. In mageren Mörteln und Betons verändert sich aber die relative größte Schwindung von 0,0003 bis 0,0005, d. h. sie ist 4- bis 5mal geringer, als in Probekörpern aus reinem Zement.
5. In erhärteten Mörteln tritt keine Erhöhung des Einflusses der Feuchtigkeit auf ihre Volumenänderung bei Vergrößerung der Zementquantität ein.

Länger dauernde Beobachtungen von Volumenänderungen der Mörtel beim Erhärten wurden in Deutschland angestellt. Der Prüfung unterlagen Probekörper aus 30 verschiedenen Zementen,[1] von denen 26 den Normen vollständig entsprachen, aber 4 hatten von 3,5 bis 4,08 vH. Magnesiagehalt, d. h. mehr als in den deutschen Normen festgesetzt ist. Im allgemeinen waren die Volumenänderungen beim Erhärten im Wasser und an der Luft übereinstimmend mit den vorherigen Versuchsergebnissen; aber nur alle Proben, die aus 1 Teil Zement und 3 Teilen Sand bestanden, zeigten bei Erhärtung im Wasser nach Verlauf von 2 bis 3 Jahren einen Uebergang von der Ausdehnung zur Schwindung.

In dieser Hinsicht erscheinen die in Abb. 7 dargestellten Diagramme typisch; in denselben drücken die gebrochenen Linien I und IV die Abhängigkeit zwischen der Zeit und den relativen Ausdehnungen und Schwindungen bei Proben aus reinem Zement beim Erhärten im Wasser und an der Luft aus, die Gebrochenen II und III aber eine gleiche Abhängigkeit bei Proben aus 1 Teil Zement und 3 Teilen Sand. In gegebenem Falle hatte der Zement 2,90 vH. Magnesiagehalt und entsprach allen Normen. Der angeführte Uebergang von einer Ausdehnung zum Schwinden zeigte sich bei Proben, welche im Wasser lagerten: aus reinem Zement zum Schluß des 20. Monats und aus Mörtel 1 : 3 zum Schluß des 12. Monats, nachdem die gebrochenen Linien II und III, welche auf den Mörtel 1 : 3 Bezug haben, einander allmählich näherten.

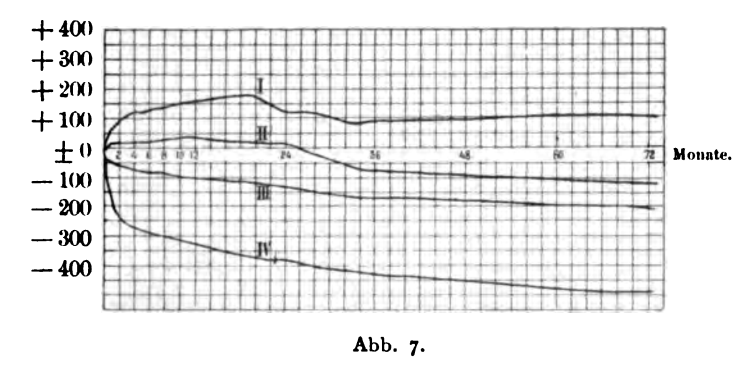


Abb. 7.

[1] Protokoll der Verhandlungen des Vereins deutscher Portlandzement-Fabrikanten 1902, S. 120.

Für an der Luft erhärtete Probekörper, wie aus reinem Zement, so auch aus Mörtel 1 : 3, zeigen die Kurven III und IV eine ununterbrochene Schwindungsvergrößerung im Laufe von 6 Jahren. Die Differenzen der Ordinate der Gebrochenen I und IV, so auch II und III drücken die Grenzen möglicher größter Veränderungen in gegebenen Zeiten beim Erhärten unter den beiden äußersten Umständen — im Wasser und an der Luft — bildlich aus. Die in Abb. 6 u. 7 dargestellten Diagramme zeigen, daß diese äußersten Veränderungen bei Mörtel mit Sand bedeutend geringer als bei Mörtel aus reinem Zement sind und sich in der Anfangszeit vergrößern; aber nach Verlauf von 2 Jahren verringern sich diese Grenzen bei Mörteln mit Sand, Abb. 7 (gebrochene Linien II und III), während bei Proben aus reinem Zement dieselben Grenzen sich ausdehnen (gebrochene Linien I und IV).

In Wirklichkeit stellen die Verhältnisse, in welchen sich die Betonbauten in der ersten Zeit ihrer Aufführung (bis zur Entfernung der Formen) befinden, etwas Mittleres zwischen den Bedingungen des Erhärtens im Wasser und an der Luft vor; deswegen muß ein Uebergang von diesen Bedingungen zu den Bedingungen der weiteren Erhärtung sich weniger schroff zeigen als bei Proben, welche abwechselnd im Wasser und an der Luft gehalten wurden. Auf Grundlage dieser Auffassungen kann man die Folgerung stellen, daß je länger in Betonbauten die anfänglichen Feuchtigkeitsverhältnisse bewahrt werden, desto günstiger wird sich das weitere Erhärten des Betons, d. h. nach der Entfernung der Formen und der Aufhörung des Annässens, zeigen.

Die oben angeführten Ergebnisse der von Considère angestellten Versuche geben die Möglichkeit, folgende Beschlüsse, die eine wichtige Bedeutung für die Bestimmung des Einflusses der äußeren und inneren Wirkungen auf die Monolität der Betonbauten haben, zu machen.

Die Zahlen der Tabelle 5 zeigen, daß die Proben Nr. 2, 4, 5 u. 8 aus Zementmörtel von 60 cm Länge, $6 \times 2{,}5$ qcm Querdurchschnitt, mit einer an ihrer Achse gelegenen Eisenstange von 1,02 cm Dicke, 4- bis 5mal geringere Volumenänderungen als gleiche Proben ohne Eisen ergaben.

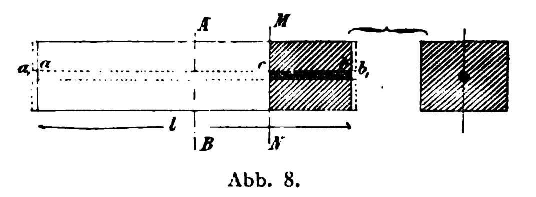


Abb. 8.

Diese Erscheinung wird dadurch erklärt, daß, dank einer bedeutenden Adhäsionskraft des Eisens an Zement, die geringste Volumenänderung des Mörtels eine entsprechende Gegenwirkung des Eisens hervorruft. So z. B. (Abb. 8) zulassend, daß bei Erhärtung des durch eine Eisenstange ab verstärkten Prismas Nr. 2 der Mörtel bestrebt ist, einige relative Ausdehnung α zu erhalten, so hätte bei Abwesenheit der Haft-

festigkeit von Mörtel an Eisen das ganze Prisma, bei einer gewissen Länge l, eine allgemeine Ausdehnung

$$a = \alpha . l$$

erhalten, wodurch ein Gleiten des Mörtels auf der äußeren Oberfläche der Stange eingetreten wäre und an den Querschnitten sich Hängsel von Zement aa_1 und bb_1 gebildet hätten, wobei

$$aa_1 = bb_1 = \frac{\alpha . l}{2}.$$

Bei Schwindung des Mörtels müßte sich bei gleichen Bedingungen eine Entblößung des Eisens an den Querschnitten ergeben, und die Länge der vorspringenden Teile des Eisens an jedem Querschnitt wäre gleichfalls:

$$\frac{\alpha . l}{2}.$$

Bei Bestehen einer starken Haft zwischen Eisen und dem es umgebenden Mörtel kann eine gleiche Unabhängigkeit der Deformationen nicht existieren, und so lange, bis diese Haftfähigkeit nicht gebrochen ist, wird eine sichtbare Deformation des Eisenzement-Probekörpers abhängig sein von den elastischen Eigenschaften des Zementmörtels.

Die elastischen Eigenschaften des Eisens bleiben unveränderlich und sind unabhängig von den Feuchtigkeitsbedingungen, aber die elastischen Eigenschaften der Mörtel ändern sich ununterbrochen während der ziemlich langen Erhärtungszeit des Zements, und außerdem hat die Feuchtigkeit einen großen Einfluß auf die Volumenänderung der Mörtel. Deswegen natürlich ist es unmöglich, in den Anfangsperioden der Erhärtung der Mörtel jene inneren Anstrengungen, welche beim Erhärten der Proben an der Luft und im Wasser im Eisen und im Zementmörtel erscheinen, genau zu bestimmen.

Zur Aufklärung dieser Frage genügt es, die Zahlen der Tabelle 6 durchzusehen. So z. B. zeigte die Probe 5, aus reinem Zement ohne Eisen, bei Erhärtung an der Luft am Abschluß des ersten Tages eine Schwindung 0,60 mm pro 1 m Länge, unterdessen eine gleiche Probe mit einer durch ihre Achse gehenden Eisenstange 0,06 mm pro 1 m Länge schwand; folglich drückte sich der Einfluß des Eisens im zweiten Falle durch eine Schwindungsverringerung 0,60 — 0,06 = 0,54 mm pro 1 m Länge aus. Unterdessen stellt zu dieser Zeit der Zementmörtel noch keinen festen Körper dar und verfügt über eine geringe Elastizität und Festigkeit. Jedenfalls vergrößern sich die Elastizität und die Festigkeit des Zementmörtels in der Anfangszeit des Erhärtens langsamer als seine Schwindung. Deswegen muß eine so bedeutende Verringerung der natürlichen Schwindung (0,54 mm pro 1 m Länge) unbedingt eine Verschiebung der Teilchen, d. h. eine unelastische, mit einer bedeutenden Hohlräumevermehrung in den Teilchen verbundene Deformation, im Mörtel hervorrufen.

Es ist also natürlich, daß jene zur Bestimmung der inneren Anstrengungen in erhärteten Mörteln und Betons gebräuchlichen Berechnungen in gegebenem Falle nicht anwendbar sein können. Prüfungen beweisen, daß die angegebene, in den Anfangsmomenten des Abbindens und Erhärtens des Zements erscheinende Hohlräumevermehrung in den trägen oder teils erhärteten Teilchen im Mörtel keine Risse nach sich ziehen kann, da die Hohlräume sich sogleich mit aus dem Mörtel, nach Maßgabe der Zementerhärtung, ausscheidenden Kristallen bis zu einem gewissen Grade ausfüllen können. Aber jedenfalls muß die angeführte Hohlräumevermehrung in den Teilchen veranlassen: 1. eine Verringerung der Dichtheit und 2. eine Reduzierung der mechanischen Eigenschaften, d. h. eine Verminderung der Elastizität und der Festigkeit des Mörtels.

Nach Maßgabe der Erhärtung des Zements und der Verstärkung des Gebindes mit dem Eisen müssen die inneren Anstrengungen im Mörtel und im Eisen, welches einer Volumenänderung des es umgebenden Mörtels entgegenwirkt, zunehmen.

In Erwägung der oben angezeigten, eine Anwendung genauer Berechnungsarten nicht zulassenden Bedingungen kann die Größe dieser inneren Anstrengungen auf Grundlage folgender Kombinationen annähernd bestimmt werden.

In einem beliebigen Querdurchschnitt *MN*, Abb. 8, wird die Resultante aller Zugkräfte, welche bei der Dichtung des Mörtels erscheinen, gleich sein:

1. der Resultante aller Druckkräfte im Eisen und
2. der Resultante der Haftkraft des Zements am Eisen, welche sich auf der zylindrischen Oberfläche *cb* zeigt.

Die Größe der letzten Resultante bestimmt die Größe der Gegenwirkung einem Gleiten des Mörtels an der äußeren Fläche der Stange *cb*, und, allgemein gesagt, ist sie proportional der Länge *cb*, d. h. dem Abstand zwischen dem betrachteten Durchschnitt und dem nächsten Querschnitt.

Die Zahlen der Tabelle 6 zeigen, daß das aus reinem Zement hergestellte und durch eine Eisenstange von 10,22 mm Durchmesser verstärkte Prisma Nr. 6 bei Erhärtung an der Luft im Laufe von 63 Tagen eine Schwindung von 0,25 mm pro 1 m Länge ergab, was einer relativen Schwindung $\alpha = 0{,}00025$ entspricht. Zulassend, daß diese relative Schwindung in der ganzen Länge des Stabes unveränderlich sein wird, und den Elastizitätskoeffizienten des Eisens gegen Druck $E = 20\,000$ kg pro 1 qmm annehmend, so muß sich in der längs der Prismenachse gelegenen Eisenstange eine Druckkraft, $p = 20\,000 \times 0{,}00025 = 5$ kg pro 1 qmm, ergeben. Bei einer Querdurchschnittsfläche des Stabes $q = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 10{,}2 \times 10{,}2}{4}$ $= 81{,}71$ qmm wird die auf die Stange drückende Kraft sich ausdrücken:

$$P = p \cdot q = 5 \cdot 81{,}71 = 408{,}55 \text{ kg}.$$

Entgegenwirkend der Dichtung des mit dem Eisen gebundenen Zementmörtels, wird die Stange im sie umgebenden Mörtel Ausdehnungswirkungen, deren Resultante $T = P = 408{,}55$ kg ist, hervorrufen. Also bei einer Querdurchschnittsfläche des Mörtels $q_1 = 6 \times 2{,}5 - 0{,}82 = 14{,}18$ qcm wird sich die Ausdehnung des Zements ausdrücken: $t = \frac{408{,}55}{14{,}18} = 28{,}81$ kg pro 1 qcm.

Von den Zahlen der Tabelle 6 Gebrauch machend, sind in den Tabellen 7 und 8 (S. 24) bei gleichen Zulassungen die mittleren Größen der Anstrengungen im Mörtel und im Eisen der Eisenzement-Probekörper Nr. 2, 4, 6 und 8 bei ihrer Erhärtung im Wasser und an der Luft im Laufe von 7 und 28 Tagen angeführt.

Die Zahlen der 5. Kolonne der Tabellen 7 und 8 zeigen, daß bei Erhärtung der Probekörper an der Luft in den Eisenzement-Proben aus reinem Zement und aus Mörtel 1 : 3, zum Schluß der 1 wöchentlichen und 1 monatlichen Frist im Mörtel innere Anstrengungen, welche der Grenze einer zeitweiligen Widerstandsfähigkeit gegen Druck ziemlich nahestehen, erhalten werden; in gleichen Proben, nur im Wasser erhärtet, besteht ein Festigkeitsvorrat von 11,2 bis 25,7. Die Zahlen der Tabelle 6 zeigen, daß mit dem weiteren Verlauf der Zeit die Volumenänderungen verhältnismäßig sehr geringe Vermehrungen erhalten; deswegen kann man den Beschluß fassen, daß die Trocknung, welche in den Anfangsfristen bei Erhärtung an der Luft erhalten wird, weit schädlicher ist als die Verlängerungen, welche beim Erhärten im Wasser beobachtet werden. In dieser Hinsicht ist folgender Versuch Considères [1]) von Interesse. Ein Eisenbeton-Prisma, Durchschnitt 6 × 2,5 qcm, mit einer Eisenstange, Diameter 10,2 mm, wurde im Laufe von 10 Monaten unter Wasser aufbewahrt; die Länge der Stange wurde zweimal gemessen: 1. nach Herausnehmen der Probe aus dem Wasser und 2. im Moment des Abschlagens des ganzen Mörtels, welcher die Stange umgab und das Eisen seine ursprüngliche Länge anzunehmen verhinderte. Den Elastizitätskoeffizienten des Eisens mit der erhaltenen Verkürzung der Stange multiplizierend, bestimmte Considère, daß im Eisen eine Ausdehnung von 12 kg pro 1 qmm sich ergeben mußte, im Mörtel aber — eine Schwindung von 69,1 kg pro 1 qcm, was etwa $^1/_5$ der Widerstandsfähigkeit des Mörtels gegen Druck ausmacht. Jedenfalls, wenn die inneren, durch die Dichtung hervorgerufenen Anstrengungen auch keine Risse hervorrufen, so verändern sie unvermeidlich die Qualitäten der Mörtel und der Betons. Versuche Considères zeigten, daß mit Eisen verstärkte Prismen aus reinem Zement, an reiner Luft aufbewahrt, bei Prüfungen auf Biegung bei der Verlängerung Risse von 0,10 bis 0,25 mm pro 1 m Länge gaben; aber gleiche Prismen, aus dünnem Beton (300 bis 600 kg Zement pro 1 cbm Sand und Kies) hergestellt, konnten Verlängerungen von 0,8 bis 2 mm pro 1 m Länge, ohne

---

[1]) Considère, Prüfung der Eigenschaften des Eisenbetons; Bericht auf dem Kongreß zu Budapest 1901.

Tabelle 7.

Erhärten im Wasser.

Nr. der Probe	Mörtelbestand der Eisenzement-Probekörper.	7 Tage				
		1.	2.	3.	4.	5.
		Relative Verlängerung der Probe.	Ausdehnung des Eisens kg pro 1 qmm.	Schwindung des Mörtels kg pro 1 qmm.	Zeitweilige Widerstandsfähigkeit gegen Druck kg pro 1 qcm.	Ueberfluß an Festigkeit im Mörtel.
2	Reiner Zement	0,00009	1,8	10,4	210	20,2
4	Mörtel 1 : 3 . .	0,00004	0,8	4,6	105	22,8
				28 Tage.		
2	Reiner Zement	0,00018	3,6	20,8	235	11,3
4	Mörtel 1 : 3 . .	0,00004	0,8	4,6	123	26,7

Tabelle 8.

Erhärten an der Luft.

Nr. der Probe	Mörtelbestand der Eisenzement-Probekörper.	7 Tage.				
		1.	2.	3.	4.	5.
		Relative Schwindung der Probe.	Schwindung des Eisens kg pro 1 qmm.	Ausdehnung des Mörtels kg pro 1 qcm.	Zeitweilige Widerstandsfähigkeit gegen Zug kg pro 1 qcm.	Ueberfluß an Festigkeit im Mörtel.
6	Reiner Zement	0,00020	4,0	23,0	23,5	1,02
	Mörtel 1 : 3 . .	0,00009	1,8	11,4	11,0	1,05
				28 Tage.		
6	Reiner Zement	0,00024	4,8	27,6	32,0	1,15
8	Mörtel 1 : 3 . .	0,00010	2,0	11,5	12,5	1,08

Risse zu geben, aushalten. Unterdessen verlängert sich ein Mörtel aus reinem Zement unter gewöhnlichen Bedingungen beim Bruche weit mehr als dünne Mörtel. Eine merkliche Verschlechterung der Eigenschaften des reinen Zements in Eisenzement-Proben kann bestimmt werden als sein

Streben, eine 4- bis 5 mal größere Dichtung zu geben, als die bei dünnen Betons zu beobachtende Dichtung.

Die Gegenwirkung der Eisenstange einer jeglichen Volumenveränderung des mit demselben verbundenen Zementmörtels ruft im trocknenden Mörtel bedeutende ausdehnende Anstrengungen hervor und beschränkt jene Fähigkeit des Zements, bei gewöhnlichen Bedingungen eine weitere Verlängerung zuzulassen.

Ein gleicher verborgener anstrengender Zustand erniedrigt in analoger Weise jenen sichtlichen Widerstand gegen die äußeren Kräfte, über welchen ein Probekörper, der keinen Widerstand beim Trocknen erfährt, verfügt.

Also drückte sich bei allen betrachteten, mit Eisen verstärkten Proben der Einfluß des letzteren durch einen gewissen Widerstand gegen die Volumenänderung des es umgebenden Betons oder Mörtels aus. In Wirklichkeit muß ein jegliches inneres oder äußeres Hindernis zur Volumenänderung des Mörtels das Erscheinen betreffender innerer Kräfte in der Mörtel- und Betonmasse hervorrufen.

Falls z. B. auf die erhärtete Schicht M des Betons oder Mörtels (Abb. 9) eine neue Schicht N gelegt wird, so wird die Volumenänderung der neuen Schicht durch die Haftkraft, welche in der Berührungsfläche AB der Schichten ein treten wird, beschränkt werden. Dadurch müssen, bei Trocknung der neuen Schicht, in derselben Ausdehnungswirkungen, welche parallel der Fläche AB gehen, erscheinen, aber in der unteren Schicht — analoge Dichtungswirkungen. Versuche von Considère ergaben, daß in Prismen von 30 cm Breite, aus reinem Zement in zwei Schichten M und N (Abb. 9) mit einer dreitägigen Unterbrechung an der Fläche AB bereitet, sich in der oberen Schicht vielzählige Risse, welche sehr deutlich zum Schluß des Jahres zu sehen waren, zeigten.

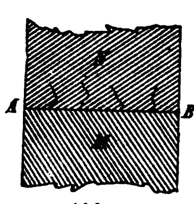


Abb. 9.

Aehnliche Risse wurden überhaupt nicht bemerkt in gleichen Prismen, welche aus einem Mörtel mit 600 kg Zement pro 1 cbm Sand hergestellt waren.

Aus den Ergebnissen der Tabellen 3 und 6 ist zu ersehen, daß die Dichtung der Zementmörtel weit größer ist als das Trocknen der steinähnlichen, welche das Gerippe der Betonmassive bilden.

So z. B. (Tabelle 3) kann die relative Trocknung an der Luft in 2 wöchentlicher Frist für Steinschlag bestimmt werden:

ziegelsteinartiger . . .	0,00011
kalksteinartiger . . .	0,00013
granitartiger	0,00015

und für Mörtel (Tabelle 6):

a) aus reinem Zement 0,00095, d. h. 6,3 mal mehr als für granitartigen Steinschlag;

b) aus 1 T. Zement und 3 T. Sand 0,00036, d. h. 2,5 mal mehr als für granitartigen Steinschlag.

Deswegen werden in der verdichteten Betonmasse die steinartigen (Kies und Steinschlag), welche sich dicht aneinander legen und welche einer geringeren Trocknung als die Mörtel ausgesetzt sind, eine ganze Volumenänderung des Mörtels bei seiner Erhärtung verhindern, und also wird in dieser Hinsicht der Einfluß der steinähnlichen derselbe sein, wie derjenige der Eisenstange in Eisenzement-Proben.

Nach den Zahlen der Tabelle 3 kann die relative Trocknung des basaltartigen Steinschlags angenommen werden = 0,00038, d. h. erscheint gleich einem Schwinden des Zements 1 : 3 in 2wöchentlicher Frist. Also bei gleichen Feuchtigkeitsbedingungen kann man die Volumenänderungen der steinähnlichen aus Basalt und Zementmörtel 1 : 3 als gleich mit denjenigen während der Anfangszeit der Betonerhärtung an der Luft annehmen. Deswegen wird die Dichtung eines solchen Betons sich annähern einer gleichmäßigen Dichtung eines gleichartigen Körpers, wodurch die inneren, durch die Dichtung hervorgerufenen Anstrengungen geringer sein werden als bei Verwendung von granitartigem Steinschlag.

Anderseits wird das Gebinde der steinartigen ohne Ausnahme durch die Bindekraft des Mörtels bestimmt, und deswegen können bei Betonerhärtung im Wasser die steinähnlichen von sich aus keinen Widerstand der vollen Volumenänderung des Mörtels leisten. Also in gegebenem Falle gibt es keine Ursache für das Erscheinen jener bedeutenden inneren Anstrengungen, welche in betrachteten Proben mit Eisen erhalten werden.

Ein jeglicher äußerer Widerstand auf die Volumenvergrößerung des Mörtels oder Betons, welche im Wasser erhärteten, erhöht ihre Qualitäten, weil derselbe in den ersten Momenten des Abbindens und Erhärtens des Zements eine Dichtung der ganzen Masse befördert und also die Festigkeit verstärkt. Die dadurch erhaltenden inneren Druckwirkungen sind bedeutend geringer als ein zeitweiliger Widerstand gegen Bruch, was aus der Tabelle 7 zu ersehen ist.

Im vorhergehenden Artikel ist erläutert, daß bei jeder Volumenänderung der steinartigen im erhärteten Betonmassiv innere Anstrengungen, welche einer relativen Verschiebung der Teilchen entgegenwirken, erscheinen. Diese nachträglichen Anstrengungen werden sich summieren mit jenen Anstrengungen, welche im Betonmassiv infolge der angeführten Differenz der relativen Trocknung des Steinschlags (Kies) und des Mörtels erscheinen werden. Deswegen kann man auf Grund alles Erläuterten folgende Beschlüsse fassen:

1. Die größten inneren Anstrengungen werden in Betons beim Erhärten an der Luft erhalten.
2. Die größten Volumenänderungen der Mörtel werden in der Anfangszeit des Erhärtens beobachtet.

3. Bei Erhärten an der Luft können in fetten Betons höchst gefährliche Anstrengungen eintreten. Eine Verringerung dieser Anstrengungen kann erzielt werden durch Verwendung von einer geringsten Zementmenge mit einem Zusatz von am wenigsten Hohlräume enthaltenden steinähnlichen Materialien und Sand, was durch eine betreffende Auswahl und Mischung der trägen Bestandteile erzielt werden kann.
4. Bei Erhärtung an der Luft werden die inneren Anstrengungen im Beton nach Maßgabe der Differenz zwischen der Schwindung der steinartigen und derjenigen des Mörtels zunehmen.
5. Mit Erhöhung dieser Differenz verringern sich die Dichtung, die Elastizität und die Festigkeit des Betons.
6. Eine jegliche äußere Beschränkung der Schwindung erniedrigt gleichfalls die Qualitäten des Betons, seine Dichte, Elastizität und Festigkeit verringernd.
7. Beim Erhärten an der Luft können die kleinsten inneren Anstrengungen erhalten werden durch Bewahrung der Feuchtigkeitsbeständigkeit des Betons während einer möglichst längeren Zeit.
8. Der Einfluß der Feuchtigkeit auf völlig erhärtete Mörtel und Betons unterscheidet sich stark vom Einfluß, welcher durch den Erhärtungsprozeß in seiner Anfangszeit bedingt wird; man kann annehmen, daß der Einfluß der Feuchtigkeit auf erhärtete Mörtel und Betons von der Zementmenge im Beton oder Mörtel nicht abhängig ist.
9. In im Wasser erhärteten Betons vermehrt eine jegliche Einschränkung der Volumenvergrößerung ihre Dichte und Festigkeit

III. Einfluß der äußeren Temperatur auf Mörtel und Betons.

Alle festen Bestandteile der Betons sind dem allgemeinen physischen Gesetz unterordnet, laut welchem eine Temperaturerhöhung bei allen festen Körpern eine Volumenvergrößerung hervorruft und eine Temperaturerniedrigung eine Volumenverringerung. Folglich wird der Einfluß der äußeren Temperatur auf die verschiedenartigen Bestandteile des Betons, ebenso wie beim Einfluß der Feuchtigkeit, auf ihr Streben, entsprechend ihrer Natureigenschaften, eine Volumenänderung hervorzurufen, herabgeführt. Deswegen sind alle allgemeinen, in den Kapiteln I. und II. angeführten Bestimmungen vollständig annehmbar für den zu betrachtenden Einfluß der äußeren Temperatur auf Mörtel und Betons.

Der deutliche Einfluß der Temperatur wird durch eine sichtbare Volumenänderung des Betonmassivs bestimmt. In Betonbauten rufen

Temperaturwechsel verschiedene, von den Konstruktionsbedingungen der Aufführungen abhängige Erscheinungen hervor.

Aber ein verborgener Einfluß der Temperaturwechsel, von ungleichen Volumenänderungen der Bestandteile des Betons begleitet, ruft innere Anstrengungen hervor, welche eine Gegenwirkung auf eine jede relative Verschiebung der Teilchen der erhärteten Betonmasse ausüben. Diese inneren Anstrengungen verändern die mechanischen Eigenschaften des Betons ebenso wie der im vorhergehenden Kapitel betrachtete Einfluß der Feuchtigkeit.

Zur Erläuterung dieser Frage ist es notwendig, zuerst den Einfluß der äußeren Temperatur auf die einzelnen Bestandteile des Betons zu betrachten.

Einfluß der Temperatur auf die Bestandteile des Betons.

Bis zu dieser Zeit sind verhältnismäßig wenig Prüfungsergebnisse, den linearen Ausdehnungskoeffizienten der Zemente, Mörtel und Betons betreffend, vorhanden.

In beistehender Tabelle 9 sind Größen der linearen Ausdehnungskoeffizienten von Zementmörteln und diversen Steinmaterialien, welche zu Betons verwendet werden, bei Erhitzung auf 100° C. angeführt.

Tabelle 9.

1.	2.	3.	4.
Materialien.	Linearer Ausdehnungskoeffizient bei 100° C.	Relative Größe.	Autoren.
I. a) Reiner Zementmörtel	0,00122	—	Meier } Büsing und Schumann, Der Portland-Zement, S. 77.
	0,00145	—	
	0,00143	—	Adie } Büsing und Schumann, Der Portland-Zement, S. 77.
	0,00107	—	Bouniceau, Ann. des Ponts et Chaussées 1867, S. 178.
	0,00137	—	Hyatt, Experiments with Portland-Cement, S. 19.
	0,00140	—	
Durchschnitt	0,00132	1,00	
b) Mörtel aus 1 T. Zement und 2 T. Sand	0,00118	0,89	Bouniceau, Ann. des Ponts et Chaussées 1867, S. 178.
II. Steinmaterialien.			
1. Granit:			
Granit aus Dielette	0,00079	—	Bouniceau, Ann. des Ponts et Chaussées 1867, S. 178.
Granit	0,00085	—	Adie, Rankine, Appl. Mechanics, S. 349.
Granit	0,00078	—	Hurst, Potter, Concrete its use in building, S. 45.
Granit aus Aberdeen	0,00079	—	Dana, Engineering News 1892, S. 341.
Feinkörniger Granit.	0,00086	—	
Durchschnitt	0,00081	0,61	

1. Materialien.	2. Linearer Ausdehnungskoeffizient bei 100° C.	3. Relative Größe.	4. Autoren.
2. Kalksteine:			
Kalkstein aus Sing	0,00102	—	Dana, Engineering News 1892, S. 341.
„ „ Kankakee . .	0,00100	—	Pence, Engineering News 1892, S. 341.
„ „ Ranville . . .	0,00075	—	Bouniceau, Ann. des Ponts et Chaussées 1867, S. 178.
„ „ Maladrerie . .	0.00089	—	
Durchschnitt	0,00091	0,69	
3. Marmor:			
	0,00088	—	Adie. Rankine. Appl. Mech., S. 349.
	0,00086	—	Ganot, Eng. News 1902, S. 341.
	0,00054	—	Bouniceau.
Durchschnitt	0,00076	0,58	
4. Sandsteine:			
	0,00122	—	Haswell — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00194	—	„ — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00117	—	Ganot — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00173	—	Dana — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00059	—	Thuston — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00099	—	„ — Engineering News 1902, S. 341.
	0,00105	—	Adie, Rankine, Appl. Mech., S. 348.
Durchschnitt	0,00124	0,94	
5. Schiefer:			
	0,00099	—	Engineering News 1902, S. 341.
	0,00104	—	Adie, Rankine. Appl. Mech., S. 341.
Durchschnitt	0,00101	0,76	
6. Ziegelstein gewöhnl. . . .	0,00055	—	Hurst, Potter. Concrete. S. 45.
„ „ . . .	0,00023	—	Haswell, Eng. News 1902, S. 341.
„ feuerfester . .	0,00051	—	do.
„ „ . .	0,00050	—	Adie, Rankine, Appl. Mech., S. 349.
Durchschnitt	0,00045	0,34	
7. Quarz:			
a) Perpendikulär der Kristallachse	0,00079	0,60	Brit, Engineering News 1902, S. 341.
b) Parallel der Kristallachse	0,00050	0,38	

Die Zahlen der dritten Kolonne dieser Tabelle zeigen, daß unter den festen Bestandteilen des Betons über den größten Ausdehnungskoeffizienten Zement verfügt, und über den mindesten Ziegelsteine.

In den vorhergehenden Kapiteln wurde darauf hingewiesen, daß die steinartigen Bestandteile (Kies und Steinschlag), welche die Hauptmasse — Gerippe des Betons bilden, einen vorherrschenden Einfluß auf die sichtbare Ausdehnung der Betonmassive, hauptsächlich bei dünnen (porösen) Betons, haben müssen.

Als Beweis dieser theoretischen Auffassungen können teilweise folgende Versuchsergebnisse Pences[1]), der den Ausdehnungskoffizienten zylindrischer Betonprobekörper von 0,915 m Länge, 10,2 cm Diameter bestimmte, dienen. Das Mischungsverhältnis war 1 : 2 : 4; in den einen Probekörpern bestanden die steinartigen aus kalkhaltigem Steinschlag bei einer Größe der einzelnen Steinstücke von 0,6 cm bis 3 cm, in anderen aus kalkhaltigem Kies derselben Größen. Alle übrigen Bedingungen der Bereitung, Lagerung und Prüfung waren gleich für beide Gruppen der Probekörper. Zugleich wurde der Ausdehnungskoeffizient der Probekörper, welche aus gleichem Kalkstein, wie zu den steinartigen Bestandteilen gebraucht, hergestellt waren, bestimmt. Die Resultate der Versuche sind in der Tabelle 10 angeführt.

Tabelle 10.

Gruppe 1.				Gruppe 2.		
Mischung: 1 T. Zement, 2 T. Sand, 4 T. kalkartiger Steinschlag.				Mischung: 1 T. Zem., 2 T. Sand, 4 T. kalkartiger Kies.		
Nr. der Probe.	Kalksteinbruch.	Zement-Marke.	Ausdehnungskoeffizient auf 100° C.	Nr. der Probe.	Zement-Marke.	Ausdehnungskoeffizient auf 100° C.
1.	Bedford	A	0,00094	8.	A	0,00097
2.	„	„	0,00095	9	B	0,00099
3.	„	„	0,00095	10.	„	0,00095
4	„	„	0,00103	11.	„	0,00094
		Durchschnitt	0,00098		Durchschnitt	0,00096
5.	Kankakee	B	0,00101			
6.	„	„	0,00097			
7.	„	„	0,00108			
		Durchschnitt	0,00100			

Der Ausdehnungskoeffizient der Probe, hergestellt aus Kalkstein aus Kankakee, wurde bestimmt: $\alpha = 0{,}00100$, d. h. erwies sich gleich der

[1]) Journal of the Western Society of Engineers 1901, S. 549.

mittleren Größe des Ausdehnungskoeffizienten der Betonproben Nr. 5, 6 und 7, aus Steinschlag desselben Kalksteins hergestellt.

Zur Vergleichung des Einflusses der Feuchtigkeit und der äußeren Temperatur auf die Volumenänderungen der steinartigen Bestandteile sind in der Tabelle 11 angeführt: 1. durchschnittliche lineare Aenderungen der Steinmaterialien und Mörtel bei Temperaturwechsel bis 50° C. und 2. Zahlen aus den Tabellen 3 und 6, welche eine mögliche relative Schwindung derselben Materialien bei Erhärtung der Betons an der Luft in einem Zeitraum von 2 Wochen ausdrücken.

Tabelle 11.

Nr.	Materialien.	1.	2.	3.	4.	5.
		Relative Längenänderungen bei Temperaturwechsel bis:			Relative Trocknung β.	$t_1 - t_0 = t$.
		10°	25°	50°		
1.	Reiner Zementmörtel	0,00013	0,00033	0,00066	0,00095	73
2.	Ziegelsteine . . .	0,00004	0,00011	0,00022	0,00011	28
3.	Sandstein	0,00012	0,00031	0,00062	0,00065	54
4.	Kalkstein	0,00009	0,00022	0,00045	0,00013	14
5.	Granit	0,00008	0,00020	0,00040	0,00015	19

Die Zahlen der 5. Kolonne dieser Tabelle bezeichnen jene Temperaturverschiedenheiten, welche in diversen Materialien Volumenänderungen gleich der Trocknung, nach zweiwöchentlicher Frist, hervorrufen.

Also bei Ueberschreiten der in der 5. Kolonne angegebenen Grenzen sind die Temperaturwechsel auf die Volumenänderung der Bestandteile des Betons am vorherrschendsten einflußreich. Die Zahlen der 1., 2., 3. und 4. Kolonne in der Tabelle 11 bestimmen relative lineare Aenderungen der Bestandteile des Betons im Falle eines gemeinschaftlichen Einflusses der Trocknung und der Temperaturänderungen bis 10°, 25° und 50°.

So z. B. würden sich bei Temperaturerniedrigung bis 50° (Kolonne 3) und bei zweiwöchentlicher Trocknung (Kolonne 4) die höchsten relativen Schwindungen ausdrücken:

			Relat. Größe.
1.	Zementmörtel .	0,00066 + 0,00095 = 0,00161 . . .	4,88
2.	Sandstein	0,00062 + 0,00065 = 0,00127 . . .	3,85
3.	Kalkstein	0,00045 + 0,00013 = 0,00058 . . .	1,70
4.	Granit	0,00040 + 0,00015 = 0,00055 . . .	1,66
5.	Ziegelsteine . . .	0,00022 + 0,00011 = 0,00033 . . .	1.

Hieraus folgt, daß für das Gerippe des Betons als vorteilhafteste Steinmaterialien erscheinen: Ziegelsteine, Granit und Kalksteine, vergleichnisweise geringen Volumenänderungen ausgesetzte Materialien.

Eine weitere Vergleichung der Einflüsse der Feuchtigkeit und der äußeren Temperatur bringt zu folgenden Resultaten.

Die größte Trocknung der Mörtel wird während der Abbindungsperiode und den anfänglichen Fristen des Erhärtens beobachtet und hängt dem Anschein nach von den Erhärtungsprozeß an der Luft begleitenden chemischen Erscheinungen ab. Aber das Trocknen der Steinmaterialien, der völlig trägen Bestandteile des Betons, ist ausschließlich von der Schnelligkeit der Verdunstung des in ihnen enthaltenen freien Wassers abhängig. Zufolge dieser Dualität der Veranlassungen einer Volumenänderung der Bestandteile des Betons unterscheidet sich das Erscheinen des Trocknens des Betons beim Erhärten an der Luft durch eine größere Kompliziertheit als eine Volumenänderung des Betons, nur unter Einfluß des Wechsels der äußeren Temperatur.

In der Praxis ist es möglich, bis zu einem gewissen Grade eine Beständigkeit der Feuchtigkeit und der Temperatur der umgebenden Atmosphäre so lange zu bewahren, bis der Beton jene Festigkeit, welche für eine Gegenwirkung auf die weiteren Veränderungen der Feuchtigkeits- und Temperaturbedingungen notwendig ist, erlangt.

Nach Maßgabe der Verdunstung des freien Wassers zeigen die inneren Massen des erhärteten Betons ein Streben nach Erlangen einiger dauernder Feuchtigkeit. Aber die äußere Temperatur, sich in großen Grenzen periodisch verändernd, ruft in Betonbauten, welche einer unmittelbaren Wirkung der Atmosphäre ausgesetzt sind, entsprechende Volumenänderungen hervor.

Die Beständigkeit der Feuchtigkeits- und Temperaturbedingungen wird als zwei physische Eigenschaften bestimmt: die Undurchdringlichkeit und die Wärmeleitungsfähigkeit des Betons. In dieser Hinsicht ist die Herstellung der Betons von erforderlichen Qualitäten gänzlich abhängend von der betreffenden Auswahl der Bestandteile, des Verhältnisses derselben zueinander und von der Verwendungsweise des Betons.

Die Undurchdringlichkeit des Betons nimmt zu nach Maßgabe der Erhöhung seiner Dichtung; die Wärmeleitungsfähigkeit aber ist abhängig von der Porosität des Betons selbst, wie auch der Bestandteile. Anderseits kann die erwünschte Beständigkeit der Feuchtigkeitsbedingungen bei Betonbauten, unabhängig von der Undurchdringlichkeit des Betons selbst, durch Treffen von Maßregeln beim Trocknen, welche die Bauten von einer unmittelbaren Wirkung der äußeren Atmosphäre sichern, erzielt werden.

Aber der Einfluß der Veränderungen in der äußeren Temperatur auf die Betonbauten erscheint unanwendbar und deswegen sind, unabhängig von allen übrigen Umständen, Betons mit geringer Wärmeleitung, d. h. stark poröse, zu verwenden.

Infolge ununterbrochenen Temperaturwechsels geht in der erhärteten Masse des Betons, sozusagen, ein fortdauernder Kampf zwischen zwei verbundenen Materialien, den trägen Bestandteilen und dem Bindemittel, vor. Die Elastizitätskoeffizienten der trägen Bestandteile und des erhärteten Betons erreichen ihre endlichen Größen; deswegen ruft die geringste Volumenänderung der Bestandteile ein Streben zu relativer Versetzung der verbundenen Teilchen hervor, was ein Erscheinen von inneren Anstrengungen nach sich zieht. Mögliche relative Versetzungen der Teilchen, ohne Bruch der ganzen Masse des Betons, werden als mechanische Eigenschaften des Zementmörtels und der steinigen Bestandteile des Betons erklärt.

Von den zwei Sorten poröser Betons sind Betons aus fetten Mörteln, welche ein mehr dauerhaftes und elastisches Gebinde den steinartigen Bestandteilen geben, vorzuziehen. In den Betonmassiven kann eine Wärmeverteilung sehr verschiedenartig sein, in Abhängigkeit von den äußeren Bedingungen, z. B. der Lage der Bauten in bezug auf die Weltgegenden, von der Art und Weise der Erdbeschüttung, von dem Temperaturzustand im Inneren und Aeußeren der Bauten (Wohngebäude) u. a. m.

Ueberhaupt alle Folgerungen des vorhergehenden Kapitels, welche sich auf den Einfluß der Feuchtigkeit beziehen, betreffen ganz und gar die betrachtete Frage über den Einfluß der äußeren Temperatur.

IV. Einfluß der den Erhärtungsprozeß begleitenden inneren Erscheinungen auf die Volumenbeständigkeit des Betons.

1. Temperaturerhöhung während der Erhärtungsperiode des Betons.

Der chemische Erhärtungsprozeß des Zements wird von einer Wärmeabteilung begleitet; deswegen besteht in den Betonmassiven eine selbständige Wärmequelle. Die Wirkung dieser inneren Wärmequelle, sich mit dem Einfluß der äußeren Temperatur summierend, erscheint in einigen Fällen für Betonbauten günstig, z. B. bei Ausführung des Aufmauerns während des Frostes oder herber Temperaturveränderungen, wenn der Zufluß der inneren Wärme das Anhalten einer beständigen Temperatur im Betonmassiv befördert.

Aber bei normalen Bedingungen hat die beim Erhärten des Zements sich abteilende Wärme eine Temperaturerhöhung der Bestandteile zur Folge und bricht jene Bedingungsbeständigkeit, welche zum Erhalten von Betons bester Qualitäten während der Abbindungs- und Erhärtungsperiode des Betons notwendig ist.

Laboratorische Versuche, angestellt bei Anmachen von 1 kg Zement, ergaben,[1]) daß: 1. die Temperaturerhöhung des Mörtels nach Maßgabe der Schnelligkeitsvergrößerung des Abbindens des Zements zunimmt; 2. eine Temperaturerhöhung im Brei früher bemerkt wird, als durch eine Wyck-nadel der Beginn des Abbindens des Zements festgestellt wird; 3. die größte Temperaturerhöhung, welche bei Anmachen von 1 kg Zement beobachtet wurde, 9° C. war; dabei war für verschiedene Zementsorten, vom Beginn des Abbindens bis zur größten Temperaturerhöhung, die kleinste Frist 43 Minuten und die größte Frist 2 Stunden 57 Minuten.

Die Anstellungsbedingungen für laboratorische Versuche an geringen Zementquantitäten sind von jenen Bedingungen, in welchen die Betonbauten sich in der Wirklichkeit befinden, wesentlich verschieden. Nach Maßgabe der Volumenvergrößerung verringert sich der Einfluß der äußeren Wirkungen, wie z. B. der Einfluß der Abkühlung durch die äußeren Flächen. Versuche von Herzog[2]) ergaben, daß bei Anmachen von 9 kg langsam bindendem Zement die Temperatur des Mörtels nach 7 Stunden auf 16° C. stieg, aber bei Anmachen von 32 kg auf 30,5°.

Nach den Ergebnissen von Ribaucour[3]) wurde bei Aufführung von Festungsbauten in der Betoneinlegung eine Temperaturerhöhung bis 46° C. beobachtet.

Im Jahre 1903 wurden in Kronstadt beim Bau eines Forts in der Betonwand einer Kasematte von 5 Fuß Dicke unmittelbare Temperatur-

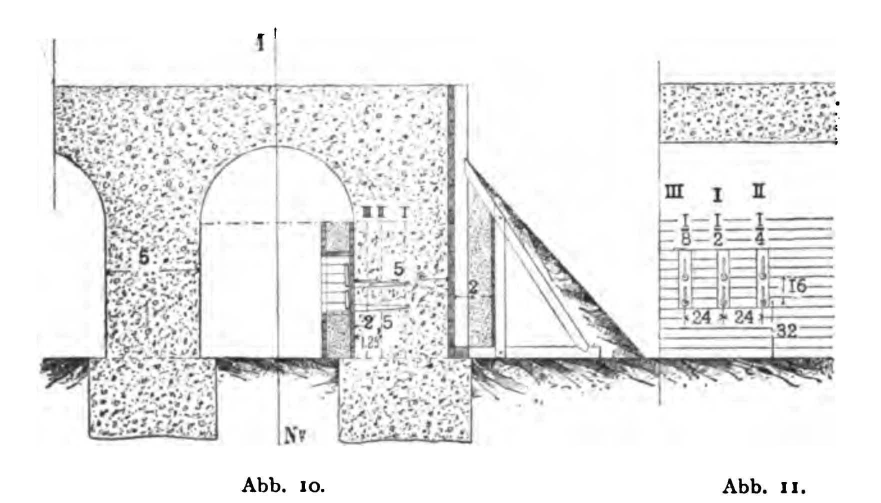


Abb. 10. Abb. 11.

messungen mit 6 knieförmigen Thermometern gemacht, deren Quecksilberkugeln sich befanden: die zwei mittleren, Abb. 10 und 11, in einer Ent-

[1]) Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction, B. IV, S. 134.

[2]) J. Maljuga. Eigenschaften des Portlandzements „Ing.-Journ." 1891, Nr. 9, S. 1222.

[3]) Durand-Clay et Fêret. Chimie appliquée, S. 352.

fernung von 2,5 Fuß von der Wandfläche, die zwei äußeren in einer Entfernung von $^1/_4$ der Dicke und die zwei linken in einer Entfernung von $^1/_8$ der Dicke. Die horizontale Entfernung zwischen den Thermometern war 24 Zoll und die vertikale 16 Zoll.

Entsprechende Oeffnungen für die Thermometer wurden während des Betonlegens vermittels eingestellter konischer Holzpfropfen erhalten; nach zwei Tagen wurden die Holzpfropfen herausgenommen und an ihre Stellen kamen gleiche Holzpfropfen, längs deren Achsen durchgehende Löcher zum Einstellen der horizontalen Thermometerteile ausgebohrt waren. Nach Einstellen der Pfropfen mit den Thermometern wurden alle Zwischenräume mit Hede verstopft. Zur Verhinderung einer raschen Abkühlung wurde an der Wandaußenseite bis dicht an die Holzstützen, Abb. 10, eine Verstopfung aus Sägespänen in einer Höhe von 8 Fuß und einer Dicke von 2 Fuß, mit einer Erdaufschüttung von außen, gemacht; eine gleiche Verstopfung von 1 Fuß Dicke war an der inneren Wandfläche.

Das Betongemenge in der Wand war: 1 Teil Portlandzement, 3 Teile Sand und 7 Teile Granitschotter (Maschinenschlag).

Der Beginn des Abbindens 1 Stunde 15 Minuten und Schluß der Bindezeit 9 Stunden 15 Minuten. Der Wasserzusatz wurde durch die Bedingung, daß der Mörtel bei einer Durchschnittsarbeit des Stampfens (3 bis 3,5 Mann pro 1 cb-Faden) sich an der Oberfläche (Dicke der Arbeitsschichten 5 Zoll) zeigte.

Die Betoneinbringung wurde bei einer Temperatur von + 13° C. gemacht.

Zwei Tage nach Beendigung der Einbringung wurden in die Oeffnungen die Thermometer eingestellt und die Kasematte verschlossen.

Eine höchste Temperatur zeigte sich im Wandinnern zum Schluß des 4. Tages, und bei einer äußeren Temperatur von + 12° C. war dieselbe:

a) Thermometer Nr. 1 . . . . + 21,3°
b) „ Nr. 2 . . . . + 20,6°
c) „ Nr. 3 . . . . + 20,6°,

d. h. das größte Temperatursteigen: 21,3 — 12 = 9,3° ergab sich in der Mitte der Wand.

Die angeführten höchsten Temperaturen waren in allen Thermometern anhaltend im Laufe von 2 Tagen, aber nachdem begann im Innern der Wand ein allmähliches Sinken der Temperatur.

Nach Verlauf eines Monats zeigten die Thermometer: Nr. 1 + 14,9°, Nr. 2 + 14,6° und Nr. 3 + 14,3° bei einer Temperatur von + 12° im Innern der Kasematte und + 12,5° von außen. Die mittleren Ergebnisse einer jeden Thermometergruppe, im Laufe von 2 Monaten beobachtet, sind im Diagramm (Abb. 12) durch ununterbrochene Linien und die Temperatur in- und außerhalb der Kasematte durch gebrochene Linien bezeichnet.

Die Wärmeabteilung erscheint als Folge einer chemischen gegenseitigen Einwirkung des Zements und Wassers und muß daher während der ganzen Erhärtungsperiode des Betons fortdauern. Je schneller eine gegenseitige Einwirkung des Zements und Wassers vonstatten geht, eine desto größere

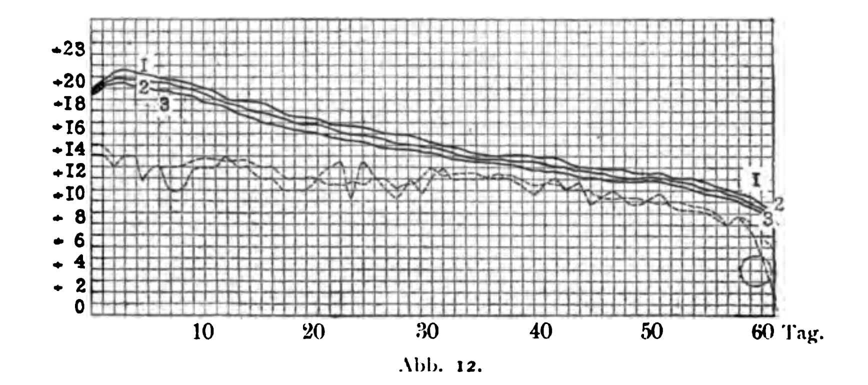


Abb. 12.

Wärmequantität muß sich in der Einheit der Zeit abteilen. Wenn die Temperatur der Betonmasse die Temperatur der umgebenden Atmosphäre übersteigt, so muß eine Abkühlung der Außenflächen des Massivs beginnen, weswegen ein Wärmezufluß aus dem Innern des Massivs zu den abgekühlten Flächen entsteht.

Nach Maßgabe eines Eintretens des Wassers in eine gegenseitige Einwirkung mit dem Zement werden im Mörtel des Betonmassivs mit Luft gefüllte Poren erscheinen, weswegen die Wärmeleitungsfähigkeit des Betons mit dem Laufe der Zeit sich verringert. Anderseits, dank einer bedeutenden Wärmekapazität des Wassers, wird einige Quantität der abgeteilten Wärme für die Temperaturerhöhung des vorhandenen freien Wassers gehen, wodurch die Möglichkeit eines raschen Temperatursteigens im Innern des Betonmassivs bis zu einem gewissen Grade verhindert wird. Auf eine gleiche Weise reguliert das vorhandene freie Wasser das Temperaturfallen während der Abkühlungsperiode des Massivs.

Außerdem erscheint in der Praxis als unvermeidlich eine Verdunstung des Wassers erst an den Außenflächen und nachdem auch aus dem Kern des Massivs, wodurch eintritt: 1. ein Verschlingen der Wärme aus dem Massiv und 2. eine Vergrößerung seiner Porosität, was eine Verringerung der Wärmeleitungsfähigkeit nach sich zieht. Aus Erklärtem geht hervor, daß die Frage über das Temperatursteigen im Innern des Betonmassivs sehr kompliziert erscheint.

Unter gewöhnlichen Umständen wird eine größte Temperaturerhöhung einige Tage nach der Betonlegung, d. h. bedeutend später als bei Anmachen der reinen Zementmörtel, beobachtet. Diese Erscheinung wird erklärt, 1. dadurch, daß das Zementgewicht einen verhältnismäßig geringen Teil der Gewichtssumme aller übrigen Bestandteile ausmacht und 2. daß der Sandzusatz

zum Zementmörtel das Abbinden und das Erhärten verlangsamt und also die Wärmequantität verringert, welche vom erhärteten Zement in der Einheit der Zeit abgeteilt wird.

Feiner Sand verlangsamt das Abbinden und die Erhärtung mehr als grober Sand. Ein Wasserüberfluß im Beton verlangsamt gleichfalls das Abbinden des Zements. Um ein möglichst geringes Temperatursteigen im Innern der Betonmassive zu erzielen, ist notwendig: 1. die Anwendung von Betons mit möglichst geringem Zementgehalt, 2. die Anwendung von langsam bindenden Zementen, 3. die Anwendung von abgelagerten Zementen, d. h., welche einer „Luftlöschung" unterworfen waren, was eine Verlangsamung des Abbindens und des Erhärtens, sowie eine Hydratation des freien Kalks, welcher bei Verbindung mit Wasser eine bedeutende Wärmemenge abteilt, befördert, und 4. eine richtige Auswahl der trägen Bestandteile.

2. Einfluß der Mahlung und der Zusätze zum Zement.

Im ersten Kapitel wurde in allgemeinen Zügen der relative Einfluß der Volumenänderungen des Zements und des Mörtels auf die Volumenbeständigkeit des Betons erklärt.

Der Einfluß innerer Bedingungen auf die Erhärtung der Zementmörtel ist im Artikel von J. G. Maljuga „Eigenschaften des Portlandzements bei seiner Verwendung und Prüfung"[1]) genau betrachtet; deswegen kann man sich in gegebenem Falle auf eine Angabe jener allgemeinen Beschlüsse, welche auf den Einfluß der Bestandteile der Mörtel auf ihre Volumenbeständigkeit Bezug haben, beschränken.

In dieser Hinsicht hat von den physischen Eigenschaften des Zements die größte Bedeutung die Feinheit der Mahlung und von seinen Bestandteilen freier Kalk, Gips und Magnesia.

Die Feinheit der Mahlung hat einen sehr bedeutenden Einfluß auf die gute Qualität der Zementmörtel. Die feinsten Zementteilchen nehmen an der Erhärtung des Zements meistens wirkungsvoll teil, aber die groben Teile des Zements treten langsamer in eine gegenseitige Wirkung mit dem Wasser und stören dadurch den monotonen Verlauf des Erhärtungsprozesses der ganzen Mörtelmasse. Feingemahlener Zement besitzt eine größere Bindekraft und gestattet deswegen eine Verwendung von dünnen Mörteln, d. h. mit einem geringsten Einfluß des Zements auf die Volumenbeständigkeit der Mörtel.

Freier Kalk, welcher sich im bis zur Sinterung gebrannten Zement befindet, verbindet sich mit dem Wasser langsam, wobei diese Löschung des Kalks mit einer Volumenvergrößerung desselben verbunden ist und eine Zerstörung in der schon erhärteten Zementmasse hervorruft. Außerdem

[1]) „Ing.-Journal", 1891, Nr. 9 u. Nr. 10.

wird die Kalklöschung von einer Wärmeabteilung in großer Quantität begleitet.

Der Einfluß von Gips und Magnesia auf die Eigenschaften des Zements verändert sich in Abhängigkeit davon, ob diese Stoffe sich in rohen Materialien, welche einem Brennen bis zur Sinterung unterworfen waren, befanden, oder dem fertigen Zement zugesetzt worden sind. Versuche von Michaelis zeigten, daß ein Gipszusatz von 3 vH. zu gebrannten Kalksteinen im Zementmörtel eine Zerstörung hervorrufen kann, was durch die Volumenänderung des Gipses, bei seinem Uebergang in einen Hydratzustand, erklärt wird. In der Praxis wird Gips in geringen Quantitäten dem fertigen Zement zugesetzt und befördert ein langsameres Abbinden des Zements und eine Verringerung der gefährlichen Eigenschaft der Zemente, bei ihrer Erhärtung die Volumen zu verändern, was bei einem großen Kalkgehalt und einem Brennen bei nicht genügend hoher Temperatur bemerkt wird. Solch ein nutzenbringender Einfluß des Gips auf den Zement wird bei einem Gipszusatz von nicht mehr als 1 bis 2 vH. beobachtet; ein größerer Zusatz von Gips zieht aber eine Zerstörung des erhärteten Zements infolge seiner Volumenvergrößerung nach sich.

Versuche von Dyckerhoff[1]) ergaben, daß ein Gipszusatz von 2 vH. die Ausdehnung, welche an Probekörpern (1 Teil Zement und 3 Teile Sand) bei einjähriger Erhärtung unter Wasser beobachtet wurde, verdoppelte; ein Gipszusatz von 5 vH. vergrößerte die Ausdehnung um 12 mal.

Magnesia erhält bei einer hohen Brenntemperatur des Portlandzements die Eigenschaft, sich sehr langsam mit Wasser, eine Volumenvergrößerung zeigend, zu verbinden.

Der schädliche Einfluß des Ueberflusses an Kalk und Gips wird in erhärteten Zementen nach Verlauf einiger Tage, seltener Wochen, bemerkt und wird deswegen durch die angenommenen Normalprüfungen auf die Volumenbeständigkeit ermittelt; währenddem das Beisein von Magnesia, welches einem hohen Brande unterlag, eine deutliche Volumenänderung des Zements erst nach 1 jähriger Erhärtung im Wasser hervorruft, aber beim Erhärten an der Luft ersieht man die Erscheinung einer Volumenvergrößerung erst nach noch längeren Fristen. Versuche Dyckerhoffs ergaben, daß Zemente ohne Magnesiagehalt beim Erhärten eine unbedeutende und allmähliche Volumenänderung hatten, aber Zemente mit Magnesiagehalt zeigen vor Beginn der Erhärtung eine große Ausdehnung. Außerdem besteht für Zemente mit Magnesiagehalt eine Grenze (von 6 bis 18 Monaten), nach welcher die Ausdehnung der magnesiahaltigen Zemente nach Maßgabe einer Vergrößerung des Magnesiazusatzes sehr rasch steigt.

Ein Magnesiazusatz zu fertigen Zementen ruft gleichfalls eine im Laufe von großen Zeiträumen zu beobachtende Ausdehnung der Mörtel hervor.

[1]) Sutcliffe. Concrete, its nature and uses, S. 83.

Im Diagramm (Abb. 13) sind dargestellt die Resultate der Versuche Dyckerhoffs,[1]) der die Ausdehnung an Probekörpern von 10 cm aus Mörtel (1 Tl. Zement und 3 Tl. Normalsand) bestimmte. Der Kalkteil wurde durch Magnesia (3,5 bis 11,36 vH.) ersetzt.

Zum Schluß des dritten Jahres war die durchschnittliche Verlängerung der Proben aus 7 Markt-Zementen mit 3,5 vH. Magnesia (gebrochene Linie *OA*) 0,00032, aber aus Zement mit 4,2 vH. Magnesia 0,00072.

Die Frage über die Bedeutung und die Höhe des Magnesiagehalts in Markt-Zementen ist bis heute noch nicht ganz aufgeklärt, und die zugelassene Magnesiaquantität schwankt lt. den Normen der verschiedenen Gegenden von 5 bis 3 vH.

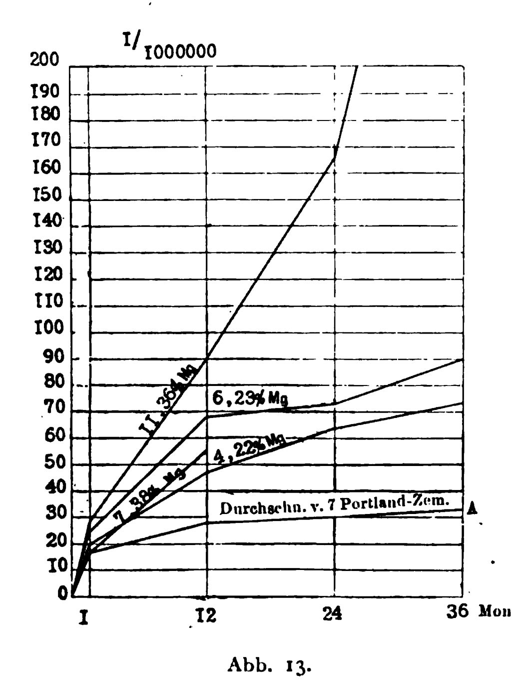


Abb. 13.

Jedenfalls veranlassen die zweifellos zerstörende Wirkung von Magnesia in Zementen mit Magnesiagehalt wie auch die angeführte Unbestimmtheit der Frage über die Bedeutung von Magnesia, daß den Zementen mit möglichst geringem Magnesiagehalt der Vorzug zu geben ist.

Das Streben der Zemente zu einer Volumenvergrößerung infolge von Ueberfluß an Kalk, nicht genügend hohem Brande oder Grobheit der Mahlung kann in bedeutendem Maße geschwächt werden, im Falle die Zemente bis zu ihrer Verwendung einer Lagerung unterliegen werden. Außerdem verlangsamt die Lagerung das Abbinden des frischgebrannten Zements und verbessert also überhaupt seine Qualität.

Die Lagerungstermine ändern sich für die verschiedenen Zemente in großen Grenzen.

Zement von guter Qualität und einer sehr feinen Mahlung erfordert überhaupt keine Lagerung. Nach Benders Meinung muß die Lagerung im Laufe von 1 bis 2 Monaten dauern, nachdem die Volumenvergrößerung der Zemente aufhört.

Nach Erdmengers Meinung erhält die höchsten Eigenschaften solcher Zement, dessen spezifisches Gewicht von 3,2 bis 3,12, durch Aufnahme von 0,8 vH. Kohlensäure aus der Luft, fällt.

---

[1]) Protokoll der Verhandlung des Vereins deutscher Portland-Zement-Fabrikanten, 1892, S. 67.

Im allgemeinen gesagt, befriedigen die angewendeten Normalprüfungen zur Bestimmung der Volumenbeständigkeit der Zemente bei ihrer Erhärtung nicht die Forderungen der Praxis, da dieselben sich auf die Anfangszeit der Erhärtung beziehen. In dieser Hinsicht verdient eine besondere Aufmerksamkeit die Meinung Prof. Garys, welche er in seinem Berichte auf dem Internationalen Kongresse für Materialienprüfungen in Budapest äußerte:[1] „Infolge einer Zweifelhaftigkeit aller bis jetzt vorgelegten Arten zur Bestimmung der Volumenbeständigkeit ist es notwendig, ein neues Verfahren zu finden." Der Berichterstatter deutete darauf hin, daß 4jährige Versuche, im Berliner Laboratorium an 10 Zementen vorgenommen, die Unvollkommenheit der bestehenden Prüfungsarten auf eine Volumenbeständigkeit (Probe durch Erhitzen, Kochen, Dampfprobe bei hohem Druck usw.) bestätigten, obgleich in einigen Fällen eine jede von diesen Arten mit Nutzen angewendet werden kann zu laboratorischen und Fabrikprüfungen.

Eine solche Sachlage der Frage über die Prüfungsverfahren auf die Volumenbeständigkeit der Zemente fordert eine besondere, strenge Aufmerksamkeit bei Auswahl des Zements zur Aufführung von monolithen Betonbauten. Als die besten Zemente muß man ansehen: abgelagerte Zemente einer feinen Mahlung mit einem kleinsten Gehalt von Bestandteilen, welche sichtbar die Qualität des Zements erniedrigen oder deren Bedeutung noch nicht gänzlich aufgeklärt ist.

V. Mechanische Eigenschaften des Betons.

Im I. Artikel wurde erläutert, daß in der erhärteten Betonmasse eine Volumenänderung der Bestandteile das Erscheinen von inneren Kräften zur Folge hat. Diese inneren Kräfte summieren sich mit den inneren Kräften, welche durch die Belastung oder überhaupt durch die Einwirkung äußerer Kräfte hervorgerufen wird. Deswegen wird eine nutzvolle Gegenwirkung der Betonmassive sich vergrößern: 1. bei einer Verringerung der Anstrengungen von inneren Kräften, welche durch den Einfluß das Volumen der Bestandteile des Betons ändernder Wirkungen hervorgerufen werden, und 2. bei Vergrößerung der Elastizität und Festigkeit des Betons.

1. Elastizitätskoeffizient der Betons gegen Druck.

Von allen Versuchen, welche an Betons und Mörteln zur Bestimmung ihres Elastizitätskoeffizienten vorgenommen wurden, haben diejenigen von Bach und Schüle[2]) eine größte Bedeutung.

Bachs Prüfungen unterscheiden sich von allen anderen durch die Größe der Probekörper (Diameter 0,25 m, Höhe 1 m), die Zahl (102), die Ver-

[1]) Zement 1902, S. 3.

[2]) Zeitschrift des Ver. deutsch. Ingenieure 1895, Nr. 17; 1896, Nr. 48; 1897, Nr. 9.

schiedenartigkeit ihrer Bestandteile und durch eine große Anzahl von Beobachtungen.

Die Probekörper wurden 76 bis 97 Tage nach Herstellung derselben geprüft. Die Ergebnisse der Versuche an Probekörpern aus Gußeisen, Kupfer, Granit, Zementmörteln und Betons verschiedener Mischung zeigten, daß die Abhängigkeit zwischen Deformationen und den wirkenden äußeren Kräften durch die Gleichung

$$\varepsilon = \alpha \cdot \delta^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ausgedrückt wird, worin: ε relativer Druck, α der Koeffizient gegen Druck, welcher die Längenverkürzung des Zylinders von 1 cm Höhe unter einer Belastungskraft von 1 kg, verteilt auf 1 qcm Fläche des Querdurchschnitts, bestimmt, δ die Anstrengung der Druckkraft und m ein gewisser Koeffizient. Der Elastizitätskoeffizient E wird sich durch eine Größe, umgekehrt derjenigen des Koeffizienten gegen Druck, ausdrücken, d. h.

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta^m}{\varepsilon}.$$

In der nächstfolgenden Tabelle 12 sind die Größen E und m für Zementmörtel und Betons verschiedener Mischungen angeführt.

Tabelle 12.

Mischung der Proben	E kg pro 1 qcm	m
1. Zementmörtel.		
1. Reiner Zement	250 000	1,0900
2. 1 T. Zem., 1,5 Sand	356 000	1,1090
3. 1 „ „ 3 „	315 000	1,1473
4. 1 „ „ 4,5 „	230 000	1,1687
2. Betons.		
1. 1 T. Zem., 2,5 Sand, 5 T. Kies	297 820	1,1448
2. 1 „ „ 2,5 „ 5 „ kalkart. Steinschl.	256 910	1,1575
3. 1 „ „ 3 „ 6 „ Kies	279 981	1,1371
4. 1 „ „ 3 „ 6 „ kalkart. Steinschl.	308 283	1,1607
5. 1 „ „ 5 „ 10 „ Kies	217 260	1,1566
6. 1 „ „ 5 „ 10 „ kalkart. Steinschl.	367 018	1,2068

Im allgemeinen gesagt, bezeichnet die Gleichung (1) eine gewisse Kurve, deren Ordinate dem relativen Druck, ε, gleich ist und deren Abszisse δ^m.

Die Gleichung (1) differenzierend, erhalten wir

$$\frac{d\varepsilon}{d\delta} = m \cdot \alpha \cdot \delta^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bei $m = 1$ wird die Gleichung (1) folgendermaßen aussehen:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \delta, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\,\varepsilon}{d\,\delta} = \alpha = \text{Konst.},$$

d. h. die Kurve wird zu einer geraden Linie, welche das Verhältnis der Deformationen und der entsprechenden Anstrengungen ausdrückt. Solch eine Abhängigkeit besteht bis zu einem gewissen Grade für Eisen und Stahl.

Wenn in der Gleichung (1) der Exponent m größer als 1 ist, so besteht für das zu betrachtende Material kein Verhältnis der Deformationen und der Anstrengungen der wirkenden Kräfte; in solchem Falle bestimmt die Differenz $(m - 1)$ den Abschweifungsgrad von einem ideal-elastischen Körper.

Aus der Gleichung (2) ist zu ersehen, daß je größer die Differenz $(m - 1)$, desto rascher nimmt zu der relative Druck im Vergleich zu den Anstrengungen.

In der folgenden Tabelle 13 sind Probekörper aus diversen Materialien in der Reihenfolge der zunehmenden Stufen des von Bach und Schüle bei Prüfungen ermittelten m geordnet.

Tabelle 13.

	Bestandteile der Probekörper	
1.	Gußeisen	1,0663
2.	Reiner Zementmörtel	1,0900
3.	Kupfer	1,0930
4.	Mörtel: 1 T. Zem., 1,5 T. Sand	1,1098
5.	Granit	1,1204
6.	Beton: 1 T. Zem., 2,5 T. Sand, 5 T. Kies	1,1448
7.	Mörtel: 1 T. Zem., 3 T. Sand	1,1473
8.	Beton: 1 T. Zem., 5 T. Sand, 10 T. Kies	1,1566
9.	Beton: 1 T. Zem., 2,5 T. Sand, 5 T. kalkart. Steinschlag	1,1575
10.	Beton: 1 T. Zem., 3 T. Sand, 6 T. kalkart. Steinschlag	1,1607
11.	Mörtel: 1 T. Zem., 4,5 T. Sand	1,1687
12.	Beton: 1 T. Zem., 5 T. Sand, 10 T. kalkart. Steinschlag	1,2068

Aus angeführten Zahlen der Tabellen 12 und 13 läßt sich folgendes schließen:

1. Der Elastizitätskoeffizient der Zementmörtel ist in bedeutendem Grade von der Sandmenge abhängig. Auf Grund der Tabelle 12 ist die Kurve *ABC*, Abb. 14, konstruiert, deren Abszisse eine relative Sandmenge und deren Ordinate den entsprechenden Elastizitätskoeffizienten beim Druck ausdrücken. Das Diagramm zeigt, daß der Zusatz von Sand den Elastizitätskoeffizienten vergrößert; beim Mörtel, Mischung etwa 1 : 1,5, erhält

der Elastizitätskoeffizient eine größte Bedeutung, und dessen Größe ist höher, als die des Elastizitätskoeffizienten eines reinen Zementmörtels, und zwar um

$$\frac{356\,000 - 250\,000}{250\,000} \times 100 = 42{,}4 \text{ vH.}$$

Mit einer weiteren Vermehrung des Sandgehalts verringert sich der Elastizitätskoeffizient des Mörtels und erhält eine gleiche Bedeutung, wie bei Mörtel aus reinem Zement mit einem relativen Sandgehalt von 1 : 4,20; und

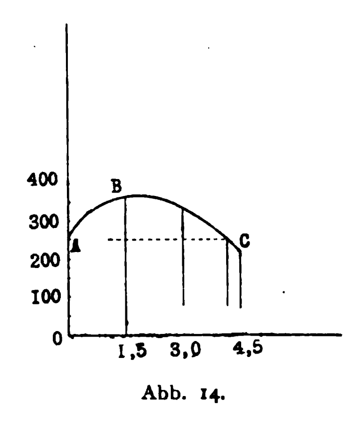


Abb. 14.

2. die Elastizität der Betons hängt in bedeutendem Maßstabe nicht nur vom gegenseitigen Verhältnis der Bestandteile ab, sondern auch von ihrer Art. In dieser Hinsicht ist das vorteilhafteste Material Kies; so z. B. zeigen die Zahlen der Tabelle 13, daß Beton aus 1 Teile Zement, 5 Teilen Sand und 10 Teilen Kies, d. h. mit einem relativen Zementgehalt 1 : 15, über einen gleichen Elastizitätskoeffizienten, wie Beton aus 1 Teile Zement, 2,5 Teilen Sand und 5 Teilen kalkartigem Steinschlag, d. h. bei relativem Zementgehalt 1 : 7,5, verfügt.

Außerdem ergeben die Versuche Bachs, daß der Elastizitätskoeffizient der Mörtel und Betons von der Zementqualität abhängig ist. Bei Prüfungen mit Probekörpern aus abgelagertem Zement waren der volle und nachbleibende Druck bedeutend geringer, als mit Probekörpern aus gleichem, nur nicht abgelagertem Zement, und außerdem war die Zahl der aufeinanderfolgenden Belastungen und Entlastungen zum Erhalten eines beständigen Druckes zweimal größer als im zweiten Falle.

Also: über eine größte Elastizität beim Druck müssen Betons, aus völlig guten, gelagerten Zementen und aus Kies bestehend, verfügen.

Tabelle 14.

Mischungsverhältnis / Dauer in Tagen.	Elastizitätskoeffizient gegen Druck kg pro 1 qcm. Reiner Zement.	Mörtel 1 : 3
50	313 500	366 600
100	353 100	394 700
200	389 900	430 200
300	407 200	450 800
400	417 300	464 800

Nach Maßgabe der Erhärtung der Zementmörtel und der Betons vergrößert sich beim Druck der Elastizitätskoeffizient.

In der Tabelle 14 sind die Ergebnisse der von Hartig[1]) an Mörteln angestellten Versuche angeführt.

2. Elastizitätskoeffizient der Betons gegen Zug.

Zur Zeit ist eine sehr beschränkte Zahl von Versuchsergebnissen betreffs des Elastizitätskoeffizienten gegen Zug vorhanden.

Am wertvollsten erscheinen die im Mechanischen Laboratorium zu Stuttgart[2]) angestellten Versuche. Dieselben wurden an Prismen von 74 cm Länge aus Zement, Sand und Kies (1 : 3; 1 : 4 und 1 : 7) vorgenommen. Die Proben einer jeden Mischung waren in 2 Gruppen zu 6 Prismen, mit 8 vH. und 14 vH. Wassergehalt, geteilt. Aus jeder Gruppe wurden 3 Proben auf Druck und 3 Proben auf Zug geprüft, wobei die Belastung im Laufe von 3 Minuten wirkte; der Termin der Prüfung war 80 bis 90 Tage nach Herstellung der Probekörper.

In den nächstfolgenden Tabellen 15, 16 und 17 sind die Größen der Belastungen, Verlängerungen, des Druckes und der entsprechenden Elastizitätskoeffizienten E angeführt.

Tabelle 15.

	Belastung kg pro 1 qcm.	Mischungsverhältnis des Mörtels: 1 : 3			
		Wassergehalt 8 vH.		Wassergehalt 14 vH.	
		Deformation $\frac{1}{1\,000\,000}$	E kg pro 1 qcm.	Deformation $\frac{1}{1\,000\,000}$	E kg pro 1 qcm.
Druck	61,3	255	240 000	293	209 000
	49,0	198	247 000	227	216 000
	36,8	143	257 000	165	222 000
	30,6	117	261 000	135	227 000
	24,5	92	266 000	104	235 000
	18,3	67	273 000	76	241 000
	16,3	55	278 000	62	246 000
	12,2	43	284 000	48	254 000
	9,2	32	287 000	36	260 000
	6,1	21	290 000	23	265 000
	3,0	10	300 000	11	272 000
	0	—	—	—	—
Zug	1,6	6	267 000	7	230 000
	3,1	13	238 000	15	207 000
	4,6	20	230 000	23	200 000
	6,2	28	221 000	32	194 000
	7,7	38	203 000	44	175 000
	9,2	47	196 000	—	—
Zeitweiliger Widerstand gegen Zug 1 kg pro 1 qcm			12,6	—	10,5

[1]) Le Cément 1896, S. 11.

[2]) Wayss und Freytag, Der Betoneisenbau, S. 54.

Tabelle 16.

Mischungsverhältnis des Mörtels: 1 : 4.					
Belastung		Wassergehalt 8 vH.		Wassergehalt 14 vH.	
		Deformation	E	Deformation	E
kg pro 1 qcm.		$\frac{1}{1\,000\,000}$	kg pro 1 qcm.	$\frac{1}{1\,000\,000}$	kg pro 1 qcm.
Druck	61,3	290	211 000	360	170 000
	49,0	225	218 000	276	177 000
	36,7	163	225 000	198	185 000
	30,6	133	230 000	160	191 000
	24,5	104	235 000	124	198 000
	18,3	76	241 000	90	203 000
	15,3	62	247 000	73	210 000
	12,2	49	250 000	58	215 000
	9,2	36	257 000	42	219 000
	6,1	23	265 000	27	226 000
	3,0	11	273 000	12	250 000
	0	—	—	—	—
Zug	1,6	6	266 000	6	250 000
	3,1	13	240 000	14	221 000
	4,6	21	224 000	22	200 000
	6,2	31	200 000	32	194 000
	7,8	41	190 000	—	—
Zeitweiliger Widerstand gegen Zug 1 kg pro 1 qcm			9,2	—	8,8

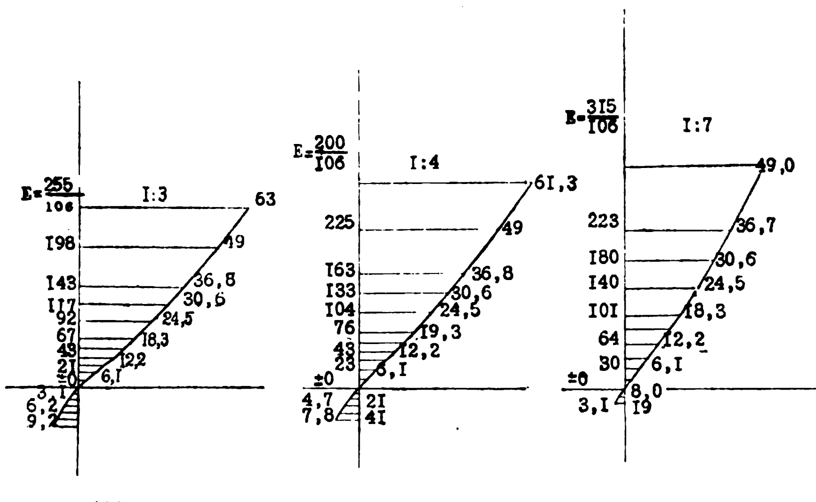


Abb. 15. Abb. 16. Abb. 17.

Tabelle 17.

Mischungsverhältnis des Mörtels: 1 : 7.

	Belastung kg pro 1 qcm.	Wassergehalt 8 vH. Deformation $\frac{1}{1\,000\,000}$	Wassergehalt 8 vH. E kg pro 1 qcm.	Wassergehalt 14 vH. Deformation $\frac{1}{1\,000\,000}$	Wassergehalt 14 vH. E kg pro 1 qcm.
Druck	61,3	415	148 000	—	—
	49,0	315	156 000	—	—
	36,7	223	165 000	—	—
	30,6	180	170 000	351	87 000
	24,5	140	175 000	262	93 000
	18,3	101	181 000	188	97 000
	15,3	83	185 000	153	100 000
	12,2	64	191 000	120	102 000
	9,1	46	199 000	88	104 000
	6,1	30	203 000	58	105 000
	3,0	14	214 000	28	107 000
	0	—	—	—	—
Zug	1,6	8	200 000	13	123 000
	3,1	19	163 000	31	100 000
	3,9	28	140 000	—	—
Zeitweiliger Widerstand gegen Zug 1 kg pro 1 qcm			4,4	—	8,8

Die angegebenen Zahlen zeigen, daß der Elastizitätskoeffizient gegen Zug in den Mörteln und Betons sich gleich dem Elastizitätskoeffizienten gegen Druck verändert und, im allgemeinen gesagt, sich verringert: 1. nach Maßgabe der Magerung der Mörtel und der Betons, 2. mit der Zunahme der Belastungen, und gleichfalls 3. bei Vergrößerung des Wassergehalts.

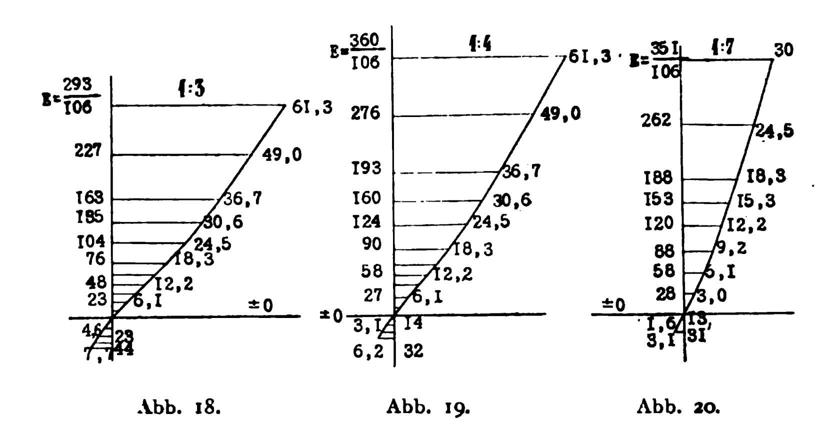


Abb. 18. Abb. 19. Abb. 20.

Die Resultate derselben Versuche sind in den Diagrammen, Abb. 15 bis 20, bildlich dargestellt. Prüfungen des Ingenieur Joly[1]) ergaben, daß bei Probekörpern aus reinem Zement der Elastizitätskoeffizient gegen Zug geringer ist, als bei fetten Mörteln und Betons. Der Prüfung unterlagen prismenförmige Proben von 1,04 m Länge bei einem Querdurchschnitt von $12 \times 16{,}7 = 200{,}4$ qcm; Frist 28 Tage. Die Resultate sind in der Tabelle 18 angeführt.

Tabelle 18.

Nr.	Mischungsverhältnis.	Elastizitäts-koeffizient kg pro 1 qcm.	Zeitweiliger Widerstand gegen Zug kg pro 1 qcm.
1	Reiner Zement	180000	23,8
2	Mörtel: 600 kg Zement pro 1 cbm Sand	210900	9,9
3	Beton: 500 kg Zement pro 1/2 cbm Sand und 1/2 cbm Kies	213400	9,5

Ergebnisse von der Oesterreichischen Kommission[2]) angestellter Prüfungen gegen Zug an Prismen von 25 cm Länge, bei einem Querdurchschnitt 9×9 cm, sind in der Tabelle 19 angegeben; Prüfungszeit 58 Wochen.

Tabelle 19.

Nr.	Mischungsverhältnis.	Elastizitäts-koeffizient kg pro 1 qcm.	Zeitweiliger Widerstand gegen Zug kg pro 1 qcm.
1	Mörtel: 1 T. Zement, 3 T. Sand . . .	359000	24,4
2	" " " . . .	246000	22,4
3	" " " . . .	314000	21,8
4	Beton: 1 T. Zem., 3 T. Sand, 5 T. Kies mit Steinschlag	98000	9,1
5	Beton: 1 T. Zem., 2 T. Sand, 3 T. Kies mit Steinschlag	280000	24,9
6	Beton: 1 T. Zem., 1 T. Sand, 1 T. Kies mit Steinschlag	250000	18,1

[1]) Le Cément 1899, S. 5.
[2]) Bericht des Gewölbe-Ausschusses, S. 41.

3. Festigkeit der Mörtel und Betons.

Die Festigkeit der Steinmaterialien wird mit ihrem Widerstand gegen Druck, Zug und Zerschneiden bestimmt. Die größte Zahl der vorhandenen Versuchsergebnisse bezieht sich auf Prüfungen von Zementmörtel auf Zug und von Betonproben auf Druck. Die Betonprüfungen auf Druck wurden bis jetzt an Probekörpern kleiner Dimensionen (von 7 bis 20 cm) vorgenommen; die Probekörper wurden unter verschiedenen Bedingungen bereitet. Infolgedessen erschienen die erhaltenen Resultate unvergleichlich und konnten keine praktische Bedeutung haben, denn zu kleinen Proben konnte man keinen groben Steinschlag, wie es in der Praxis der Fall ist, verwenden. Die Frage über die Normierung der Prüfungsbedingungen des Betons gegen Druck ist, wie oben angeführt, erst im Laufe der letzten drei Jahre in Deutschland gelöst. Als Größen der Probekörper von Würfelform sind angenommen: an der Seite 30 cm, die Dicke der gestampften Schichten 10 cm, Stampfarbeit für jede Schicht 324 kg/m bei Stampfgewicht von 12 kg und bei Fallen aus einer Höhe von 25 cm.

Die vorhandenen Ergebnisse der Betonprüfungen auf Druck und Zug geben die Möglichkeit, zu beschließen, daß die Druckfestigkeit der Betons 8- bis 12 mal größer ist als die Zugfestigkeit.

In der Frage über die Monolität der Betons erscheint, wie oben erklärt, als die bedeutendste Bedingung, eine möglichst große Festigkeit der Betons bei geringstem Zementgehalt; deswegen muß man als vorteilhafteste annehmen die porösen Betons, bereitet aus fettem Mörtel. Als Beweis dieser theoretischen Auffassungen können folgende Versuchsergebnisse von Baker[1]) dienen.

Der Beton bestand aus Steinschlag, welcher in lockerem Zustande 43,3 vH. Hohlräume und durch Stampfung verdichtet 37,4 vH. aufwies; die Mörtelmenge betrug 33 vH. und 40 vH. vom Volumen des Steinschlags; das Mischungsverhältnis des Mörtels 1 : 2, 1 : 3 und 1 : 4.

In der Tabelle 20 sind die Größen der zeitweiligen Druckfestigkeit der Betonproben bei einjährlicher Frist angeführt.

Tabelle 20.

Bestand des Mörtels. / Bestand des Betons.	Druckfestigkeit kg pro 1 qcm.		
	1 : 2	1 : 3	1 : 4
1 T. Steinschlag, 33 vH. Mörtel	184	132	118
1 T. Steinschlag, 40 vH. Mörtel	197	133	118

[1]) American society of Civil Engineers, Bd. XLII, S. 133.

Diese Zahlen zeigen, daß die Festigkeit des Betons mit 33 vH. Mörtel (1 : 2) $\frac{184}{133} = 1,38$ mal größer ist, als die Festigkeit des Betons mit 40 vH. Mörtel (1 : 3).

Im allgemeinen gesagt, können beste Betons, in bezug auf ihre Festigkeit und ihre Billigkeit, bereitet werden bei Einhalten folgender Bedingungen:

1. die Mischung der trägen Stoffe muß an und für sich eine möglichst dichte Masse, d. h. mit wenigsten Hohlräumen, vorstellen und
2. die gesamte Kornfläche der trägen Bestandteile muß eine geringste sein, was durch die betreffende Waschung des Steinschlags und des Kieses, wie auch durch eine Beseitigung des Ueberschusses der feinsten Sandteilchen befördert wird.

Bezüglich der Scherfestigkeit der Betons sind vergleichsweise wenig Versuchsergebnisse vorhanden. Die am meisten zu vergleichenden Ergebnisse hat Ingenieur Mörsch[1]) erhalten bei Prüfungen der Betonproben verschiedenen Gehalts bei Unterwerfung einer Biegung.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind in der Tabelle 21 angeführt.

Tabelle 21.

Mischungsverhältnis . .	1 : 3		1 : 4		1 : 7	
Wassergehalt	8 vH.	14 vH.	8 vH.	14 vH.	8 vH.	14 vH.
Zeitweilige Widerstandsfähigkeit gegen Abblättern kg pro 1 qcm	36	30	31	28	26	19

Das Mischungsverhältnis der Proben, die Herstellungsbedingungen und Fristen (80—90 Tage) sind dieselben wie für Proben, bezüglich welcher in den Tabellen 15, 16 und 17 Ergebnisse angeführt sind.

Im allgemeinen gesagt, sind die Elastizität und die Festigkeit der Mörtel und Betons abhängig von den Eigenschaften und Verhältnissen der Bestandteile, von den Zeiträumen zwischen dem Herstellungs- und Prüfungsmoment. Deswegen kann in der Praxis die Frage betreffs der mechanischen Eigenschaften des Betons in jedem einzelnen Falle gelöst werden, nur vermittels mechanischer Prüfungen von Proben, welche unter Bedingungen, welche am nächsten zu denjenigen der Praxis stehen, hergestellt sind.

Die Bedingungen für die Massenherstellung und Verwendung des Betons zur Aufführung von Massivbauten sind bedeutend verschieden von den laboratorischen Herstellungsarten der Probekörper. Deswegen ist die Monolität, welche so leicht in laboratorischen Probekörpern erhalten wird,

[1]) Beton u. Eisen 1902, V, S. 11.

in der Praxis in den meisten Fällen abwesend in jenen Betonbauten, bei Aufführung welcher, dem Anschein nach, alle Maßregeln zum Erzielen der erforderlichen Monolität angewendet sind.

Als Ursachen dieser Erscheinung muß man annehmen: 1. die erfolglosen Arten der Betonaufschüttung, welche die erforderliche Monolität der Betonbauten brechen, und 2. die den Grundeigenschaften des Betons nicht entsprechenden Konstruktionsbedingungen.

VI. Einfluß der angewendeten Ausführungsarten des Betonlegens auf die Monolität der Betonbauten.

Die Praxis zeigt, daß in vielen Fällen die ursprüngliche Monolität der Betonbauten allmählich durch das Erscheinen von Vertikal- und Horizontalrissen gebrochen wird. Die Beseitigung der Vertikalrisse wird gewöhnlich



Zeichnung 1.

erzielt durch Einrichten von künstlichen Schnitten, welche die Grenzen der Monolität der Betonbauten bezeichnen. Falls in Wirklichkeit auch nicht immer das Erscheinen von Horizontalrissen beobachtet wird, so zeigt sich bei der Monolitätbrechung der Betonmassive jedenfalls ein Streben des Betons zum Abblättern.

Die vorgenommenen Versuche einer Beschießung der Betonbauten zeigten, daß die, sogar bei einer Bedingung von ununterbrochener Arbeit, aufgeführten Betonmassive sich längs den Arbeitsschichten abblättern und abgespaltene und verschobene Stücke, oben und unten von parallelen, die

Arbeitsschichten betreffenden Flächen begrenzt, ergaben. Auf den beigelegten Zeichnungen 1, 2, 3 und 4 sind typische Fälle der Zerstörung von Betontraversen und Betonbrustwehrmauern, welche durch Beschießung einer der Batterien erhalten sind, dargestellt.

Die Zeichnung 1 stellt dar eine Zerstörung, welche in der Seitenwand



Zeichnung 2.



Zeichnung 3.

der von oben mit Erde umstreuten Betontraverse durch Treffen von zwei 6zölligen Geschossen hervorgerufen ist. Außer Spaltungen und Verschiebungen von Betonstücken wurden in der Richtung der gesenkten Arbeitsschichten Risse erhalten. Auf der Zeichnung 2 ist dargestellt die entgegengesetzte Seite derselben Traverse, welche den unmittelbaren

Schlägen nicht ausgesetzt war; die sichtbaren Senkrisse längs den Arbeitsschichten erschienen nur infolge einer Erschütterung durch die Schläge der Geschosse in die entgegengesetzte Wand der Traverse. Die Zeichnungen 3 und 4 stellen dar Zerstörungen, welche in Betonbrustwehrmauern erhalten wurden.

Der erste Beschießungsversuch im Jahre 1900 wurde nach Verlauf eines Monats nach der Aufführung der Batterie vorgenommen; die auf angeführten Zeichnungen dargestellten Zerstörungen zeigen aber Resultate der Beschießung derselben Batterie nach Verlauf von 1, 2 und 3 Jahren nach Aufführung derselben.

Die ersten Schläge und Erschütterungen der Geschoßwirkung auf den noch nicht erhärteten Beton konnten natürlich bis zu einem gewissen Grade



Zeichnung 4.

die nicht völlig erhärtete Aufmauerung beunruhigen, infolgedessen der Beton bei den nächsten Versuchen, welche nach 1, 2 und 3 Jahren vorgenommen wurden, nicht jenen Widerstand leisten konnte, welcher bei Normalbedingungen der Erhärtung in jährlichen Fristen sein konnte.

Jedenfalls drücken die angeführten Beschießungsresultate deutlich ein Streben des Betons zur Abblätterung längs den Arbeitsschichten aus.

Zu gleichem Beschluß führen die Ergebnisse des Beschießens der Betonbauten, bei anderen Bedingungen im Zeitraum von 1889 bis 1894 vorgenommen. Die Betonmassive wurden teilweise ununterbrochen aufgeführt, wobei alle Maßregeln getroffen wurden, um ein gleichartiges Monolith zu erhalten. Aber in allen Fällen wurde nach Treffen von einigen Geschossen (von 2- 4) ein sichtbares Abblättern, Spaltungen von Betonstücken und Verschiebungen längs den horizontalen Arbeitsschichten beobachtet.

Dieses beweist, daß die angenommenen Arten der Aufführung von Betonbauten die Gleichartigkeit des Betons in mechanischer Hinsicht stören, das Eintreten eines geringsten Widerstandes längs den Berührungsflächen der Arbeitsschichten befördernd.

Die theoretische Erläuterung bringt zu folgenden Beschlüssen.

Alle jetzt angewendeten Aufführungsarten des Betonlegens werden zu einer Verdichtung vermittels Einstampfens der Betonschichten von bestimmter Dicke hingeführt. Versuche und die Praxis zeigen deutliche Beweise, daß die Qualitäten des Betons in bedeutendem Grade nicht nur von den Qualitäten und dem gegenseitigen Verhältnis der Bestandteile des Betons abhängen, sondern auch von: 1. der Stampfarbeit, eine Volumen- oder Gewichtseinheit des Betons betreffend, 2. der Dicke der Schichten, 3. dem Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schichten und 4. dem Wassergehalt im Beton.

Der Einfluß der Stampfarbeit auf die Eigenschaften und Qualitäten der Mörtel und Betons ist auf laboratorischem Wege in den Artikeln von J. Maljuga: „Bestand und Herstellungsart des Zementmörtels und des Betons“[30]) erläutert, deswegen wird diese Frage in der weiteren Betrachtung nur von praktischer Seite und hauptsächlich in bezug auf den Einfluß des Stampfens auf die Monolität der Betonbauten erklärt werden.

In der Praxis wird die Aufführung von Betonbauten in horizontalen Schichten oder in Schichten mit einer Neigung von $^1/_6$ bis $^1/_{10}$ gemacht, wobei zwischen den zwei aufeinanderfolgenden Schichten unbedingt eine gewisse Unterbrechung der Arbeit stattfindet.

Deswegen ist es natürlich, daß die Monolität in ihrer Bedeutung einer Gleichartigkeit des Gemenges und Gleichheit der mechanischen Eigenschaften der ganzen Betonmasse nur bei folgenden Bedingungen zu erhalten ist: 1. bei einer gänzlichen Gleichartigkeit und Beständigkeit des Gemenges und der mechanischen Eigenschaften in der Masse einer jeden einzelnen Betonschicht und 2. bei Vorhandensein zwischen den Schichten eines Gebindes, völlig gleichartig mit jenem Gebinde der Bestandteile des Betons, welches die Monolität einer jeden Schicht bestimmt.

Einfluß des Stampfens auf die Gleichartigkeit der einzelnen Schichten beim Betonlegen.

Laboratorische Versuche von Gary[31]) zeigten, daß Proben von 10 × 10 × 10 ccm, durch einmalige Formenfüllung hergestellt, eine ungleiche Dichte in den oberen und unteren Teilen haben. So z. B. wurde bei

[30]) Ingen.-Journal 1895, Nr. 3, 4, 5 u. 9; 1897, Nr. 10.

[31]) Mitteilungen aus den Königl. Techn. Versuchsanstalten zu Berlin 1898, S. 54.

Proben aus reinem Zement und Mörtel mit Normalsand 1 : 3 folgende Dichte der oberen und unteren Hälften der Probe erhalten.

Tabelle 21. Dichte der Probekörper.

Nr. der Proben.	Reiner Zement.		Mörtel 1 : 3.	
	Oben.	Unten.	Oben.	Unten.
1.	2,077	1,815	2,094	2,063
2.	2,014	1,828	2,091	2,088
3.	2,004	1,943	2,078	2,066
4.	2,000	1,886	2,125	2,101
5.	2,002	1,841	2,125	2,069
6.	2,001	1,823	2,111	2,086
7.	2,046	1,834	2,141	2,109
8.	2,029	1,920	2,133	2,118
Durchschnittlich	2,022	1,861	2,112	2,087

Also bei vergleichweise geringen Dimensionen der Proben sind die oberen Hälften dichter als die unteren:

a) für Proben aus reinem Zement:

$$\frac{2{,}022 - 1{,}861}{1{,}861} \times 100 = 8{,}6 \text{ vH.};$$

b) für Proben aus Mörtel 1 : 3:

$$\frac{2{,}112 - 2{,}087}{2{,}087} \times 100 = 1{,}2 \text{ vH.}$$

In ersterem Falle wurde die Dichtung der Proben durch Schläge mit einem schweren Spatel, im zweiten mit einer Schlagmaschine hervorgebracht. Eine Verringerung der Dichtigkeit in der untern Hälfte zieht nach sich eine entsprechende Verringerung der mechanischen Eigenschaften; deswegen beginnt, auf Grund derselben Versuchsergebnisse von Gary, die Zerstörung bei der Prüfung auf Druck immer in jenem Teil, welcher bei der Probenfüllung nach unten gerichtet war, d. h. sich mit dem Boden der Form berührte. Ebenso zeigten auch Versuche von Considère,[32]) angestellt an Prismen von 60 cm Länge, 6 × 6 qcm Querdurchschnitt aus Mörtel (433 kg Zement pro 1 cbm guten Quarzsand), daß, bei aller Genauigkeit bei der Herstellung solcher Probekörper, der Elastizitätskoeffizient des oberen Teiles 60 vH. größer war, als der Elastizitätskoeffizient des unteren, den Boden der Form berührenden Teiles.

In der Praxis schwankt die Dicke der zu verdichtenden Betonschichten allgemein von 15 cm bis 25 cm; deswegen verteilt sich

[32]) W. Tjurin, „Die Bedeutung des Metalls bei Betonbauten"; Ing.-Journal 1900, Nr. 5, S. 805.

jeder Schlag der Stampfe (Abb. 21) auf einer gewissen Fläche cd des Schichtengrundes, wobei cd größer ist als die Fläche ab, welche unmittelbar den Stampfschlag empfängt. Infolgedessen wird der Druck auf die Einheit der Fläche cd kleiner sein, als der Druck, der auf die Flächeneinheit ab kommt.

Zulassend, daß die Grundfläche ein Quadrat bildet, dessen Seite $= ab$, so wird das Verhältnis zwischen der Fläche ab, welche dem unmittelbaren Druck der Stampfe ausgesetzt ist, und der Schichtgrundfläche cd, auf welche der Druck vom Schlage der Stampfe übertragen wird, sich durch $\frac{ab^2}{cd^2}$ ausdrücken.

Annehmend, daß beim ersten Schlage der Stampfe der Winkel der

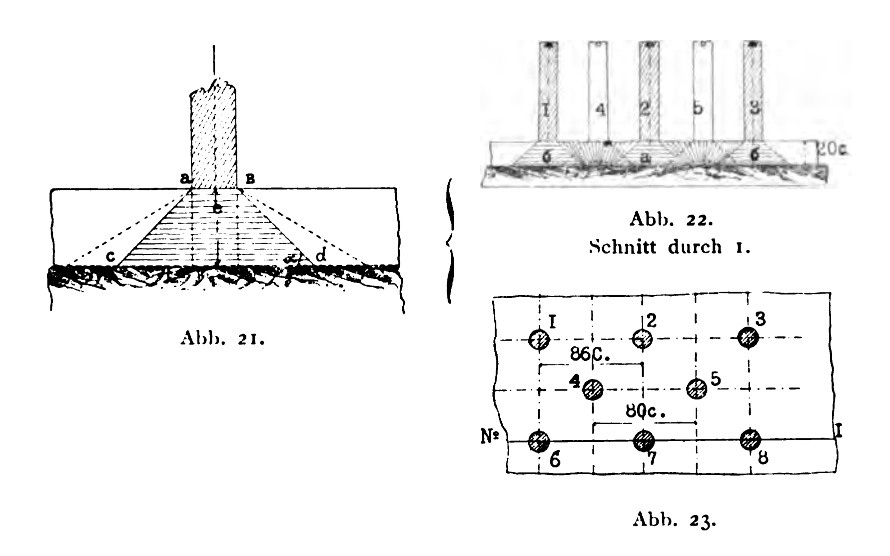


Abb. 21.

Abb. 22.
Schnitt durch I.

Abb. 23.

natürlichen schiefen Ebene in der trockenen Masse des Betons wird gleich sein α, so ergibt sich bei einer Dicke der Schicht $= e$:

$$cd = ab + 2 \cdot e \cdot \operatorname{cotg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Deshalb wird sich das vorhergehende Verhältnis ausdrücken:

$$\frac{ab^2}{cd^2} = \frac{ab^2}{(ab + 2 \cdot e \cdot \operatorname{cotg} \alpha)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Wenn $ab = 5$ Zoll, die Dicke der Schicht $e = 5$ Zoll und der natürliche Winkel der schiefen Ebene $\alpha = 45^\circ$, so erhalten wir:

$$\frac{ab^2}{cd^2} = \frac{25}{(5 + 2 \cdot 5)^2} = {}^1/_9.$$

Folglich wird der Druck auf die Einheit der Fläche cd $^1/_9$ des Druckes, welcher auf die Einheit der Fäche ab kommt, ausmachen. Nach Maßgabe der Verdichtung des Betons wird sich auch die Reibung seiner Teilchen vergrößern, deswegen wird sich die Sphäre der Verteilung des

Druckes der Stampfe erweitern, und folglich muß sich die Größe des Winkels α verkleinern.

Aus der Gleichung (2) ist zu ersehen, daß mit Verkleinerung des Winkels α sich auch der Druck, welcher auf die Flächeneinheit des Grundes der Schicht kommt, verringert. Die Dicke der Schicht e ist bestrebt nach einer gewissen endlichen Größe in Abhängigkeit von dem Grade der Betondichtung. Deswegen, allgemein gesagt, wird in der Gleichung (2) die Proportion $\frac{ab^2}{cd^2}$ eine geringste Bedeutung erhalten bei $\alpha = 0$, was der Dichtungsbedingung der Schicht bis zu einem absoluten festen Körper, welcher die Fähigkeit besitzt, den Druck der Stampfe auf die ganze Grundfläche der Schicht von unendlicher Länge zu übertragen, entspricht.

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, daß bei $\alpha = 90^\circ$ das Verhältnis die größte Bedeutung, $\frac{ab^2}{cd^2} = 1$, erhält.

Deswegen wird auch der Druck auf die Einheit der Schichtgrundfläche gleich sein dem Druck auf die Flächeneinheit ihrer äußeren Oberfläche. Einen gleichen Fall zeigt die laboratorische Dichtungsart der Probekörper durch Aufsatzbalken, dessen Grundfläche genau dem Querdurchschnitt der Probe entspricht. Aber in Wirklichkeit, wie die Zahlen der Tabelle 21 zeigen, ist sogar bei solchen Bedingungen die Dichte der Proben im untern Teile immer geringer, als die Dichte an der Fläche, welche die Schläge der Stampfe entgegennimmt. Diese Erscheinung wird erklärt: 1. durch das Eintreten einer gewissen Reibung bei dem Gleiten des zu verdichtenden Mörtels an den Wänden der Form und 2. durch das Verschlingen einer gewissen lebendigen Kraft des Schlages der Stampfe durch den elastischen Widerstand der Probekörpermasse.

In der Praxis haben diese Bedingungen noch einen größeren Einfluß auf die Dichtigkeitsänderung der Arbeitsschichten. Nach Maßgabe der Dichtung der Schicht vergrößert sich die Reibung der Betonteilchen; deswegen wird bei Eintreiben der Betonmasse $abcd$, Abb. 21, welche durch Schläge der Stampfe verdichtet wird, die Reibungskraft an den Seitenflächen ac und bd, welche die Wirkungen der Stampfe begrenzen, sich vergrößern.

Infolgedessen zieht auch eine allmähliche Vergrößerung dieser Sphäre $abcd$ nach sich eine Vergrößerung jener Betonmasse, welche einen elastischen Widerstand der Stampfkraft leisten wird.

Deswegen muß auch in jedem einzelnen Falle in Abhängigkeit von der Stampfarbeit, der Dicke der Schicht, des Betongewichts, der Art und des gegenseitigen Verhältnisses seiner Bestandteile eine Grenze für die nutzvolle Stampfarbeit bestehen, nachdem diese Arbeit teilweise von dem elastischen Widerstand der verdichteten Betonmasse verschlungen wird, teilweise für eine lokale Dichtung oder für das Zerschlagen des Steinschlags

an der Oberfläche der Schicht verausgabt wird, ohne aber eine weitere Dichtung des unteren Teiles der Schicht zu fördern.

Beim Stampfen der Schichten durch mehrere Arbeiter, die, wie in Abb. 22 und 23 gezeigt ist, aufgestellt sind, können die Stampfen 4 und 5 eine verhältnismäßig geringe nutzvolle Wirkung ausüben, da zwischen den zwei verdichteten Betonmassen (*a* und *b*) ein Verkeilen des Steinschlags entstehen wird, infolgedessen der Druck sich überhaupt nicht mehr auf die Grundfläche der Schicht zwischen den Massen (*a* und *b*), Abb. 22, übertragen kann.

Unter solchen Bedingungen werden die verkeilten Steinschlagstücke, welche in diesem Falle das Widerlager des Gewölbes bilden werden, die verdichteten Massen (*a* und *b*) auseinandertreiben, wodurch bei verstärktem Stampfen ein Ausbauchen der umgebenden Betonmasse entstehen kann.

Diese allgemeinen Auffassungen zeigen: 1. daß es in Wirklichkeit nicht möglich ist, eine ganze Gleichartigkeit der ganzen Betonmasse in der gestampften Schicht zu erzielen; 2. die größte Dichte des Betons muß am oberen Teil der Schicht, welche unmittelbar die Schläge der Stampfen aufnimmt, zu erhalten sein; 3. nach Maßgabe der Vertiefung in die Schicht muß sich die Dichte des Betons verringern; 4. je höher die Reibungskraft der festen Bestandteile des Betons ist, auf eine desto größere Grundfläche der Schicht wird sich die Schlagwirkung der Stampfen verteilen, was eine entsprechende Verringerung der Dichte im untern Teil der Schicht zur Folge haben wird.

Die Beweglichkeit der Bestandteile in rohem, unerhärtetem Beton wird bestimmt durch die Größen, Form und Zustand der Oberflächen der steinartigen Bestandteile des Betons und durch den Wassergehalt im Mörtel. In dieser Hinsicht verfügen Betons aus Kies mit bedeutendem Wassergehalt über eine größte Beweglichkeit der Teilchen; ebenso verdichten sich sogenannte „plastische" Betons, d. h. solche, welche einen gewissen Ueberfluß an Wasser zeigen, bei einer geringeren Stampfarbeit und verfügen über eine mehr gleichartige Dichte als „trockene" Betons, d. h. welche keinen Ueberfluß an Wasser haben.

So z. B. zeigten umfangreiche Prüfungen, die an normalen deutschen Probekörpern in den Jahren 1902 bis 1903[33]) angestellt wurden, daß Betons, welche 50 vH. mehr Wasser als „trockene" Betons hatten, bei einer zweimal größeren Dicke der Schichten nur $^2/_3$ jener Stampfarbeit, welche notwendig war, um für „trockene" Betons dieselbe Dauerhaftigkeit zu erlangen, erforderten.

Anderseits befördert ein Ueberfluß an Wasser, außer der Vergrößerung der Porosität der Betons und der Verlangsamung des Abbindens und der

[33]) Bericht über die Hauptversammlung des Deutschen Betonvereins 1903, S. 65.

Erhärtung, die Störung der Gleichartigkeit des Zementmörtels in der Dicke einer jeden zu stampfenden Schicht, wie in quantitativem, so auch in qualitativem Verhältnis.

Die lockere Betonmasse enthält eine bedeutende Luftmenge in den Hohlräumen der Bestandteile des Betons. Nach Maßgabe der Dichtung des Betons werden sich diese Zwischenräume in den festen Bestandteilen so weit verringern, daß ein Auspressen des Wassers beginnt, welch letzteres einen freien Ausgang durch die ganze Dicke der höher liegenden Betonmasse, welche somit die Bedeutung eines Filters hat, erhält. Das Wasser, welches an die Oberfläche der zu stampfenden Schicht tritt, wird enthalten: 1. in gewogenem Zustande die feinsten Zementteilchen und die feinsten Teilchen der fremden Körper des Sandes und Steinschlags (Schlamm und Ton), und 2. in der Lösung Bestandteile des Zements in Abhängigkeit von dem Grade ihrer Auflösbarkeit.

In dieser Hinsicht zeigten die Versuche Candlots,[31]) daß die Auflösbarkeit der Zementbestandteile im Wasser nicht gleich ist. Fünf Gramm verschiedener Zemente unterlagen einer Wirkung von 200 ccm Wasser im Laufe von 24 Stunden, nachdem 100 ccm Wasser durch frisches Wasser ersetzt wurden. Analysen der Zemente nach dem Wasserwechsel sind hier in der Tabelle 22 angeführt.

Tabelle 22.

Analysen.	Vor der Prüfung.			Nach der Prüfung.		
Bestandteile. \ Zemente.	*A*	*B*	Durchschnitt.	*A*	*B*	Durchschnitt.
Kieselerde	22,25	22,10	22,17	22,10	22,60	22,35
Tonerde	7,55	7,15	7,35	6,85	6,90	6,87
Eisenoxyd	2,35	2,40	2,37	2,30	2,30	2,30
Kalk	65,87	65,95	65,91	30,20	35,50	32,85
Magnesia	0,78	0,85	0,81	0,80	0,80	0,80
Anhydrit von Schwefelsäure	0,42	0,48	0,45	0,37	0,30	0,33
Verlust beim Durchstechen und übrige Bestandteile	0,78	0,93	0,93	37,38	31,60	34,49

Die Zahlen der 3. und 6. Kolonne der Tabelle zeigen, daß eine größte relative Auflösbarkeit im Wasser Kalk besitzt; nachdem folgen in fallenden Stufen: Tonerde, schwefelsaure Salze, Eisenoxyd, Magnesia und

[31]) Candlot, Ciments et Chaux Hydrauliques, S. 342.

endlich Kieselerde. Deswegen, im allgemeinen gesagt, muß der Mörtel, welcher auf die Oberfläche der zu stampfenden Betonschicht hervortritt, eine chemisch verschiedene Zusammensetzung haben, als der normale Zementmörtel.

Die weitere Betrachtung dieser Frage über den gemeinschaftlichen Einfluß des Stampfens und des Ueberflusses an Wasser führt zu folgenden Beschlüssen.

Der obere Teil der Betonschicht, welcher einem unmittelbaren Schlage der Stampfen ausgesetzt ist, verdichtet schneller, als die untenliegende Betonmasse; deswegen verstärkt sich auch in gleichem Maße die filtrierende Wirkung des oberen Teiles der Schicht. Infolgedessen verringert sich im herausgepreßten Ueberfluß des Wassers die Quantität der gewogenen festen Teilchen nach Maßgabe des Stampfens, und die Quantität der aufgelösten Bestandteile des Zements erscheint als überwiegend.

Im ersten Moment nach Beendigung des Stampfens der Schichten werden alle Zwischenräume in den festen Bestandteilen des Betons mit Wasser oder Luft gefüllt sein; deswegen erscheint ein großer Widerstand der Rückbewegung des ausgepreßten Wasserüberflusses ins Innere der Schicht. Aber anderseits verringert ein bedeutender Wassergehalt im Beton eine Reibung seiner festen Bestandteile; deswegen beginnt im verdichteten Beton, nach Beendigung des Stampfens, eine gewisse Versetzung der steinähnlichen Bestandteile, was eine Volumenvergrößerung (Auftreiben) des Betons hervorrüft, welch letzteres ein Aufsaugen des ausgepreßten Wasserüberflusses in dem Beton zur Folge hat.

Die Praxis zeigt, daß alles Wasser, welches auf die Oberfläche der gestampften Schicht getreten ist, 5 bis 10 Minuten nach Beendigung des Stampfens verschwindet.

Bei so einer Rückbewegung des Wassers bildet die obere, mehr verdichtete Schicht zum zweiten Male einen Filter; deswegen setzen sich alle aufgelösten Teilchen, die mit dem Wasser ausgeführt worden sind, an der Oberfläche der Schicht in Form einer dünnen Haut, welche ein mehr vollkommenes Filtrieren des aufzusaugenden Wassers fördert.

In diesem Falle unterliegt der Zement, welcher eine äußere Haut bildet, einer neuen Waschung und einer Auslaugung.

Bei Rückbewegung des ausgedrückten Wassers werden die in demselben aufgelösten Bestandteile des Zements eine wirksame Beteiligung am begonnenen Erhärtungsprozeß haben. Deswegen wird sich die Menge der im Wasser aufgelösten Bestandteile des Zements, nach Maßgabe eines Eindringens des ausgepreßten Wasserüberflusses in das Innere der Betonschicht, verringern. In dieser Hinsicht sind folgende Versuche Fêrets[35]) interessant. Nach einem Durchschütteln des Zements mit vierfacher (nach Gewicht)

[35]) Durand-Clay et Fêret, Chimie appliquée, S. 329.

Wasserquantität in geschlossenen Flacons wurden Analysen des Wassers angestellt, welche ergaben, daß nach Verlauf von nicht mehr als einer halben Stunde die ganze Tonerde aus dem Mörtel verschwand, nachdem folgten die schwefelsauren Salze; aber Kalk und Alkalien blieben länger im Mörtel als alle übrigen Bestandteile des Zements.

Also beim Stampfen von Betons, in welchen Überfluß an Wasser vorhanden ist, sind alle Bedingungen zum Erhalten einer ungleichmäßigen Verteilung des Mörtels in jeder Arbeitsschicht und zur Störung der Gleichartigkeit des Zementmörtels vorhanden.

So z. B. wird (Abb. 24) die Oberfläche einer jeden gestampften Schicht mit einer Kruste bedeckt sein (*a*), welche aus den feinen, mit dem Ueberfluß herausgebrachten Teilchen, d. h. Tonerde, Schlamm (wenn solche im Sand oder Steinschlag vorhanden waren) und Zement, bei Rückbewegung des Wassers der Auslaugung unterlegen, besteht.

Der folgende obere, meist dichte Teil (I) der Betonschicht war der größten Wirkung des ganzen ausgepreßten Wassers ausgesetzt und nachdem,

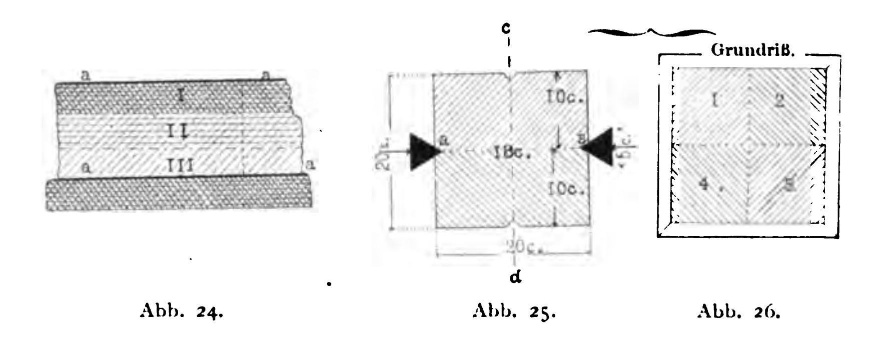


Abb. 24. Abb. 25. Abb. 26.

bei der Rückbewegung, einer zweiten Wirkung desselben Wassers, welches im Mörtel alle aufgelösten Bestandteile des Zements enthielt.

Also nach Maßgabe des Aufsaugens des ausgedrückten Wassers erscheint eine Wiederherstellung des früheren Zementgemenges in dem oberen Teil der Schicht für möglich, aber bei weiterem Eindringen in das Innere der Schicht verändert sich das gegenseitige Verhältnis der aufgelösten Stoffe sehr stark: Tonerde und nachdem die schwefelsauren Salze schwinden aus dem Mörtel, und es bleiben in demselben nur Kalk und Alkalien.

Im unteren Teil der Schicht (III), welche einer auslaugenden Wirkung des Wasserüberflusses nicht unterlag, bleibt das Zementgemenge normal.

Hieraus folgt, daß bei aufeinanderfolgenden Schichtungen des Betons sich zwischen den angrenzenden Schichten Zwischenschichten, welche aus ausgelaugtem Zement, Tonerde und anderen feinen Teilchen bestehen, bilden werden. Alle Unebenheiten der steinähnlichen Bestandteile des Betons in den gestampften Oberflächen einer jeden Schicht ausfüllend, verringern

diese Zwischenschichten die Berührungsflächen der angrenzenden Schichten und verringern gleichfalls das Gebinde der Arbeitsschichten.

Zur Bestimmung der chemischen Bestandteile des Mörtels, welcher an die Oberfläche der Arbeitsschichten beim Betonstampfen heraustritt, wurden Proben von einem Bau in Kronstadt genommen. Das Sammeln von Proben wurde vermittels eines flachen Schwammes, welcher das ganze an die Oberfläche der gestampften Schichten hervorgetretene Wasser aufsaugte, veranstaltet. Die Zahlen einer jeden Kolonne der Tabelle 23 beziehen sich auf eine Mischung aus 10 Proben, welche von ein und derselben Arbeitsschicht genommen wurden.[36])

Die Proben 1, 2 und 3 sind von Beton folgenden Gehalts:

1 T. Zement, 3 T. Sand und 7 T. granitartiger Steinschlag; in den Proben 4 und 5 bestand der Beton aus 1 T. Zement, 2 T. Sand und 4 T. gleichartigem Steinschlag.

Die chemische Zusammensetzung des Zements war folgende:

Flüchtige Stoffe	3,92	
Kieselerde	19,33	
Tonerde	6,45	9,30
Eisenoxyd	2,85	
Kalk	62,07	
Magnesia	3,—	
Anhydrit von Schwefelsäure	0,97	
Alkalien	1,41.	

Sand wurde verwendet: feinkörnig, Meersand, Feldspatsand. Bei Klärung durch den Apparat von Schöne wurde der Tongehalt (bei einer Schnelligkeit 0,18 mm in der Sekunde) bestimmt mit 0,34 vH. bis 0,21 vH. Nach dem Aufkochen im Laufe von 1 Stunde mit 10prozentiger Salzsäurelösung und nachdem im Laufe von 15 Minuten mit einer 15prozentigen Sodalösung wurden die Sandproben ausgewaschen und gebrannt; dabei ergab sich ein Gewichtsverlust im Sande von 1,09 vH. bis 1,11 vH. Der granitartige Steinschlag war durch Maschinen in Stücke von 2,5 Zoll (höchste Dimension) verkleinert. Das Waschen wurde in besonderen Wagonetten sorgfältig vorgenommen. Die Dicke der Arbeitsschichten nach dem Stampfen war 5 Zoll; die Stampfarbeit, bei einem Durchschnittsgewicht der Stampfer von 25 Pfund, bestimmte sich mit etwa 20 Pud-Fußen pro 1 Pud Beton (27000 Pud-Fuße pro 1 q-Faden). Die Wassermenge wurde während der Arbeit in Abhängigkeit von der Feuchtigkeit des Sandes und dem Witterungszustand so viel verändert, damit bei angeführter Stampfarbeit die Oberfläche der Schicht sich mit der austretenden „Milch" bedecke. Die Analysen der Proben sind in der Tabelle 23 angeführt.

[36]) Analysen der Proben sind von Prof. A. Baikow angestellt.

Tabelle 23.

Bestand des Betons	1 : 3 : 7			1 : 2 : 4	
Nr. der Proben	1	2	3	4	5
Gewicht der getrockn. Probe g	28	100	65	85	82
Bestand.					
Flüchtige Stoffe	16,58	8,90	10,62	12,77	14,82
Kieselerde, lösbare	2,96	2,45	2,38	4,01	4,20
Tonerde und Eisenoxyd . . .	7,67	6,58	8,61	12,09	11,94
Kalk	24,30	24,42	28,54	38,10	38,08
Magnesia	1,34	1,41	1,35	1,85	1,93
Anhydrit von Schwefelsäure .	1,47	0,70	0,75	0,76	1,34
Alkalien (nach Verschiedenen) .	0,83	0,72	1,07	1,03	0,92
Sand	44,85	54,82	46,68	29,39	26,77

Wenn man den Sand, dessen Quantität in Abhängigkeit von der Saugkraft des Schwammes, der Korngröße des Sandes usw. in den Proben eine ganz zufällige war, ausschließt, so wird sich das gegenseitige Verhältnis der aktiven Teile in der „Milch“ wie in der folgenden Tabelle 24 ausdrücken.

Tabelle 24.

Bestand des Betons	1 : 3 : 7			1 : 2 : 4		Durchschnitt d. 5 Proben	Bestand des Zements
Nr. der Proben	1	2	3	4	5		
Gewicht der getrockn. Probe	15,44	45,18	34,66	60,2	60,6		
Flüchtige Stoffe	30,06	19,70	19,90	18,08	20,23	21,59	3,92
Kieselerde, lösbare	5,37	5,42	4,46	5,68	5,74	5,33	19,33
Tonerde und Eisenoxyd . .	13,91	14,56	16,14	17,12	16,30	15,61	9,30
Kalk	44,06	54,05	53,53	53,96	52,00	51,52	62,07
Magnesia	2,43	3,12	2,53	2,62	2,64	2,67	3,00
Anhydrit von Schwefelsäure .	2,67	1,55	1,41	1,07	1,82	1,70	0,97
Alkalien	1,50	1,60	2,03	1,47	1,26	1,57	1,41

Aus den zwei letzten Kolonnen der Tabelle 24 ersieht sich, daß der Bestand der „Milch“ bedeutend verschieden vom Bestand des verwendeten Zements ist. Eine größte Veränderung stellt das gegenseitige Verhältnis von dem Kieselerde- und Tonerdegehalt mit Eisen.

Im allgemeinen schwankt das Verhältnis der Quantitäten der Kieselerde und Tonerde in Portland-Zementen in sehr schmalen Grenzen. So z. B. nach den Ergebnissen von Michaelis[37]) verändern sich die zugelassenen

[37]) Sutcliffe, Concrete, its nature and uses, S. 50.

Schwankungen des Gehalts an Kieselerde von 19 vH. bis 25 vH. (durchschnittlich 22 vH.) und für Tonerde von 4 vH. bis 9 vH. (durchschnittlich 6,5 vH.). Laut den Ergebnissen der Analysen von Candlot[38], angestellt an 45 Zementen aus verschiedenen Gegenden, werden die äußersten Grenzen bestimmt:

				Durchschnitt
für Kieselerde	von	20,30 vH.	bis 26,10 vH.	23,20 vH.
„ Tonerde	„	5,20 „	- 10,60 „	7,90 „
„ Eisenoxyd	„	2,10 „	„ 5,30 „	3,30 „
„ Kalk	„	58,10 „	„ 67,31 „	62,71 „
„ Magnesia	„	0,33 „	„ 2,30 „	1,33 „
„ Anhydrit von Schwefelsäure	„	0,26 „	„ 1,78 „	1,02 „
„ Alkalien	„	0,00 „	„ 0,62 „	0,31 „

Abschweifungen vom Normalbestand verändern die Eigenschaften des Zements.

In dieser Hinsicht erscheinen nach Versuchen von Le Chatelier[39]) als Hauptbestandteile des Portland-Zements:

1. 3fach Calciumsilikat $SiO_2\,3\,CaO$, welches bei gegenseitiger Wirkung mit dem Wasser nach der Formel:

$$SiO_2\,3\,CaO + 4{,}5\,H_2O = SiO_2\,CaO\,2{,}5\,H_2O + 2\,Ca\,(HO)_2 \quad . \quad (I)$$

das Erhärten des Zements bedingt, und

2. 3fach Calciumalluminat $Al_2O_3\,3\,CaO$, welches die Schnelligkeit des Abbindens des Zements bestimmt.

Bei Anmachen des Zements mit Wasser kann 3fach Calciumalluminat in eine der folgenden Verbindungen treten:

a) $Al_2O_3\,3\,CaO + Ca\,(HO)_2 + 11\,H_2O = Al_2O_3\,4\,CaO\,12\,H_2O. \quad (II)$

Diese Reaktion (II) beschleunigt die Reaktion (I), das Calciumhydroxyd verschlingend, welches bei einer Grundreaktion des Zerfallens des 3fach Calciumsilikats abgeteilt wird. Also je mehr im Zement Tonerde vorhanden, desto schneller geht das Abbinden und die Erhärtung vor.

b) Nach der Meinung Le Chateliers hydratisiert sich das 3fach Calciumsilikat unmittelbar bei einer Berührung mit Wasser, ebenso wie Gips:

$$Al_2O_3\,3\,CaO + Ag = Al_2O_3\,3\,CaO\,12\,H_2O.$$

c) Nach Versuchen von Candlot, Michaelis und Devalle[40]) ist eine Verbindung Al_2O_3 mit $CaSO_4$ möglich:

$$Al_2O_3\,CaO\,.\,3\,CaSO_4\,28{,}5\,H_2O,$$

welches sich mit einer sehr bedeutenden Volumenvergrößerung kristallisiert,

---

[38]) Candlot, Ciments et chaux hydrauliques, S. 94 und 95.

[39]) Durand-Clay et Fêret, Chimie appliquée, S. 338.

[40]) A. R. Schuljatschenko: „Der Einfluß des Meerwassers auf Zemente"; Cement 1902, Seite 20.

wodurch in der erhärtenden Masse schädliche Anstrengungen und sogar Risse eintreten können. Auf Grund dieses schlägt Le Chatelier vor, bei Meeresbauten Zemente mit mehr als 4 vH. Tonerdegehalt nicht zu verwenden.

Bezüglich des Einflusses auf die Schnelligkeit des Abbindens und Erhärtens meint Candlot, daß Zemente mit einem Tonerdegehalt von 4 vH. bis 12 vH. als schnellbindende gelten, und das Abbinden ist desto schneller, je höher der Tonerdegehalt.

Nach Erforschungen Geyers[41]) wird die Schnelligkeit des Abbindens der Zemente durch die Proportion $\frac{Si\,O_2}{Al_2\,O_3 + Fe_3\,O_3} = n$ bestimmt.

Falls n in den Grenzen von 3 bis 2,5 steht, so bindet der Zement langsam ab; bei $n = 2{,}3$ dauert das Abbinden 20 Minuten, bei $n = 2{,}15$ 15 Minuten, und falls $n = 1{,}7$ bis 1,5, so beginnt das Abbinden momentan.

Auf die Resultate der Analysen von „Milch"proben (Tabelle 24) und Zementen nach Erläutertem zurückkommend, ersehen wir, daß im Zement das Verhältnis zwischen dem Kieselerdegehalt und der Summe der Gewichtsquantitäten von Tonerde und Eisen

$$n = \frac{19{,}33}{9{,}30} = 2{,}08$$

ist; aber in „Milch"proben:

$$n_1 = \frac{5{,}33}{15{,}61} = 0{,}34.$$

Das Verhältnis

$$\frac{n}{n_1} = \frac{2{,}08}{0{,}34} = 6{,}12,$$

d. h., im an die Oberfläche der gestampften Schicht durchgetretenen Mörtel ist der Tonerde- und Eisengehalt 6,12 mal größer als in normalen Zementen.

Deswegen kann man beschließen, daß auch die hydraulischen Eigenschaften des durchgetretenen Mörtels sich stark unterscheiden müssen von den Eigenschaften des ursprünglichen, sich unter normalen Bedingungen befundenen Mörtels. Ein bedeutender Ueberfluß von Tonerde muß das Abbinden und Erhärten der „Milch" beschleunigen.

Außerdem zeigt die vorletzte Kolonne der Tabelle 24, daß im durchgetretenen Mörtel die Menge der Schwefelsäuresalze 1,75 mal größer ist als in normalem Mörtel; deswegen sind günstigere Ergebnisse zu einer Bildung des oben angeführten Salzes von Devalle, welches sich mit einer bedeutenden Volumenvergrößerung kristallisiert, vorhanden.

Diese Auffassungen werden teils durch Versuche, von Ferêt[42]) zur Bestimmung der Auflösbarkeit im Wasser der Bestandteile des Zements an-

---

[41]) N. Ljamin; Zement 1901, S. 15.

[42]) Durand-Clay et Ferêt; Chimie appliquée, S. 329.

gestellt, bestätigt. Dazu wurde pulverförmiger Portland-Zement mit 4facher Gewichtsquantität Wasser in verschlossenen Gläschen durchschüttelt und der Inhalt der Gläschen in verschiedenen Zeiträumen filtriert. Analysen der filtrierten Flüssigkeiten ergaben, daß zuerst sich Alkalien und Kalk auflösten, nachdem Schwefelsäureverbindungen und Tonerde.

Nach nicht mehr als einer halben Stunde schwand die Tonerde aus dem Mörtel; in gleicher Zeit vermehrte sich die in auflösbaren Verbindungen existierende Quantität der Schwefelsäure nach Maßgabe der Verfügung des Zements über eine Abbindungsraschheit, aber nachdem verschwanden aus dem Mörtel die Schwefelsäureverbindungen, so daß zum Ende des Versuchs das Wasser nur Kalk und freie Alkalien enthielt.

Nach der Meinung Le Chateliers[43]) erscheint überhaupt der ganze Erhärtungsprozeß hydraulischer Bindestoffe als eine Folge einer Kristallisation ihrer Hydratbestandteile, welche einen Zustand der Auflösbarkeit rasch überschreiten. Aber die Festigkeit einer solchen kristallisierten Masse kann sich in Abhängigkeit von der Form, den Größen und der Verbindungsart der sich bildenden Kristalle in bedeutenden Grenzen verändern; je größer die Berührungsfläche der Kristalle, je fester ihre gegenseitige Haftkraft, desto bedeutender ist der Widerstand der erhärtenden Masse. Alle Kristalle, welche sich aus übersättigten Lösungen abteilen, haben ein Aussehen von verlängerten Platten oder von geflochtenen langen Fasern; diese Eigentümlichkeit zeigt sich desto stärker, je übersättigter die Lösung ist. Aber anderseits kann sich die die Festigkeit der erhärtenden Masse bestimmende Kristallverlängerung entsprechend dem Sättigungsgrade der Lösung, welcher von verschiedenen Bedingungen, der Feinheit einer Zerteilung des wasserfreien Salzes, der Anzahl der Kristallisationszentren usw., abhängig ist, in bedeutenden Grenzen verändern. Die Erscheinung, daß die hydraulischen, nach ihrer Beschaffenheit einander sehr nahen Bindestoffe bei ihrer Verwendung in der Praxis und bei mechanischen Prüfungen solch verschiedene Resultate ergeben, wird mit diesen Bedingungen erklärt.

Auf Grundlage alles in diesem Artikel Betrachteten kann man beschließen, daß die Abbindungs- und Erhärtungsprozesse der gestampften Betonschicht, welche einen Ueberfluß an Wasser enthält, sogar in ein und derselben Schicht in verschiedenen Punkten nicht egal sein können.

Wie oben erklärt ist, werden sich beim Stampfen des Betons mit einem Wasserüberfluß folgende Abweichungen von den Normalbedingungen erhalten:

1. Der geringsten, durch das ausgepreßte Wasser hervorgebrachten Auslaugung ist der Zement im untersten Teil der Stampfschicht ausgesetzt, Abb. 24 (III), und der größten im oberen Teil (I) der Schicht. Deswegen wird sich auch die Veränderung des normalen Zementgehalts nach

[43]) Annales des Mines, Oct. 1893.

Maßgabe einer Annäherung zur Oberfläche der Schicht erhöhen. Diese Veränderung wird sich hauptsächlich durch eine Vermehrung der relativen Quantität von Tonerde und durch eine Verringerung des Kieselerdegehalts ausdrücken.

2. An der Oberfläche der Arbeitsschicht erscheint eine größte Ablagerung aller feinen Bestandteile des Zements, des Tones, des Schlammes, welche mit dem Wasser in aufgewogenem Zustande an die Oberfläche getragen wurden.

3. Bei der Rückbewegung des nach außen gepreßten Mörtels, welcher einen Ueberfluß an Tonerde enthält, muß eine so rasche Abbindung und Erhärtung eintreten, daß der ausgepreßte Mörtel sich nur im oberen Teil der Schicht zu verteilen vermag, eine entsprechende Verschnellerung im Abbinden und Erhärten des oberen Teils der Arbeitsschicht hervorrufend.

Deswegen wird das Betongemenge im unteren Teil der Schicht (III), Abb. 24, sich wenig vom normalen Betongemenge unterscheiden. Im mittleren Teil (II) der Schicht wird das Zementgemenge auf die Seite des Vorherrschens von Kieselerde über Tonerde gebrochen werden, wobei die relative Kieselerdequantität größer sein wird, als in normalem Zement, aber die Tonerdequantität geringer; im oberen Teil der Schicht umgekehrt: die relative Tonerdequantität größer, als in normalem Zement, und die Kieselerdequantität geringer.

Endlich wird die Oberfläche der gestampften Arbeitsschicht mit einer sogenannten „Kruste“ bedeckt sein, welche aus einer Mischung von Zement und feinen trägen Bestandteilen (Ton und Schlamm) besteht.

Auf diese Weise wird in jeder Arbeitsschicht der obere Teil die vorherrschende Quantität eines Mörtels welcher sich vom normalen, im unteren Teil einer jeden Schicht sich befindenden Zementmörtel unterscheidet, enthalten. Deswegen wird der schroffste Uebergang in bezug auf die Quantität, so auch auf die Qualität des Mörtels an den Berührungspunkten zweier angrenzenden Schichten des Betonmassivs erscheinen.

Ein bedeutender Unterschied im chemischen Gehalt der Mörtel an den sich berührenden Teilen zweier angrenzenden Betonschichten zieht nach sich einen ebenso schroffen Unterschied im Charakter und im Verlauf der Abbindungs- und Erhärtungsprozesse, was seinerseits ein Erscheinen innerer Anstrengungen in zwei angrenzenden Arbeitsschichten hervorrufen muß.

Einfluß des Stampfens auf das Gebinde zweier Arbeitsschichten.

Das Gebinde zweier Arbeitsschichten ist von der Bindekraft des Mörtels, welcher die Berührungsflächen benetzt, und von der Größe dieser Flächen abhängig.

Bei einer die Abbindungsfrist des Zements nicht überschreitenden Unterbrechung im Aufschütten einer jeden Schicht wird das Gebinde zweier

angrenzenden Schichten durch die Bindekraft des Mörtels, welcher eine Mischung aus an die Oberfläche der gestampften Schicht durchgetretenem Mörtel und einem normalen Mörtel aus der neugelegten Betonschicht bildet, bestimmt.

Je weniger „Milch" an die Oberfläche der gestampften Arbeitsschicht hervorkommt, desto mehr wird sich diese aus dem Mörtel von der neuen Schicht und der „Milch" bestehende Mischung dem Normalgemenge annähern.

Anderseits wurde am Anfang dieses Artikels erklärt, daß beim Stampfen eine größte Dichte des Betons an der oberen Fläche der Schicht und eine geringste an der unteren Fläche erzielt wird. Einem unmittelbaren Schlage der Stampfen ausgesetzt, verkeilen sich die oberen Steinschlagstücke und bilden zum Schluß der Stampfarbeit eine glatte Fläche, deren alle Unebenen mit kleinen Bestandteilen dicht angefüllt sind.

Deswegen können sich bei einiger beständiger Stampfarbeit die unteren Steinschlagstücke einer jeden folgenden Schicht nicht einkerben in die Steinschlagstücke, welche sich an der Oberfläche der untenliegenden Schicht befinden. Infolgedessen können die Steinschlagstücke zweier sich berührenden Arbeitsschichten nicht jenen Verband bilden, welcher zwischen den Stein schlagstücken einer jeden einzelnen Schicht existiert.

An Betonprobekörpern angestellte mechanische Prüfungen zeigen, daß bei starken steinernen Betonbestandteilen, z. B. Granitsteinschlag oder Kies, man an den Berührungsflächen des Steinschlags mit dem Mörtel immer einen unebenen Bruch erhält. Je vollkommener der Verband im Steinschlag ist, desto größer ist jene Bruchfläche, längs welcher eine Abteilung des Steinschlags vom Mörtel, ohne Sprengen des Steinschlags selbst, entstehen kann. Das Fehlen eines jeglichen Verbandes zwischen dem Steinschlag zweier angrenzenden Arbeitsschichten zeigt eine geringste Fläche seiner Berührung an.

Auf diese Weise sind bei angenommenen Betonaufführungsarten, mit einer sorgfältigen Ausgleichung der Oberfläche der Arbeitsschichten, alle Bedingungen zum Erhalten eines geringsten Verbandes zwischen den Arbeitsschichten vorhanden. Deswegen erscheint im Betonmassiv ein geringster Widerstand längs den Arbeitsschichten als ganz natürlich.

Wie oben erklärt, kann ein zu starkes Stampfen bei einem Wasserüberfluß in zwei angrenzenden Schichten ein Erscheinen von inneren Spannungen hervorrufen, was eine Folge einer Störung des chemischen Zementgemenges und seiner Verteilung in der Schichtmasse ist. Diese inneren Spannungen summieren sich mit den Spannungen, welche infolge von einer Volumenänderung der Betonbestandteile beim Erhärten eintreten. Solch ein verborgener Zustand der Betonmassive muß die Festigkeit der Massive gegen die Wirkung äußerer Kräfte bedeutend verringern. Nur mit diesen Erklärungen kann man jene Abblätterung des Betons längs den Arbeits-

schichten, welche bei Erschütterungen und Schlägen in Betonbauten zu beobachten sind, bestimmen.

Zur Erläuterung der Frage über den Einfluß der angewendeten Betonlegungsarten auf die Monolität des Betons sind im Jahre 1903 Prüfungen an würfelförmigen Betonprobekörpern ($20 \times 20 \times 20$ ccm) vorgenommen.

Das Betongemenge (nach Gewicht) war für alle Probekörper: 1 T. Zement, 2,5 T. Sand und 5 T. Granitsteinschlag. Zement- und Betonanalysen sind oben angeführt. Der Steinschlag bestand aus einer Mischung: 2 Teile aus Körnern von 1 bis $^3/_4$ Zoll und 1 Teil bei einer Korngröße von $^1/_4$ bis $^1/_8$ Zoll.

Die Probekörper wurden in 2 Schichten mit einer Höhe von je 10 cm, Abb. 25 und 26, gestampft.

Zur Dichtung des Betons wurde eine Stampfe, 12 kg wiegend, beim Fallen aus einer Höhe von 25 cm gebraucht. Die Arbeitsfläche der Stampfe war $12 \times 12 = 144$ qcm. Das Stampfen aller Probekörper wurde durch ein und denselben Arbeiter folgendermaßen ausgeführt: Es wurden je zwei aufeinanderfolgende Schläge auf die Flächen 1, 2, 3 und 4, Abb. 26, gemacht, und solche ganze Wendungen waren für jede Schicht je 3, was zusammen je 6 Schläge für jede Fläche oder $6 \times 4 = 24$ Schläge für eine Schicht ausmacht. Also war die Stampfarbeit für jede Schicht gleich: $12 \times 0{,}25 \times 24 = 72$ kg.

Diese Stampfarbeit entspricht der durchschnittlichen Stampfarbeit, welche gewöhnlich in der Praxis bei Aufführung von Massivbauten angewendet wird, und beträgt die Hälfte der Stampfarbeit, welche in Deutschland bei Normalprüfungen von Betonprobekörpern angenommen ist.[44])

Nach dem Wassergehalt wurden die Probekörper in zwei Gruppen geteilt. In der ersten Gruppe war der Wassergehalt 6,3 vH. des Gewichts aller trockenen Bestandteile des Betons, und wurde derselbe auf einem Prüfungswege nur durch die an der Oberfläche der verdichteten Schicht sich zeigende Feuchtigkeitsspur bestimmt; also kann in dieser Hinsicht der Beton der ersten Probekörpergruppe als „trocken“ bezeichnet werden. In der zweiten Gruppe von Probekörpern mit 7,5 vH. Wassergehalt trat der Mörtel an die Oberfläche der gestampften Schicht durch, und dieser Beton kann zu sogenannten „plastischen“ Betons gerechnet werden. Im Laufe der ersten vier Wochen nach der Herstellung wurden die Probekörper in Kasematten mit feuchter Luft und einer Temperatur von 1° bis 13° aufbewahrt und nachdem bis zur Prüfung bei einer Zimmertemperatur.

Die Prüfungen der Probekörper wurden zur Aufklärung des Einflusses folgender Bedingungen auf ihre Monolität vorgenommen: 1. des Wassergehalts bei Verwendung von „trockenen“ und „plastischen“ Betons, 2. der Unterbrechungsdauer in den aufeinanderfolgenden Aufschichtungen und

[44]) Bericht über die V. Haupt-Versammlung des Deutschen Beton-Vereins 1902, S. 49.

3. des Einflusses des Zustandes der Berührungsflächen zweier angrenzenden Arbeitsschichten.

Dazu wurden in jeder Gruppe bei folgenden Bedingungen je 6 Probekörper hergestellt: 1. Das Stampfen der oberen Schicht wurde in Zwischenräumen von 2 Stunden, 1 Tage und 5 Tagen, ohne jegliche Flächenveränderung der gestampften unteren Arbeitsschicht, ausgeübt, und 2. ohne Unterbrechung mit einer Auflockerung der Oberfläche der gestampften unteren Schicht.

Die Prüfungen wurden im Mechanischen Laboratorium des Instituts der Wegebauingenieure angestellt und bestanden in folgendem:

1. in der Bestimmung der Scherfestigkeit von Probekörpern längs den Berührungsflächen der Arbeitsschichten, Abb. 25, und in perpendikulärer Richtung zu diesen Flächen (*dc*);

2. in der Bestimmung der Festigkeit gegen Zerspalten in beiden Richtungen. Dazu wurden an den Seitenflächen der Probekörper auf einer halben Höhe dreieckige, 1 cm tiefe Rinnen gemacht. Diese Rinnen wurden vermittels Befestigung entsprechender dreiseitiger Prismen an zwei entgegengesetzte Seitenwände der Form erhalten; nach Abnehmen der Formen wurden diese Rinnen mit Zementmörtel beworfen und auf einem besonderen Gestell sorgfältig bearbeitet, wodurch ein möglicher Parallelismus der Rinnen erzielt wurde. Bei der Prüfung wurden die Rinnen mit Mörtel aus reinem Zement ausgefüllt, um eine möglichst richtige Verteilung des Druckes der eisernen Messer, Abb. 25, welche eine Form eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas mit einer Länge von 5 cm und einer Höhe von 22 cm hatten, zu erhalten.

In den Probekörpern, welche einem Abscheren und Zerspalten in perpendikulärer Richtung zu den Berührungsflächen der Arbeitsschichten unterlagen, wurden gleiche Rinnen in den oberen und unteren Seiten (*c* und *d*, Abb. 25) gemacht.

Die Prüfungen wurden 28 und 90 Tage nach Herstellung der Probekörper vorgenommen.

Resultate der Prüfungen sind in umstehenden Tabellen 25 und 26 angeführt, wobei eine jede Zahl das mittlere Ergebnis für drei Probekörper ausdrückt.

Die Zahlen der Tabellen 25 und 26 zeigen, daß:

1. Probekörper mit 7,5 vH. Wassergehalt einen größeren Widerstand leisteten, als Probekörper mit 6,3 vH. Wassergehalt, diejenigen Probekörper, welche dem Zerspalten perpendikulär zu den Arbeitsschichten unterworfen waren, ausgeschlossen (s. Kol. 5 und 7 der Tabelle 25).

2. Die größte Scher- und Spaltfestigkeit zeigten alle Probekörper, welche ohne Unterbrechung mit einer Auflockerung der Oberfläche der gestampften Arbeitsschichten gestampft wurden, wobei in einer perpendikulären Richtung zu den Arbeitsschichten die Festigkeit größer war, als längs den

Tabelle 25.
Resultate der Prüfungen von Probekörpern auf Zerspalten.

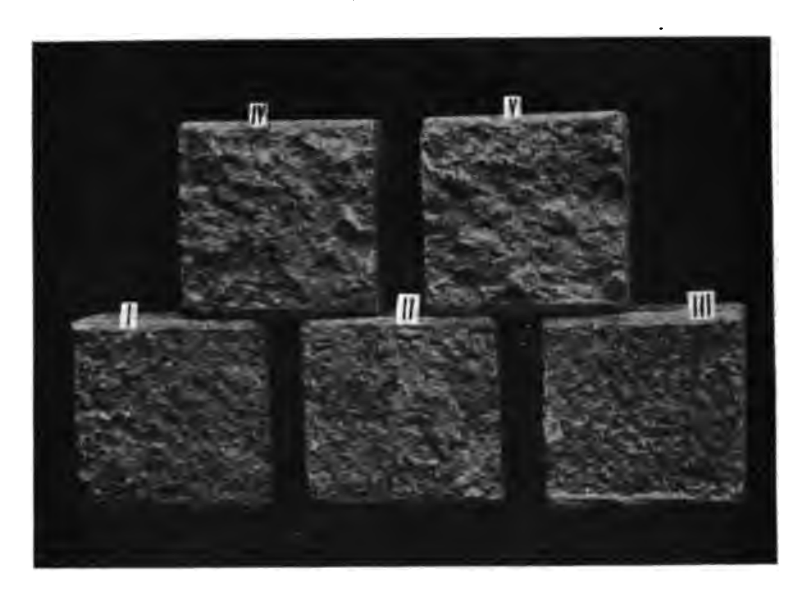
1	2	3	4	5	6	7	8	9
			Prüfungsfrist.				Verhältnis der Gegebenen der Kolonnen.	
			28 Tage.		90 Tage.			
Nr. der Gruppen.	Stundenzahl zwischen der Schüttung der Schichten.	Wassergehalt in vH.	Längs der Arbeitsschicht. kg pro 1 qcm.	Perpendikulär der Arbeitsschicht. kg pro 1 qcm.	Längs der Arbeitsschicht. kg pro 1 qcm.	Perpendikulär der Arbeitsschicht. kg pro 1 qcm.	6 und 4.	7 und 6.
1	0	6,3	6,94	11,25	7,22	11,52	1,04	1,59
2	0	7,5	7,58	10,00	8,47	11,39	1,12	1,35
						Durchschnitt.		
3	2	6,3	5,16	—	5,47	11,45	1,06	2,09
4	2	7,5	5,31	—	5,56	—	1,05	2,06
5	24	6,3	3,75	—	2,50	—	0,67	4,58
6	24	7,5	5,22	—	4,53	—	0,87	2,53
7	120	6,3	4,64	—	3,05	—	0,66	3,75
8	120	7,5	4,72	—	4,17	—	0,88	2,74

Tabelle 26.
Resultate der Prüfungen von Probekörpern auf Abscheren.

1	2	3	4	5	6	7
			Prüfungsfrist.			Verhältnis zwischen den Gegebenen der Kolonnen 6 und 5.
			28 Tage.	90 Tage.		
Nr. der Gruppen.	Stundenzahl zwischen der Schüttung der Schichten.	Wassergehalt in vH.	Längs den Arbeitsschichten. kg pro 1 qcm.	Längs den Arbeitsschichten. kg pro 1 qcm.	Perpendikulär den Arbeitsschichten. kg pro 1 qcm.	
1	0	6,3	10,56	13,97	17,22	1,24
2	0	7,5	13,33	14,72	17,36	1,17
					Durchschnitt.	
3	2	6,3	5,85	8,64	17,29	2,00
4	2	7,5	9,72	12,50	—	1,38
5	24	6,3	3,75	3,05	—	5,67
6	24	7,5	7,94	10,00	—	1,73
7	120	6,3	6,61	8,19	—	2,11
8	120	7,5	7,31	8,89	—	1,94

Arbeitsschichten: a) gegen Zerspalten: von 1,35 bis 4,58 mal, und b) gegen Abscheren von 1,17 bis 5,67 mal (s. Kol. 9 und 7), in Abhängigkeit von der Unterbrechungsdauer während des Stampfens der Schichten und von der Wassermenge im Beton.

3. Nach Maßgabe der Unterbrechungsdauer während des Stampfens der Schichten verringert sich die Scher- und Spaltfestigkeit längs den Arbeitsschichten. Die Zahlen der 8. Kolonne der Tabelle 25 zeigen, daß bei Unterbrechungen (länger als 2 Stunden) im Legen zweier angrenzenden Schichten die Festigkeit gegen Zerspalten längs den Arbeitsschichten am Schluß einer dreimonatlichen Frist eine geringere sein wird, als bei gleichen



Zeichnung 5.

Probekörpern einmonatlicher Frist, wobei eine größte Festigkeitsverringerung (bis 34 vH.) Probekörper aus trockenem Beton zeigten.

Solch eine Verringerung der Spaltfestigkeit längs den Arbeitsschichten kann man durch das Eintreten von inneren Spannungen, infolge einer ungleichen Reaktion im Erhärten und Trocknen zweier angrenzenden Schichten eingetreten, welche mit einer bedeutenden, die Abbindungsdauer des Zements übersteigenden Unterbrechung aufeinandergelegt wurden, erklären.

4. Nach Maßgabe der Unterbrechungsdauer bei der Schüttung zweier angrenzenden Arbeitsschichten verringert sich in allen Probekörpern die Bruchfläche beim Zerspalten und Abscheren längs den Arbeitsschichten. In beiliegender Zeichnung 5 sind Bruchflächen beim Zerspalten und Abscheren längs der Berührungsflächen der Arbeitsschichten für Probekörper mit Unterbrechungen im Schichtlegen: I 2 Stunden, II 24 Stunden und III. 120 Stunden angeführt. Die Brüche IV und V mit den größten Uneben-

heiten beziehen sich auf Probekörper, welche ohne Unterbrechung in der Aufschüttung und mit einer Auflockerung der Oberfläche der unteren gestampften Schicht hergestellt sind, wobei der Bruch IV beim Abscheren und Zerspalten längs den Arbeitsschichten und der Bruch V in perpendikulärer Richtung erhalten worden ist.

Außerdem wurde eine Zerstörung des Steinschlags beim Abscheren und Zerspalten nur in den Probekörpern IV und V, welche mit einer Auflockerung der Arbeitsschichtflächen hergestellt wurden, beobachtet, und im allgemeinen unterscheiden sich die Brüche IV und V durch nichts voneinander. Aber die Brüche I, II und III, welche beim Abscheren und Zerspalten der Probekörper längs den Arbeitsschichten erhalten sind, zeigten keinen zerstörten Steinschlag, und die Bruchflächen ebneten sich nach Maßgabe der Unterbrechungsdauer während der Schichtenaufschüttung.

Dieses beweist, daß das Gebinde im Steinschlag zweier angrenzenden Schichten sich nach Maßnahme einer Verkürzung der Unterbrechungsdauer beim Schichtenlegen verstärkt und ein mehr vollkommenes beim Auflockern der Oberfläche der Arbeitsschichten wird, wodurch eine höchste Festigkeit der Probekörper, welche auf solche Art hergestellt sind, erklärt wird. Auf Grundlage derselben Auffassungen kann man beschließen, daß bei Verwendung von Steinschlag großer Dimensionen die Bruchfläche der Probekörper bei einer ähnlichen Verbindung sich vergrößern muß, was ein Zunehmen der Festigkeit gegen Zerspalten und Abscheren längs den Arbeitsschichten nach sich ziehen wird.

5. Zahlen der Tabellen 25 und 26 zeigen, daß Probekörper der 5. Gruppe, aus trockenem Beton mit 24stündlichen Unterbrechungen im Schichtenlegen bereitet, eine geringste Festigkeit gegen Abblätterung ergaben.

Diese Erscheinung kann man durch jenen Umstand erklären, daß der Beton nach Verlauf eines Tages an der Oberfläche der gestampften Schicht über eine solch geringe Festigkeit verfügt, daß er beim Stampfen der folgenden Schicht beschädigt wird, wobei die abgegangenen Betonteilchen der unteren Schicht sozusagen die Bedeutung des trägen Sandes, welcher eine Zwischenschicht in den sich berührenden Schichten bildet, tragen. Je trockener der Beton, eine desto geringere flüssige Zementmörtelmenge kann in den Kern der untenliegenden Schicht eindringen und eine desto geringere Anzahl abgeteilter Teilchen kann abermals durch den Mörtel der neuaufgelegten Schicht gebunden werden. Deswegen ist es natürlich, daß ein festeres Gebinde der sich berührenden Schichten erhalten werden kann: 1. bei Unterbrechungen im Einlegen, welche die Abbindungsdauer des Zements nicht übersteigen, 2. wenn der Zeitraum zwischen dem Einlegen angrenzender Schichten so lange dauert, bis die Oberfläche der untenliegenden Schicht eine feste Gründung für die neue Schicht, deren Mörtel sich mit der erhärteten Schicht verbinden kann, bilden wird.

Aus allem im VI. Kapitel Betrachteten kann man folgende Beschlüsse ziehen:

1. Die bedeutende Differenz in der Festigkeit gegen Abscheren und Zerspalten längs den Arbeitsschichten und in perpendikulärer Richtung beweist, daß der Beton, über eine ungleiche Festigkeit in zwei gegenseitig perpendikulären Richtungen verfügend, in mechanischer Hinsicht keinen „Monolith" vorstellt.

2. In dieser Hinsicht kann eine größte Gleichartigkeit des Betons erhalten werden bei möglichst geringen Unterbrechungen im Einlegen, welche die Abbindungsdauer des Zements nicht übersteigen dürfen, und bei der Bedingung einer Auflockerung der gestampften Oberfläche der vorhergehenden Arbeitsschicht zum Erhalten eines möglichst festeren Verbandes des Steinschlages zweier angrenzenden Arbeitsschichten.

In der Praxis kann die Auflockerung einer jeden gestampften Schicht vor Einlegen einer folgenden Schicht mit Harken oder mit Stahlbesen gemacht werden.

3. Der Wassergehalt, die Stampfarbeit und die Höhe der Schichten müssen in jedem einzelnen Falle so bestimmt werden, daß zum Schluß des Stampfens an der Oberfläche der Schicht ein Erscheinen von Feuchtigkeit oder einer sehr unbedeutenden Mörtelmenge beobachtet wird; und

4. Bei Unterbrechungen im Einlegen, welche die Abbindungsdauer des Zements übersteigen, kann eine betreffende Festigkeit in der Verbindung der alten und neuen Einlegung bei der Bedingung einer größten Berührungsfläche und einer möglichst stärkeren Erhärtung der alten Einlegung erzielt werden.

In der Praxis wird die Art einer Aufführung von Betonbauten in senkrechten Schichten angewendet. Die Schichten werden parallel der

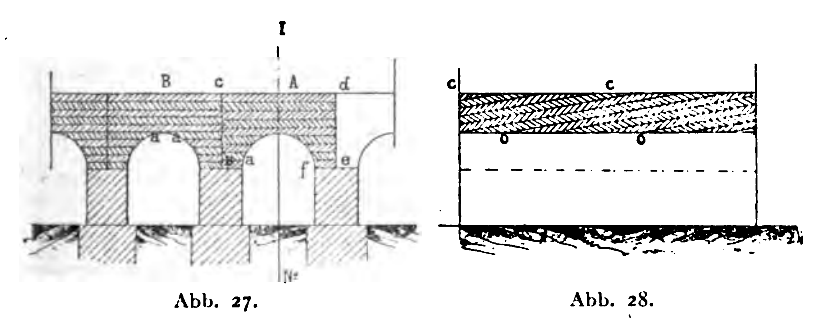


Abb. 27. Abb. 28.

Senkfläche, deren Durchschnittslinie mit der horizontalen Fläche perpendikulär zur Länge des Gewölbes oder der Mauer ist, eingelegt. Unter solchen Bedingungen wird die Projektion der senkrechten Schicht *A* (Abb. 27) auf die vertikale Fläche, welche perpendikulär zur Länge des Gewölbes ist, eine ge-

schlossene Figur *a b c d e f*, welche zugleich auch den Querdurchschnitt des Gewölbes bildet, darstellen.

Deswegen wurde angenommen, daß diese Art den Bedingungen einer Ausführung von richtiger Gewölbaufführung mehr entspricht, als die Art einer Betonlegung in horizontalen Schichten, wobei die Arbeitsschichten von der inneren Richtlinie des Gewölbes in spitzen Winkeln *a a* (Abb. 27, *B*) durchschnitten werden.

In Wirklichkeit durchschneidet auch jede Schicht, bei einer Senkung der Schichten von etwa $^1/_6$, die Produzierende des Gewölbes im Längendurchschnitt des Gewölbes in einem spitzen Winkel *b b* (Abb. 28). Außerdem treten bei einer Einlegung in senkrechten Schichten die oberen Querschnitte aller Arbeitsschichten an die Oberfläche *C D*, Abb. 28, des Baues hervor. Die Dichtung einer jeden Schicht wird, wie oben erklärt, im unteren Teil der Schicht eine geringste sein; deswegen kann das auf die Oberfläche der Bauten hinkommende Wasser leicht ins Innere der Schüttung, längs den gesenkten (Flächen) Berührungsflächen der angrenzenden Schichten fließend, eindringen.

Wenn man hierbei in Betracht zieht: 1. die Schwierigkeit beim Stampfen von gesenkten Schichten, welche mit einem Verlust eines gewissen Stampfarbeitsteiles, in Abhängigkeit vom Winkel der Schichtensenkung, verbunden ist, und 2. die relative Schwäche einer Betoneinlegung längs den Berührungspunkten der Arbeitsschichten, so kann man beschließen, daß als günstigste Aufführungsart von Betonbauten die Aufführung in horizontalen Schichten erscheint.

VII. Einfluß der Konstruktionsbedingungen auf die Monolität der Betonbauten.

Auf Grundlage der Versuche von Considère wurde im II. Kapitel erläutert, daß ein jeglicher Widerstand gegen eine freie Volumenänderung im Beton das Erscheinen innerer Kräfte hervorruft.

Die Bedingungen, welche das Erscheinen innerer Kräfte im Betonmassiv zufolge einer Volumenänderung der Bestandteile des Betons hervorrufen, sind in den Kapiteln I, II und III betrachtet worden.

Es bleibt noch aufzuklären der Einfluß der verschiedenen Konstruktionsbedingungen auf die Monolität der Betonbauten.

Abb. 29.

Ein Beispiel eines geringsten Einflusses der Konstruktionsbedingungen auf die Monolität bildet ein Betonmassiv beliebiger Größen, welches auf unbeschlagenen Rädern frei liegt, Abb. 29. Wenn man zuläßt: 1. daß bei

einer gewissen Strecke ab zwischen den Rädern, zufolge einer Senkung des Teiles ab, im Massiv keine gefährlichen Anstrengungen erscheinen können, und 2. daß das Hin- und Herrollen ohne Widerstand geschehen kann, so sind natürlich keine Ursachen für das Erscheinen innerer Kräfte bei einer sichtbaren Volumenänderung des Massivs vorhanden.

Dieselbe Grundbestimmung wird bei der Konstruktion von beweglichen Pfeilern für Metallbrücken, bei Sparren und anderen Bauten zur Vernichtung des schädlichen Einflusses der Temperaturwechsel auf ihre Festigkeit, angewendet.

Bei massiven Betonbauten wird dieses Prinzip nur für Gewölbbrücken mit großen Spannweiten zur Vernichtung eines schädlichen Einflusses der Temperaturwechsel, der Pfeilersenkung und jener Deformationen, welche sich beim Abrüsten der Lehrbogen und bei Belastung der Gewölbe erhalten, angewendet. Das Streben zum Erhalten einer möglichst starken Massivität schafft aber in allen übrigen Betonaufführungen die unvorteilhaftesten Bedingungen zur Bewahrung ihrer Monolität, infolgedessen in massiven Betonbauten sehr oft Vertikal- und Horizontalrisse erscheinen.

1. Vertikalrisse.

A. Zur Erläuterung dieser Frage wollen wir zuerst den einfachsten Fall, wenn die Aufführung eine freistehende Betonmauer vorstellt, in allgemeinen Zügen betrachten.

Die Bedingungen, unter welchen die Gründung und der über der Erde befindliche Teil der Mauer stehen, sind scharf verschieden; so: 1. wird die Gründung gewöhnlich aus einem anderen Material aufgeführt, z. B. aus Bruchstein mit Zementmörtel oder aus einem mageren Beton, 2. ist die Festigkeit und die Temperatur der Gründungen geringeren Schwankungen, als diejenigen des Teiles oberhalb der Erde, ausgesetzt, und 3. wird die Mauer nach Verlauf einiger Zeit nach Beendigung der Fundamentierung aufgeführt, d. h. nachdem alle möglichen größten Volumenänderungen bei Erhärtung der Gründung stattgefunden haben.

Im II. Kapitel sind Versuche Considères angeführt, welche zeigen, daß sogar bei einem gleichartigen Mörtelgehalt der aus zwei Schichten mit dreitägiger Unterbrechung hergestellten Probekörper in der oberen Schicht innere Zugspannungen eintraten, welche infolgedessen, daß das Trocknen der neuen Schicht durch die Haftkraft in der Berührungsfläche der Schichten, Abb. 9, eingeschränkt wurde, Vertikalrisse hervorriefen.

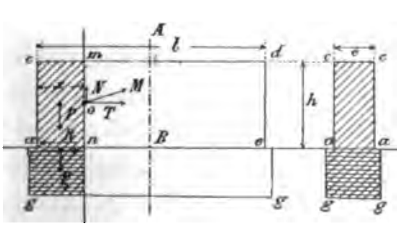


Abb. 30.

Eine gleiche Erscheinung ist in betrachtetem Falle zu sehen.

Wenn man zuläßt, daß die Gründung der Mauer ag, Abb. 30, ein ge-

wisses völlig bestimmtes Volumen angenommen hat, so wird ein jegliches Streben des über der Erde befindlichen Teiles der Mauer *ac* zur Veränderung ihres ursprünglichen Volumens von seiten der mit der Mauer in der Berührungsfläche *ab* verbundenen Gründung eine entsprechende Gegenwirkung hervorrufen.

Der Grad und die Art dieses Verbandes bestimmen die Deformation und jene inneren Spannungen, welche im Teil der Mauer oberhalb der Erde und in der Gründung bei ihrer Volumenänderung erscheinen werden.

Der erhärtete Beton ist bis zu einem gewissen Grade ein elastisches Material, wie aus den Gegebenen des V. Kapitels zu ersehen ist. Lassen wir zu, daß die freistehende Betonmauer, Abb. 31, mit der Gründung, welche einen unveränderlichen Körper bildet, verbunden ist. Der Einfluß dieses konstruktiven Verbandes wird sich dadurch ausdrücken, daß bei gleichmäßigem Trocknen des Betons und bei Fallen seiner Temperatur die Mauer ihre ursprüngliche rechtwinklige Form in irgend eine andere, beispielsweise mit den punktierten Linien $a c_1 \; d_1 b$ bezeichnet, verändern wird.

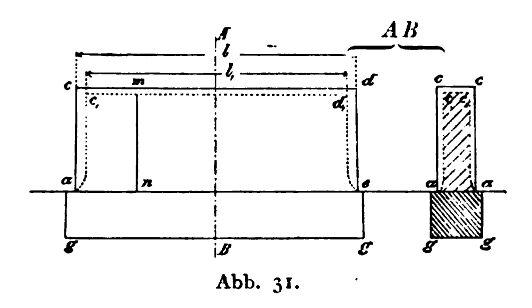


Abb. 31.

Dieser Deformation entsprechend müssen sich im Innern der Betonaufmauerung gewisse innere Kräfte zeigen. Wie oben im II. Kapitel erklärt ist, erscheinen unter solchen Umständen bei Probekörpern kleiner Dimensionen in einem beliebigen Durchschnitt *mn*, Abb. 31, gewisse Zugspannungen. Diese Spannungen können das Erscheinen von Vertikalrissen gleich solchen, wie in oben angeführten Versuchen Considères an in zwei Schichten mit dreitägiger Unterbrechung hergestellten Probekörpern, Abb. 9, hervorrufen.

Anderseits zeigen die Versuche, daß ein elastisches Plättchen (z. B. aus Kautschuk) *acdb*, Abb. 32, welches längs der Grundfläche einem exzentrischen Zuge ausgesetzt ist, bestrebt ist, eine Form $a_1 c_1 d_1 b_1$ anzunehmen, was sichtbar beweist, daß bei einer bedeutenden Verlängerung der Kante *ab* in der oberen Kante eine Längeverringerung entsteht.

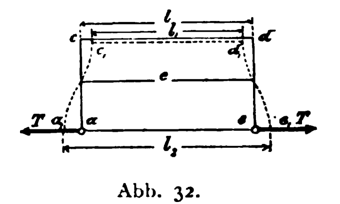


Abb. 32.

Auf diese Weise können innere Zugkräfte nur im unteren Teil des ausgespannten Plättchens erscheinen, aber im oberen Teil kann unter gewissen Umständen das Erscheinen innerer Druckkräfte möglich sein. Eine Verteilung der inneren Kräfte zeigt sich bei exzentrischem Druck auf prismatische Körper. Da eine zeitweilige Festigkeit des Betons gegen Zug bedeutend (8—12mal) geringer ist als eine zeitweilige Festigkeit gegen Druck, so muß eine äußerste, die Monolität sichernde Länge

der Mauer bestimmt werden, indem eine mögliche Volumenverringerung der Aufmauerung in Betracht gezogen wird,

In Wirklichkeit ist der Beton, wie im II. Kapitel erläutert, einem größten Schwinden während der Anfangsperioden des Erhärtens an der Luft ausgesetzt, d. h. in welcher Zeit der Beton über eine geringe Elastizität verfügt und sich nach seinen Eigenschaften den elastischen, rohen Materialien nähert. Deswegen sind, im Grunde genommen, die Berechnungsarten, welche für absolut feste, so auch für ideal-elastische Körper brauchbar sind, in gegebenem Falle nicht anwendbar. Außerdem verändern sich, wie im V. Kapitel erläutert, die mechanischen Eigenschaften des Betons, in Abhängigkeit von verschiedenen Bedingungen, ununterbrochen während des dauernden Erhärtungsprozesses des Betons. Ebenso kann man aus im VI. Kapitel Erläutertem schließen, daß die Betonmassive, bezüglich ihrer gleichartigen Dichte und mechanischen Eigenschaften und sich den Materialien schieferiger Beschaffenheit nähernd, in der Praxis keine vollständig gleichartigen Körper bilden.

Zugleich werden die Berechnungsbedingungen in bedeutendem Grade komplizierter durch jenen Umstand, daß die Gründung in Wirklichkeit keinen absolut festen Körper vorstellt; die Befestigungsbedingungen und diejenigen der Volumenänderung sind von den elastischen Eigenschaften des Materials, der Tiefe der Grundlegung, vom Baugrund usw. abhängig.

Deswegen erscheint, infolge der Kompliziertheit und der Unbestimmtheit der ganzen Vereinigung aller aufgezählten Bedingungen, für die Bestimmung einer äußersten Länge der massiven, mit dem Fundament verbundenen Mauern eine Anwendung irgendwelcher genauen, auf der Elastizitätstheorie begründeten Berechnungsarten in der Praxis unmöglich. In jedem einzelnen Falle kann die Frage betreffs der äußersten Dimensionen für mit dem Fundament verbundene Betonbauten nur auf dem Experimentalwege in Abhängigkeit von der Betonbeschaffenheit, der Erhärtungsdauer und -bedingungen, den Grenzen des Temperaturwechsels, der Feuchtigkeit usw. gelöst werden.

In dieser Hinsicht existieren folgende praktische Ergebnisse, welche in Amerika und in England durch verschiedene Beobachtungen an Betonmauern ermittelt sind.

Die mit der Gründung verbundenen freistehenden Betonmauern, von 40 bis 60 cm (16 bis 24 Zoll) Dicke, zeigen bei einer größten Länge von 4,25 bis 6,40 m (2 bis 3 Faden) kein Erscheinen von Vertikalrissen.[45])

Eine so unbedeutende, die Monolität der Betonmauern sichernde Länge wird durch jenen Umstand erklärt, daß ähnliche freistehende, dünne Mauern einem größten Einfluß der Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen ausgesetzt sind.

---

[45]) Potter: Concrete, its use in building; S. 49.

Die Praxis zeigt, daß in Betonmauern Vertikalrisse oft erst nach Verlauf einer bedeutenden Zeit nach Beendigung der Aufmauerung, d. h. nachdem der Beton getrocknet und erhärtet ist, erscheinen. Das Erscheinen und die Größe dieser Risse sind in sichtbarer Abhängigkeit von den Aenderungen der äußeren Temperatur.

Um diese Frage einigermaßen zu erläutern, wollen wir zulassen, Abb. 31, daß die in der Durchschnittsfläche ab mit dem Fundament verbundene Betonmauer $acdb$ eine Form ac_1d_1b, das Volumen beim Trocknen und bei einer Temperaturerniedrigung verringernd, annehmen wird. Wenn wir die ursprüngliche Länge der Mauer ab durch l bezeichnen und die geringste Länge längs ihrer oberen Kante c_1d_1 durch l_1, so wird die Differenz $l - l_1 = s$ die Verkürzung des oberen Teils der Mauer ausdrücken.

In bezug auf den Fuß der Mauer wird die gleiche Differenz $l - l_1 = s$ jene Verlängerung, welche im unteren Teil der Mauer beim Uebergang von der Bedingung eines freiliegenden Körpers zur Bedingung einer Verbindung der Mauer mit der Gründung erhalten wird, bezeichnen.

Nehmen wir an: das Betongemenge der Mauer besteht aus 1 T. Zement, 2,5 T. Sand und 5 T. Granitsteinschlag.

Der Ausdehnungskoeffizient eines solchen Betons kann nach den Ergebnissen des III. Kapitels als gleich dem Ausdehnungskoeffizienten für Granit, d. h. $\alpha = 0{,}0000081$ (s. Tabelle 9), angenommen werden. Das größte relative Trocknen des Betons wird lt. Tabelle 3 sein: $\beta = 0{,}00015$; der Wechsel der äußeren Temperatur: $t_0 - t_1 = 50°$.

Bei solchen Bedingungen:

$$s = l - l_1 = l - l\,(1 - \alpha t - \beta) = l\,(\alpha \,.\, t + \beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

oder

$$s = l\,(0{,}0000081 \,.\, 50 + 0{,}00015) = 0{,}000555\; l.$$

Folglich, vorausgesetzt, daß der Beton über eine Elastizität nicht verfügt, müssen sich in der gegebenen, mit der unveränderlichen Gründung verbundenen Mauer Vertikalrisse zeigen, wobei die Gesamtbreite aller Risse für jedes Meter der Mauerlänge gleich sein würde:

$$s = l - l_1 = 0{,}000555 \,.\, l = 0{,}55 \text{ mm}.$$

Aber zulassend, daß die steinartigen Bestandteile des Betons aus Sandstein bestehen, und in die oben angeführte Formel (n)

$$s = l\,(\alpha t + \beta)$$

die entsprechenden Zahlen aus den Tabellen 9 und 3 einsetzend, erhalten wir, daß in einem unelastischen Betonmassiv die Gesamtbreite aller Risse für 1 m Länge sich ausdrücken wird:

$$s = 1000 \times (0{,}0000124 \times 50 + 0{,}00065) = 1{,}27 \text{ mm},$$

d. h. dieselbe wird $\frac{1{,}27}{0{,}55} = 2{,}3$ mal größer sein als bei Verwendung von Granitsteinschlag.

In der nachfolgenden Tabelle 27 sind relative Längeänderungen eines freiliegenden Massivs nach der Formel $s_1 = \alpha t + \beta$ bei einer Temperaturdifferenz $t_0 - t_1 = t = 50^\circ$, die Größen der Ausdehnungskoeffizienten und des relativen Trocknens aus den Tabellen 9 und 3 genommen, ausgerechnet.

Tabelle 27.

Material der Steinartigen.	αt	β	$\alpha t + \beta = s_1$	Relative Größen s_1.
Ziegelsteine . .	0,00022	0,00011	0,00033	1,00
Granit	0,00040	0,00015	0,00055	1,67
Kalkstein . . .	0,00046	0,00013	0,00059	1,79
Sandstein . . .	0,00062	0,00065	0,00127	3,85

Diese Zahlen zeigen, daß in freiliegenden Betonmassiven die geringsten Volumenänderungen bei Verwendung von Steinschlag aus Ziegelsteinen erhalten werden.

In Wirklichkeit aber läßt der Beton gewisse elastische Verlängerungen zu.

Annehmend, daß die oben erhaltene elastische Verlängerung der Grundfläche der Mauer $s = l\,(\alpha t + \beta)$ sich gleichmäßig längs ihrer ganzen Grundfläche verteilt, so wird sich die entsprechende Spannung der Zugkräfte im unteren Teil der Mauer durch

$$p = \frac{E \, . \, s}{l} = \frac{E \, . \, l\,(\alpha t + \beta)}{l} = E\,(\alpha t + \beta) = E \, . \, s_1 \quad . \; . \; . \quad (\text{m})$$

ausdrücken, worin E der Ausdehnungskoeffizient des Betons gegen Zug ist.

Die Gleichung (m) zeigt, daß bei den gemachten Voraussetzungen die geringsten inneren Spannungen sich in einer Mauer, welche über eine geringste relative Längeänderung s_1, bei einer Gleichheit aller übrigen Bedingungen, verfügt, zeigen werden.

In Wirklichkeit erscheint bei einer Verbindungsbedingung der elastischen Mauer mit dem ungleichartigen Fundament die Verteilung von Zugkräften vollständig unbestimmt. Deswegen kann die Frage über die äußerste Länge der blinden, mit dem Fundament verbundenen Mauern, wie oben erwähnt, nur auf Grundlage praktischer Ergebnisse erläutert werden.

In dieser Hinsicht ist der Beton, im allgemeinen gesagt, für eine Temperaturerniedrigung sehr empfindlich.

Annehmend, daß die Enden einer Betonleiste unbeweglich befestigt sind, so werden bei Temperaturerniedrigung der Leiste auf t Grad in einem beliebigen Querdurchschnitt gewisse Zugkräfte erscheinen, deren Spannung $p = E \, . \, \alpha \, . \, t$, worin E der Elastizitätskoeffizient des Betons gegen Zug und α der Ausdehnungskoeffizient ist, sein wird.

Die höchste, das Sprengen der Leiste hervorrufende Temperaturerniedrigung wird aus vorhergehender Gleichung erhalten werden, wenn p eine Grenzgröße der zeitweiligen Festigkeit des Betons gegen Zug, d. h. wenn $t = \frac{p_{max}}{E \cdot \alpha}$, erreicht.

Nach dieser Formel, die Zahlen der Tabellen 17 und 19 benutzend, sind in beifolgender Tabelle 28 die äußersten Temperaturerniedrigungen, welche ein Sprengen der Betonkörper mit befestigten Enden hervorrufen, ausgerechnet.

Tabelle 28.

Betongemenge.	Prüfungsfristen. In Wochen.	Elastizitätskoeffizient. kg pro 1 qcm.	Zeitweilige Festigkeit gegen Zug. kg pro 1 qcm.	$t^0 = t_0 - t_1$
1. 1 T. Zement, 3 T. Sand, 5 T. Kies und Steinschlag	58	98 000	9,1	11,5
2. 1 T. Zement, 2 T. Sand, 3 T. Kies und Steinschlag	58	280 000	24,9	11,0
3. 1 T. Zement, 1 T. Sand, 1 T. Kies und Steinschlag	58	250 000	13,1	9,0

In Wirklichkeit schwanken im nördlichen Rußland die Aenderungen der äußeren Temperatur in den Grenzen von 50 bis 55°; deswegen kann man beschließen, daß eine beständige Befestigung der Betonmauern mit dem Fundament als eine sehr ungünstige Bedingung für die Bewahrung ihrer Monolität erscheint.

Nach Maßgabe einer Verringerung der Haftkraft der Mauer am Fundament wird sich der schädliche Einfluß der Gründung verringern, und die Bedingungen zur Bewahrung der Monolität der Mauer werden sich jenen vorteilhaftesten Bedingungen, in welchen sich ein auf Rädern freiliegendes Betonmassiv befindet, nähern.

In der Praxis können ähnliche günstige Bedingungen zur Bewahrung der Monolität der Betonmauern durch Anwendung von plastischen Zwischenschichten zwischen den Mauern und ihren Gründungen erzielt werden.

Um diese Frage gewissermaßen zu erläutern, wollen wir zulassen, daß die Gründung *ag*, Abb. 30, und die über der Erde befindliche Mauer *ac* in der Durchschnittsfläche *ab* nicht verbunden sind.

Ferner nehmen wir an, daß infolge eines gleichmäßigen Trocknens des Betons und infolge einer Temperaturerniedrigung desselben die Mauer ihr Volumen verringert und eine Form *acdb* erhalten hat.

Wollen wir in einer Entfernung x vom Querschnitt der Mauer *ac* einen

vertikalen Querdurchschnitt mn machen und die Bedingungen eines statischen Gleichgewichts des abgeteilten Teiles $acmn$ der Mauer bestimmen.

Bei einer gleichmäßigen Volumenverringerung der Mauer ac wird ihr längs der Absatzfläche des Fundaments ab gleiten. Deswegen wird sich, bei Abwesenheit eines Verbandes zwischen der Mauer und dem Fundament, der Einfluß des Fundaments an auf den betrachteten Teil der Mauer durch eine in der Fläche ab erscheinende gewisse Reibungskraft R ausdrücken.

Die Größe R wird sein:

$$R = f \, . \, P, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(A)}$$

worin f der Reibungskoeffizient beim Gleiten des Betons der Mauer längs der Absatzfläche der Gründung, B das Gewicht des betrachteten Mauerteiles ist. Wenn wir das Gewicht eines Kubikmeters Beton durch g kg bezeichnen, die Höhe und die Dicke der Mauer durch h und e Meter, so wird

$$R = f \, . \, g \, . \, h \, . \, e \, . \, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(B)}$$

Die Kraft R, welche in der Fußfläche der Mauer wirkt, wird in bezug auf den betrachteten Mauerteil als eine exzentrische Zugkraft erscheinen.

Wollen wir zulassen, daß die Wirkung der Kraft R im Querdurchschnitt mn das Erscheinen einer gewissen inneren Kraft M, Abb. 30, welche eine Resultante aller im Querdurchschnitt mn erscheinenden inneren Kräfte bildet, hervorrufen wird.

Wollen wir die Kraft M in eine Horizontal- und Vertikalkomponente T und N zerlegen.

Falls wir den Teil der Mauer $mdbn$ in Gedanken abwerfen, den Einfluß desselben auf den betrachteten Mauerteil $acmn$ durch die Wirkung der Kräfte T und N ersetzend, so wird im allgemeinen der abgeteilte Teil der Mauer $acmn$ als ob einer Wirkung folgender äußeren Kräfte unterworfen sein: der Belastungskraft P, der in einer gewissen Entfernung y vom Punkte n verwendeten Gegenwirkung der Gründung P_1, der Reibungskraft R und der Seitenkräfte T und N.

Für ein statisches Gleichgewicht des abgeteilten Mauerteils $acmn$ ist es notwendig, daß:

1. die Projektionssumme aller dieser Kräfte auf die Vertikal- und Horizontalachsen gleich null ist, und

2. daß die Momentsumme aller Kräfte in bezug auf den Punkt n gleich null ist.

In gegebenem Falle werden sich diese Bedingungen durch folgende Gleichungen ausdrücken:

1. $P - P_1 - N = 0,$
2. $T - R = 0,$
3. $T \, . \, on - \frac{P \, . \, x}{2} + P_1 \, . \, y = 0.$

Aus den Gleichungen (2) und (A) folgt:

$$T = R = f \, . \, P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

d. h. die Größe T wächst mit der Vergrößerung des Reibungskoeffizienten f, beim Gleiten der Wand längs der Gründung, und mit der Vergrößerung des Gewichtes der Mauer.

Infolge einer Exzentrizität der Kraft R werden sich bei einer Volumenverringerung der Mauer die größten Zugkräfte an der unteren Kante zeigen, womit auch das Erscheinen von eigenartigen Rissen, welche sich in Versuchen von Considère beim Trocknen der oberen, mit 3 tägiger Unterbrechung, Abb. 9, aufgetragenen Betonschicht ergaben, erklärt wird.

Bei einer Gleichartigkeit des Gründungs- und Mauermaterials und bei gleichen äußeren Bedingungen bezüglich der Feuchtigkeits- und Temperaturwechsel können die Mauer und ihre Gründung als ein ganzer Monolith, welcher sich mit dem Boden berührt, betrachtet werden. Falls man hierbei nur die Reibung zwischen dem Fundamentabsatz gg, Abb. 30, und dem Boden in Betracht zieht, so wird sich in gegebenem Falle der Einfluß des Bodens auf den ganzen Monolith durch das Erscheinen einer Festigkeit gegen das Gleiten des Fundamentabsatzes längs dem Grund ausdrücken.

Tabelle 29.

Der Boden der Gründung.	Reibungskoeffizient.
Fels	0,70—0,80
Granit, grob geschlagen	0,65
Trockener Ton, Sand, Kies	0,50
Feuchter Ton	0,30

Nach Ergebnissen von Poncelet[46]) sind die Bedeutungen des Reibungskoeffizienten f für Bruchsteinmauerwerke in der beigelegten Tabelle 29 angeführt.

Auf Grund alles Betrachteten kann man beschließen, daß nach Maßgabe einer Verringerung der Haftkraft und des Reibungskoeffizienten zwischen der Mauer und der Gründung sich der schädliche Einfluß der Gründung verringern wird und die Bedingungen zur Bewahrung einer Monolität der Mauer sich jenen vorteilhaftesten Bedingungen, in welchen sich ein auf Rädern freiliegendes Betonmassiv befindet, nähern werden.

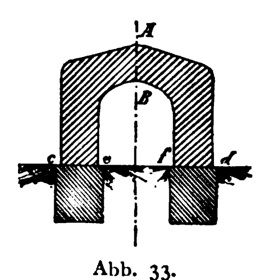


Abb. 33.

B. Freistehende Betongewölbe bedeutender Länge, Abb. 33.

In gegebenem Falle wird sich jede Hälfte des Gewölbes (Ac und Ad)

[46]) Préaudeau: Procédés généraux construction travaux d'art, S. 55 und 57.

in bezug auf den Einfluß des Fundaments unter gleichen Bedingungen, wie die betrachtete separate Betonmauer, befinden.

Eine größte Länge des Monolitgewölbes wird bei einem möglichst geringen Verbande der Widerlager mit den Gründungen, längs den Flächen *ce* und *fd*, erhalten werden.

C. Ein weit komplizierteres typisches Beispiel konstruktiven Einflusses der umgebenden Atmosphäre auf die Betonbauten stellen massive Futtermauern, Abb. 34, dar.

In diesem Falle sind dem Erddruck das Fundament und die ganze zur Erde gerichtete Mauerfläche *cf* ausgesetzt. Deswegen muß bei einer Volumenverringerung der Mauer ein gewisser Widerstand sich nicht nur von seiten des Fundaments, sondern auch von seiten der an die Mauer sich anlehnenden Erde zeigen.

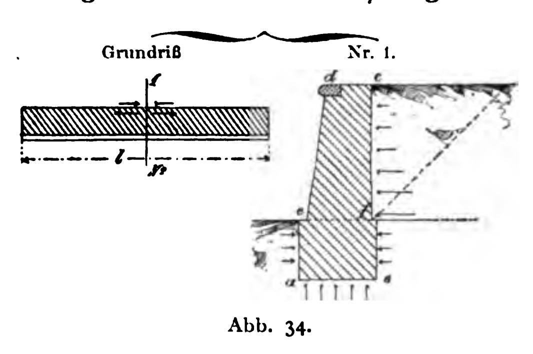


Abb. 34.

Bei einer totalen Symmetrie aller Bedingungen werden die größten Zugkräfte, bei einer gewissen, die Monolität der Mauer sichernden Länge *l*, im mittleren Durchschnitt der Mauer *AB* erscheinen. Anderseits wird dieselbe an die Mauer sich anlehnende Erdmasse die Bewahrung einer konstanten Feuchtigkeit und Temperatur der inneren Mauerfront befördern.

Deswegen kann bei einer großen Mauerstärke eine bedeutende Differenz der Feuchtigkeits- und Temperaturbedingungen in Mauerhaupt und in der inneren Mauerfront eintreten.

Bei einer geringen Wärmeleitung haben die schroffen Veränderungen der äußeren Temperatur hauptsächlich auf das Mauerhaupt einen großen Einfluß. Diese Frage ist im letzten Kapitel betrachtnt.

Allgemein gesagt, erscheint der betrachtete Fall weit komplizierter, als der vorhergehende; deswegen kann die äußerste Länge der Futtermauern nur auf Grundlage praktischer Ergebnisse bestimmt werden.

Bei der Kanalanlage in Chikago[47]) wurde in den Betonfuttermauern, mit einer Gesamtlänge von 3500 m, über 15 bis 18 m (50 bis 60 Fuß) ein Einschnitt gemacht. Weitere Beobachtungen zeigten, daß bei äußeren Temperaturwechseln bis 55° C. in den Mauern, bei ihrer geringsten Stärke von 1,82 m (6 Fuß), in der Mitte einer jeden solchen, durch zwei künstliche Vertikalrisse begrenzten Strecke sich Vertikalrisse bildeten. Deswegen soll man zur Sicherung einer Monolität der mit den Gründungen verbundenen Futter-

[47]) Engineering 1897. — Journal of the Western Society of Engineers 1901, S. 563.

mauern als größte Länge der blinden Strecke der Mauer nicht mehr als 9 m (30 Fuß) annehmen.

Die Praxis und zahlreiche Beobachtungen an starken Betonmauern in England und Amerika zeigten, daß, bei einer Veränderung der äußeren Temperatur bis 55° C. die größte Länge der blinden Futtermauern, bei denen kein Erscheinen von Vertikalrissen beobachtet wurde, bis 12 m (40 Fuß) angenommen werden kann;[48]) aber für eine totale Sicherung der Monolität darf die Länge der blinden Strecken in Futtermauern 6 bis 9 m (20 bis 30 Fuß)[49]) nicht übersteigen.

D. Als typisches Beispiel eines Einflusses der Konstruktionsbedingungen, ähnlich wie bei Futtermauern, können Poternen mit Erdaufschüttungen, Abb. 35, dienen.

In gegebenem Falle, bei bedeutenden Feuchtigkeits- und Temperaturwechseln im Innern der Poterne, steht eine jede Hälfte des Gewölbes, bezüglich des Einflusses des Fundaments und der sich anlehnenden Erdmasse, unter gleichen Bedingungen, wie die Futtermauern.

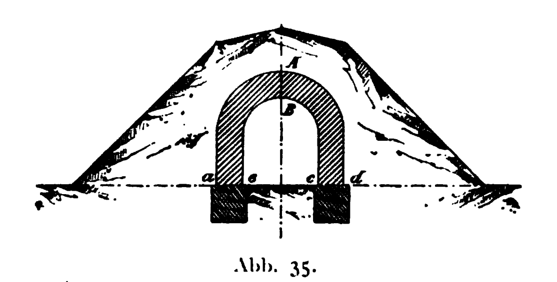


Abb. 35.

Deswegen werden sich die günstigsten Bedingungen zur Bewahrung der Monolität bei einer möglichst großen Gewölblänge durch einen geringsten Einfluß der Fundamente und der Erdaufschüttung auf eine freie Volumenänderung des Betons beim Trocknen oder bei Temperaturerniedrigung ergeben, was erzielt werden kann: 1. durch eine gänzliche Abteilung des Fundaments von der Widerlageraufmauerung vermittels Zwischenschichten, und 2. durch eine Verringerung der Reibung der Erde an der Außenseite der Poterne vermittels betreffender Bewerfung und Abreibung des Mauerhauptes.

E. Als letztes Beispiel eines Einflusses der Konstruktionsbedingungen auf die Monolität kann eine unterirdische runde Betonröhre oder mit einem anderen geschlossenen Querdurchschnitt, Abb. 36, dienen.

In diesem Falle ist die Außenseite der Röhre einem gewissen Bodendruck unterworfen. Bei einer bedeutenden Versenkungstiefe der Röhre kann man zulassen, daß dieser Druck in einem beliebigen Durchschnittspunkt konstant bleibt und gleich ist dem Gewicht der Erdsäule über dem Röhrenkopf. Bei solchen Bedingungen wird der Bodendruck auf die Einheit der Röhrenlänge sein:

$$p = \pi \cdot D \cdot q \cdot h,$$

worin: D die äußere Rohrweite, q die Gewichtseinheit des Bodenvolumens, h die Höhe des Bodens über dem Röhrenkopf.

[48]) Newmann: Notes on concrete and works in Concrete, S. 134.

[49]) Sutcliffe: Concrete, its nature and uses, S. 321.

Bei einer Verkürzung der Rohrlänge durch das Trocknen des Betons oder bei einer Temperaturerniedrigung wird sich der Bodeneinfluß in einer Reibung des Bodens an der Außenfläche der Röhre zeigen; die Größe dieses Widerstandes auf die Längeneinheit der Röhre wird sein:

$$r = f \cdot p = \pi \cdot f \cdot D \cdot q \cdot h,$$

worin: f der Reibungskoeffizient des Bodens an der Außenfläche der Röhre sein wird.

Ein voller Widerstand gegen eine Versetzung wird sich für die linke Hälfte der Röhre (Länge der Röhre l) ausdrücken:

$$R = r \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi \cdot f \cdot D \cdot q \cdot h \cdot l}{2}.$$

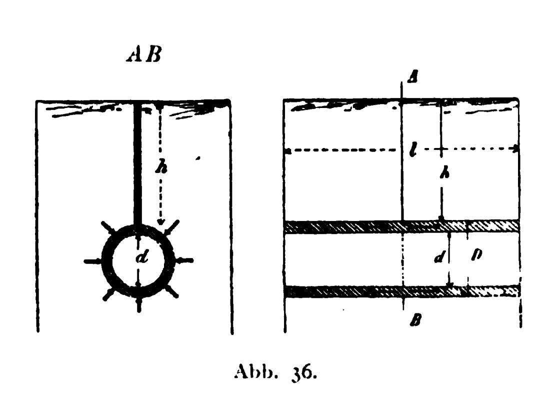


Abb. 36.

Deswegen werden sich bei einer Symmetrie aller Bedingungen größte Zugkräfte im mittleren Röhrendurchschnitt AB zeigen, und die Größe ihrer Komponente wird sein:

$$P = R = \frac{\pi \cdot f \cdot D \cdot q \cdot h \cdot l}{2} \qquad \text{(a)}$$

Wenn wir die Querdurchschnittsfläche der Röhre durch Q, die Zugfestigkeitsgrenze des Betons durch K bezeichnen, so wird sich die Bedingung einer Monolität der Röhre durch die Gleichung

$$\frac{\pi \cdot f \cdot D \cdot q \cdot h \cdot l}{2} = K \cdot Q$$

ausdrücken; hieraus folgt:

$$l = \frac{2\,K \cdot Q}{\pi \cdot f \cdot D \cdot q \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Nehmen wir an: $h = 1000$ cm, $D = 300$ cm, das Gewicht von 1 ccm Erde $q = 0{,}002$ kg, den Reibungskoeffizient des Bodens an der Außenfläche $f = 0{,}5$, die Zugfestigkeitsgrenze des Betons $K = 4$ kg pro 1 qcm, die Rohrweite $d = 200$ cm. Die Zahlen in die Gleichung versetzend, erhalten wir:

$$l = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi (300^2 - 200^2)}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \cdot 300 \cdot 0{,}002 \cdot 1000} = 3{,}32 \text{ m}.$$

2. Ursachen des Erscheinens von Horizontalrissen.

Im VI. Kapitel wurden die Ursachen des Erscheinens von Horizontal rissen und abgespaltenen Stücken längs den Arbeitsschichten in Betonmassiven, welche starken Schlägen oder einer Erschütterung ausgesetzt sind, erläutert.

Die Praxis zeigt, daß das Erscheinen von Horizontalrissen längs den Arbeitsschichten sehr oft in Betonmassiven, welche sich in einer vollen Ruhe befinden, beobachtet wird, wobei die Anzahl und die Breite der Risse mit dem Laufe der Zeit sich vergrößern.

Diese Erscheinung kann auf Grundlage der aus oben Erläutertem folgenden Auffassungen bestimmt werden.

Wollen wir annehmen, daß (Abb. 37) die Betonmauer $abcd$ mit dem Fundament $adgf$ vermittels der Bindekraft des Mörtels verbunden ist.

Wenn wir ferner annehmen, daß infolge einer Temperaturerhöhung und infolge von anderen Ursachen die Mauer $abcd$ nach einer gewissen Verlängerung strebt, so wird sich auf Grund des angenommenen Verbandes in der Berührungsfläche der Mauer mit dem Fundament gegen das Gleiten des betrachteten Mauerteiles $nabm$ ein gewisser Widerstand R zeigen; zugleich werden im entsprechenden Querdurchschnitt mn innere Zerdrückungskräfte, deren Resultante P gleich R sein wird, erscheinen.

Wollen wir ferner annehmen, daß das Gesetz der Verteilung der inneren Druckkräfte im Durchschnitt mn durch eine gewisse Kurve MN sich ausdrücken wird und daß die Aufmauerung aus vier Arbeitsschichten I, II, III und IV besteht. Bei einer unbedeutenden Höhe der Arbeitsschichten kann man die Wirkung aller inneren Kräfte, welche durch das Diagramm $mMNn$ bezeichnet werden, durch die Wirkung der konzentrierten Kräfte T_1, T_2, T_3 und T_4, welche die Resultanten der inneren Druckkräfte für jede Schicht einzeln bezeichnen und in den entsprechenden Punkten O_1, O_2, O_3 und O_4 angelegt sind.

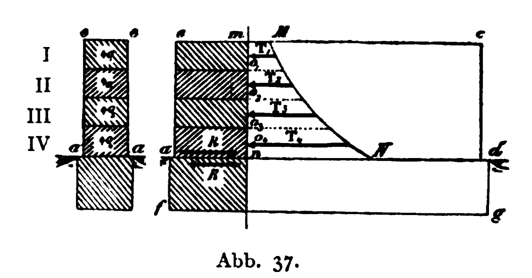


Abb. 37.

Die Resultante R, welche den Einfluß des Fundaments auf die Mauer bezeichnet, erscheint als eine exzentrische Kraft; deswegen werden sich, im allgemeinen gesagt, die inneren Kräfte im Durchschnitt mn ungleichmäßig verteilen, weswegen bei einer gleichmäßigen Höhe der Schichten die Resultanten T_1, T_2, T_3 und T_4 einander gleich sein werden. Unter solchen Umständen werden sich in den Berührungspunkten zweier Grenzschichten Spaltkräfte bilden, welche gleich T_1, $(T_1 + T_2)$, $(T_1 + T_2 + T_3)$ und $(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$ sind. Diese Kräfte werden ein Gleiten der Arbeitsschichten an den Flächen mit geringerem Widerstand hervorrufen.

Im VI. Kapitel wurde erläutert, daß bei angewendeten Aufführungsarten von Betonbauten die Bruchfestigkeit der Arbeitsschichten eine geringste ist deswegen ist es natürlich, daß in mit dem Fundament verbundenen Mauern bei jeglicher Volumenänderung der Mauer eine Abblätterung der Massive beobachtet wird.

Je schwächer der Verband zwischen der Mauer und dem Fundament, d. h. je geringer der Einfluß des Fundaments auf eine freie Volumenänderung der Mauer ist, desto geringere innere Spannungen müssen in einer Betonschüttung eintreten und eine desto geringere Abblätterung wird die Mauer zeigen.

Vermittels dieser allgemeinen Berechnungen kann man folgende Erscheinungen, welche in Betonfestungsbauten beobachtet werden, erklären.

Die größte Anzahl durchgehender Horizontalrisse wird in Mauern freistehender Traverse, welche auf Betonwallgängen, Abb. 38, ruhen und nach Süden gerichtet sind, beobachtet.

Bei der Bedingung eines Verbandes der Traverse mit dem Wallgang, welcher ein Fundament vorstellt, ruft ein jegliches Streben der Traverse zu einer Volumenänderung infolge des Trocknens des Betons oder einer Temperaturveränderung einen gewissen Widerstand von seiten des Wallgangs hervor.

Bei solchen Bedingungen erscheinen: 1. das Streben der Traverse zu einer Abteilung vom Wallgang und zu einem Gleiten längs den Flächen (*ab*), 2. das Erscheinen von inneren Zug- und Druckkräften, welche durch die Gleitfestigkeit längs dem Wallgang hervorgerufen werden. Traverse werden in letzter Reihe aufgeführt, und ihr Verband mit dem Wallgang in den Flächen *ab* erscheint geringer, als zwischen Arbeitsschichten in monolithen Traversaufführungen; deswegen wird in der Praxis erst eine gänzliche Abteilung der Traverse vom Wallgang in den Flächen *ab* beobachtet.

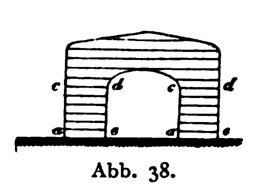


Abb. 38.

Infolge eines bedeutenden Gewichts der Traverse und einer Abwesenheit von plastischen Zwischenschichten entwickelt sich bei weiteren Längeänderungen der Traverse in den Gleitflächen *ab* eine bedeutende Reibungskraft. Deswegen müssen auch nach Erscheinen eines ersten Horizontalrisses längs dem Fuß der Traverse entsprechende innere Spannungen entstehen. Wenn hierbei die Länge der Traverse eine ihre Monolität sichernde Grenzgröße nicht übersteigt, so gibt es keine Ursachen zum Erscheinen von Vertikalrissen.

Aber eine Festigkeit gegen Abblätterung längs den Arbeitsschichten ist bei einer Gleichheit aller übrigen Bedingungen abhängig: 1. von der Größe der Berührungsfläche der Grenzschichten und 2. von einem vertikalen Druck auf die Oberfläche der Schichten.

Ein weit schärferer Uebergang von größten Flächen zu kleinsten ergibt sich in der Widerlagerfläche, Abb. 38; deswegen erscheint das Eintreten eines folgenden Horizontalrisses in dieser Fläche am wahrscheinlichsten. In weiterem ist alles über Traverse Gesagte vollständig anwendbar für erhaltene freistehende Massive, wodurch eine Zunahme der Anzahl von Horizontalrissen mit dem Laufe der Zeit auch erklärt wird.

Auf Grundlage des in diesem Kapitel Erläuterten kann man folgende Beschlüsse ziehen:

1. Zur Sicherung der Monolität der Betonbauten müssen die Grenzdimensionen derselben den Konstruktionsbedingungen, den Eigenschaften des Betons und den meist möglichen Feuchtigkeits- und Temperaturwechseln streng entsprechen.

2. Monolithe Betonbauten größter Dimensionen sind möglich bei einem geringsten Einfluß der Konstruktionsbedingungen auf eine freie Volumenänderung des Betons.

3. Als vorteilhaftester Steinschlag zu monolithen Bauten, welche bedeutendem Temperatur- und Feuchtigkeitswechsel ausgesetzt sind, gilt: solcher aus Ziegelstein und dann aus Granit und Kalk; und

4. Zur Beseitigung eines Erscheinens von Horizontalrissen (Abblätterung) ist notwendig eine Anwendung jener Aufführungsarten, welche eine größte Gleichartigkeit der mechanischen Eigenschaften des Betons in allen Richtungen sichert.

In der Praxis wird eine Ausführung dieser Bedingungen erzielt: 1. durch möglichst geringere Unterbrechungen bei der Aufschüttung der Arbeitsschichten, 2. durch Auflockern der Fläche einer jeden Stampfschicht und 3. durch eine der Höhe der Arbeitsschichten und dem Betongemenge entsprechende Stampfarbeit.

VIII. Aufführungsarten, welche die Bewahrung einer Monolität der Betonbauten sichern.

Die Frage über die Auswahl der betreffenden Konstruktionen und Aufführungsarten, welche die Monolität der massiven Betonbauten sichern, fordert zuallererst eine Bestimmung der äußersten Dimensionen eines jeden einzelnen Massivs in Abhängigkeit: 1. von den Eigenschaften des Betons als Baumaterial und 2. von den Bedingungen, unter welchen sich die Aufführung befinden muß.

Die Aufführung von Monolithen bedeutender Dimensionen fordert eine Einrichtung von Betonfabriken mit großer Produktivität bei einer unbedingten Bedingung, daß die Schüttung ununterbrochen geschieht, was eine Notwendigkeit der Einführung von Nachtarbeiten und überhaupt eine kompliziertere Organisation der Arbeiten hervorruft. Wenn z. B. ein Monolith von 9 Faden Länge, 7 Faden Breite, 1 Faden Höhe, bei einer Höhe einer jeden Schicht 0,06 Faden, mit Unterbrechungen zwischen jeder Schicht von

nicht mehr als 1,5 Stunden aufgeführt wird, so muß die Produktivität der Betonfabrik für jede Stunde nicht weniger als

$$\frac{0{,}06 \cdot 9 \cdot 7}{1{,}5} = 2{,}52 \text{ Kubikfaden}$$

ausmachen.

Die Arbeit muß aber im Laufe von

$$1{,}5 \cdot \frac{1}{0{,}06} = 25 \text{ Stunden}$$

vollbracht werden.

Deswegen ist es in jedem einzelnen Falle sehr wichtig, die geringsten Dimensionen des Monoliths in Abhängigkeit von den Bedingungen, welchen der Bau genügen muß, zu bestimmen.

So z. B. ist bei Festungsbauten die Massivheit eines jeden einzelnen Monoliths abhängig von der Wirkungskraft der feindlichen Geschosse und von spezialen Bestimmungen der Bauten.

Bei Erläuterung der Frage betreffs der äußersten Dimensionen der Betonmassive ist es außer den im vorhergehenden Kapitel betrachteten Bedingungen notwendig, folgende Erörterungen in Betracht zu ziehen.

In komplizierteren Bauten, als welche Festungsbauten in der Art von bogenartigen Gewölbkasematten mit an selbige dicht angeschlossenen Betonmauern erscheinen, erhält man ungleiche Bedingungen für die verschiedenen Teile dieser Aufführungen. So z. B. sind Brustwehrmauer, Traverse und Bedeckungen verschiedener Art den unmittelbaren Schlägen und starken Erschütterungen ausgesetzt, aber die Stützmauern der Kasematten und alle inneren Teile befinden sich unter günstigeren Bedingungen. Ebenso kann sich die Belastung beim Uebergang von einem Teil zu einem angrenzenden scharf verändern, infolgedessen sich der Druck der Teile auf den Boden gleichfalls scharf verändern kann.

Alle aufgezählten Bedingungen haben in bedeutendem Grade einen Einfluß auf die Monolität der Betonbauten.

In den vorhergehenden Kapiteln wurde erläutert, daß bei einer Gesamtwirkung der ungünstigen inneren und äußeren Bedingungen im Betonmassiv sehr bedeutende Spannungen, welche seinen nützlichen Widerstand verringern und eine Zerstörung hervorrufen können, erscheinen können.

Deswegen ist es, im allgemeinen gesagt, für eine Bewahrung der Monolität der Betonbauten notwendig, Maßnahmen zu einer möglichen Schwächung des Einflusses ähnlicher ungünstiger, schädliche Spannungen hervorrufender Bedingungen zu treffen.

Praktisch kann diese Frage nur gelöst werden bei Anwendung des Prinzips einer möglichst größeren Unabhängigkeit jener Aufführungsteile, welche sich unter verschiedenen Bedingungen befinden.

Diese Bestimmung wird teils durch die Anwendung von Betons verschiedener Gemenge, in Abhängigkeit von jenen Festigkeitsforderungen, welche an jeden einzelnen Aufführungsteil gestellt werden, ausgeführt.

Auf diese Weise erscheint kraft ökonomischer Auffassungen eine Störung der idealen Monolität, in Bedeutung einer Gleichartigkeit des Gemenges und der Eigenschaften des Betons, in Massiv-Betonbauten unvermeidlich.

Bei solchen Bedingungen muß man das Streben der Betonbauten zur Erhaltung einer sichtbaren Monolität als unbegründet erklären, weil ein in der Praxis mögliches Gebinde zweier verschiedengehaltigen Betonmassive sich stark unterscheiden wird von einem Gebinde der Teile eines jeden in Einzelheit genommenen Massivs. Außerdem haben eine Verschiedenartigkeit des Betongemenges und eine nicht gleichzeitige Aufführung zweier angrenzenden Massive unvermeidlich einen ungleichen Einfluß der äußeren und inneren Bedingungen auf die Massive zur Folge.

Deswegen wird das Bestehen irgend eines Gebindes ähnlicher Massive nicht nur als eine ungünstige Bedingung für die Bewahrung der erforderlichen Monolität erscheinen, sondern wird auch in jedem verbundenen Massiv das Eintreten innerer Spannungen, welche den äußeren Kräften jenen sichtbaren Widerstand, welchen die Massive bei Abwesenheit des erwähnten Gebindes leisten könnten, verringern, hervorrufen.

Auf diese Weise erscheint in Wirklichkeit eine Zergliederung der Betonbauten unvermeidlich in Abhängigkeit:

1. von den Grenzdimensionen der Massive, welche durch die Eigenschaften des Betons, die äußeren Bedingungen, d. h. Temperatur- und Feuchtigkeitswechsel, und von den Konstruktionsbedingungen, z. B. Einfluß der Fundamente, der anlehnenden Erde usw., und 2. von der Bestimmung eines jeden Teiles bei der Bedingung eines geringsten Einflusses auf die angrenzenden Teile der Aufführung.

Zur Erläuterung alles Gesagten ist in beifolgenden Zeichnungen, Abb. 39 bis 46, eine annähernde Lage der Einschnitte in einer Betonlegung bei Aufführung von einem Teil einer Uferbatterie gezeigt.

Bei Anwendung zu gegebenem Falle des oben angeführten Prinzips einer möglichst größeren Unabhängigkeit jener Aufführungsteile, welche sich unter verschiedenen Bedingungen befinden, kann man folgende Beschlüsse, welche die Konstruktion und die Aufführungsart der betrachteten Betonbatterie bestimmen, fassen:

1. Bezüglich des Einflusses der äußeren Temperatur und der Feuchtigkeit stehen die Gewölbdeckungen der Kasematten und ihre Frontmauern und die Traverse unter den ungünstigsten Bedingungen. Traverse haben eine größte Abkühlungsfläche und sind in Abhängigkeit von ihrer Lage bezüglich der Weltgegenden einer ungleichmäßigen Erwärmung ausgesetzt. In Gewölben und Frontmauern der Wohnkasematten wird während der

Winterzeit an den Außen- und Innenflächen eine bedeutende Temperaturdifferenz bemerkt. Aber innere Mauern befinden sich unter den günstigsten Bedingungen, welche eine Bewahrung ihrer Volumenbeständigkeit fördern. Außerdem sind während der Aufführungsperiode die Feuchtigkeits- und Temperaturbedingungen für über der Erde stehende Teile der Mauer stark verschieden von jenen Bedingungen, in welchen sich die Fundamente befinden.

2. Bezüglich der Einwirkung äußerer Kräfte stehen die einzelnen Teile einer Aufführung gleichfalls in verschiedenen Bedingungen. Den größten Schlägen und Erschütterungen sind Brustwehrmauern und Traverse ausgesetzt. Bedeutenden Erschütterungen bei Abfeuerung der Geschosse von

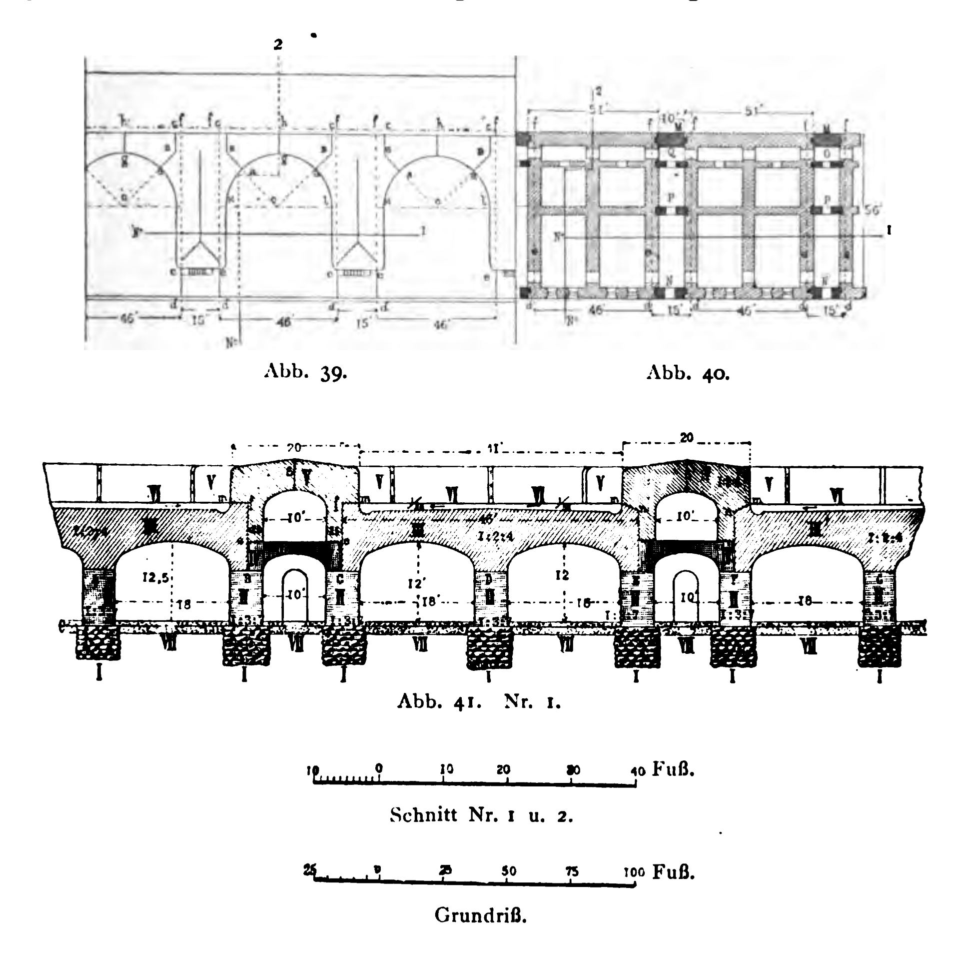


Abb. 39. Abb. 40.

Abb. 41. Nr. 1.

Schnitt Nr. 1 u. 2.

Grundriß.

einer Batterie sind die Decken der Kasematten, welche als Fundament bei der Aufstellung von Geschützen dienen, ausgesetzt.

3. In Abhängigkeit von der erforderlichen Festigkeit und von den ökonomischen Auffassungen wird bei Festungsbauten Beton zweierlei Gehalts verwendet: sogenannter fetter Beton 1 : 2 : 4 und magerer 1 : 3 : 7.

Ersterer wird zur Aufführung von Traversen, Brustwehrmauern und zur Bedeckung von Kasematten, d. h. dem Schlage ausgesetzten Teilen, verwendet; magerer Beton wird zur Aufführung aller übrigen Teile verwendet. Zu Fundamenten wird gewöhnlich billiger Bruchstein gebraucht.

Auf diese Weise ist zum Erhalten einer größten Festigkeit und günstigster Bedingungen für die Bewahrung der Monolität eines jeden einzelnen Teiles der Aufführung notwendig, das Gebinde der verschiedenartigen oder sich unter ungleichen Bedingungen befindenden Teile zu schwächen.

Folglich ist es in gegebenem Falle notwendig, eine möglichst größere Selbständigkeit folgenden Teilen zu geben: den überirdischen Mauerteilen, den Bedeckungen der Kasematten, den Traversen und den Brustwehrmauern.

Eine ähnliche Zergliederung der ganzen Aufführung, ohne Nachteil für ihre Festigkeit, kann vermittels einer Zerteilung der Aufführung in einzelne

Nr. 2.

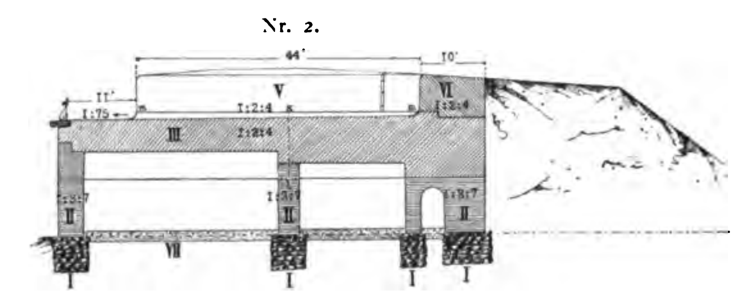


Fig. 42.

Massive, Einschnitte längs den horizontalen und vertikalen Flächen anwendend, erzielt werden. In Abb. 41 und 42, welche Längs- und Querdurchschnitte der Batterie darstellen, sind die einzelnen Massive in der Reihenfolge einer allmählichen Aufführung des Baues durch römische Ziffern mit einer Angabe des Betongehalts bezeichnet.

Außerdem sind vertikale Einschnitte (Abb. 39 und 40) durch die Linien *abc*, *de*, *ef* und *gh* bezeichnet.

Um einen gegenseitigen schädlichen Einfluß zweier verschiedenartiger, durch einen horizontalen Einschnitt getrennter Teile zu verringern, ist es notwendig, den Widerstand gegen ein Gleiten längs der Zerschneidungsfläche zu verringern, was durch Anwendung von Zwischenschichten aus Asphalt oder Dachpappe erzielt werden kann.

In beiliegenden Zeichnungen, Abb. 41 und 42, sind die Asphaltzwischenschichten durch ununterbrochene horizontale Linien dargestellt.

Leider sind keine Versuchsergebnisse bezüglich der Größe des Reibungskoeffizienten beim Gleiten des Betons längs dem Asphalt vorhanden.

In jedem Falle erscheint Asphalt, hinsichtlich seiner Plastizität, Unveränderlichkeit und Wasserdichtheit, für die Verwendung zu Zwischenschichten am geeignetsten.

In der Schnittfläche der Fundamente liegende Asphaltzwischenschichten fördern die Bewahrung einer beständigen Feuchtigkeit in den überirdischen Teilen der Bauten; aber in den Kämpferflächen verhindern dieselben eine Verbreitung von Rissen und starken Erschütterungen aus den Widerlagsmauern und umgekehrt.

Außerdem befördert Asphalt, infolge seiner Plastizität, eine gleichmäßige Verteilung des Druckes in den sich berührenden Teilen und schwächt den schädlichen Einfluß der in Massiven entstehenden Deformationen.

Die Praxis zeigt, daß bei Abwesenheit von horizontalen und vertikalen Einschnitten in Festungsbauten nach jedem 7. bis 9. Faden Vertikalrisse erscheinen. Bei den Forts an der Maas sind ähnliche Risse durchschnittlich nach jeden 20 m (9,40 Faden) bemerkt.[50]

Aus im vorhergehenden Kapitel Gesagtem kann man beschließen, daß bei der Anwendung von horizontalen Einschnitten mit plastischen Zwischenschichten günstigste Bedingungen zur Bewahrung der Monolität der Betonbauten erhalten werden. Deswegen kann man bei Konstruktion eines Systems von horizontalen und vertikalen Einschnitten in Entfernungen, welche oben angeführte Grenzentfernungen zwischen den beobachteten Vertikalrissen nicht übersteigen, die Monolität der Betonbauten als völlig gesichert annehmen. Aber bei einer Bedingung gleicher Festigkeitsstärke wird eine Anzahl von horizontalen Einschnitten die Möglichkeit geben, Betonmassive größerer Dimensionen als bei Massiven ohne denselben aufzuführen.

Auf Grundlage dieser allgemeinen Erörterungen ist in betrachteter Batterie als eine Grenzgröße für die einzelnen Betonmassive 8 Faden (56 Fuß) angenommen.

Bei Bestimmung der höchsten Dimensionen für monolithe Bedeckungen von Kasematten ist es notwendig, die Lage der Traverse auf diesen Bedeckungen in Betracht zu ziehen.

Wenn wir annehmen, daß die linke Traverse, Abb. 41, unmittelbar auf den Massiven III ruht, so wird der Druck des Traversgewichts für 1 Fuß ihrer Länge auf die Zwischenschicht fm sich ausdrücken:

$$P = q \cdot Q = 3{,}5 \cdot \left(\frac{6 + 6{,}75}{2} \cdot 2{,}5 + \frac{12{,}25 + 12{,}5}{2} \cdot 2{,}5 + \frac{7 + 5}{2} \cdot 5 \right) =$$

$$= 5 \cdot 76{,}8 = 268{,}8 \text{ Pud},$$

worin Q eine Fläche der Hälfte des Querdurchschnitts der Traverse ist.

Dieser Druck wird gänzlich auf die Zwischenschicht des Massivs III und seines Widerlagers C übertragen, weswegen ein voller Druck für

[50]) Mahiels: Le béton et son emploi, S. 160.

1 Fuß Länge der bezeichneten Zwischenschicht des Widerlagers C ausgedrückt wird:

$$P_1 = 268{,}8 + q \cdot Q_1 = 268{,}8 \text{ Pud} +$$
$$+ 3{,}5 \cdot \left(10{,}5 \cdot 2{,}5 + \frac{10{,}5 + 5{,}5}{2} \cdot 4{,}5 + \frac{5{,}5 + 5}{2} \cdot 4{,}5\right) = 268{,}8 +$$
$$+ 3{,}5 \cdot 85{,}87 = 268{,}8 + 300{,}5 = 569{,}3 \text{ Pud};$$

hierin bezeichnet $Q_1 = 85{,}87$ die Hälfte der Querdurchschnittsfläche des Massivs III, angenommen, daß die Gewölbdicke am Schlußstein 5 Fuß beträgt.

Wenn wir annehmen, daß der Druck von der Traverse unmittelbar auf das Massiv IV übertragen wird (rechte Traverse, Abb. 41), so wird auch auf dieselbe Zwischenschicht E oder F im Massiv III und in dem Widerlager II nur das Gewicht des Massivs III wirken. Die Stärke dieses Druckes ist, wie oben bestimmt, $P_2 = q \cdot Q_1 = 300{,}5$ Pud, d. h. ist $\frac{569{,}3}{300{,}3} = 1{,}89$ mal geringer als bei einer Traverseaufstellung auf dem Massiv III.

Im Zusammenhang mit der Gleichung (C) des vorhergehenden Kapitels zeigt diese annähernde Ausrechnung, daß zum Erzielen einer möglichst größeren Monolität der Massive III, welche die Kasematten bedecken, eine Uebertragung des Druckes des Traversegewichts auf die Massive IV notwendig ist.

Eine mögliche Unregelmäßigkeit beim Aufstellen der Traverse und gleichfalls Erschütterungen, welchen die Bedeckungen der Kasematten (Massiv III, Abb. 41 und 42) bei Geschoßabfeuerungen oder infolge von Geschoßschlägen in die Massive VI (Brustwehrmauern) ausgesetzt sind, in Betracht ziehend, sind Vertikaleinschnitte kl, Abb. 42 und 39, welche die Massive III in zwei Hälften teilen, wünschenswert.

Ebenso können die Massive VI der Brustwehrmauern mit einer Länge von 46 Fuß vermittels Einschnitte gh, Abb. 39 und 41, zerteilt werden, da bei Erschütterungen in dem schwächeren mittleren Durchschnitt gh das Erscheinen von Rissen möglich ist.

Eine regelrechte Ausführung von Vertikaleinschnitten erscheint als eine wichtige Frage in Gegenden mit feuchtem und kaltem Klima. Ein jeder solcher Einschnitt, welcher eine Fuge zweier angrenzender Massive bildet, erscheint als ein künstlicher Vertikalriß, dessen Breite sich ununterbrochen in Abhängigkeit vom Trocknen des Betons und vom Temperaturwechsel verändert.

So ist z. B. in der zu betrachtenden Batterie, Abb. 41, die Gesamtlänge zweier angrenzender Massive III und IV gleich $46 + 15 = 61$ Fuß.

Annehmend, daß die Größe eines möglichen relativen Trocknens des Betons aus Granitsteinschlag $\beta = 0{,}00015$ ist, der Ausdehnungskoeffizient des Betons gleich dem Ausdehnungskoeffizienten des Granits, d. h. $\alpha = 0{,}0000081$, die größte Temperaturdifferenz im Kern der Massive $t = 30^\circ$,

so erhalten wir, daß eine größte Längeverringerung der Massive III und IV:
$a = 61 \cdot (0{,}00015 + 0{,}0000081 \cdot 30) = 0{,}024$ Fuß $= 0{,}29$ Zoll sein wird.

Deswegen ist bei einer Symmetrie aller Bedingungen eine mögliche größte Ausdehnung eines jeden Einschnitts *ef*, Abb. 41, gleich:

$$\frac{a}{2} = \frac{0{,}29}{2} = 0{,}14 \text{ Zoll } (0{,}35 \text{ cm}).$$

Das in ähnliche künstliche Risse hineinkommende Wasser wird in den Kern der Massive eindringen und beim Frieren eine allmähliche Zerstörung der Massive hervorrufen.

Deswegen erscheint vorteilhaft die Anwendung einer solchen Vereinigung von horizontalen und vertikalen Einschnitten, wobei eine Bedeckung, ein Band der vertikalen Einschnitte bei Bedingung eines geringsten gegenseitigen Einflusses angrenzender Massive erhalten werden kann.

Beispiele eines solchen verbundenen Einschnittes für Traverse sind im Querdurchschnitt der Abb. 41 durch die Linien *efm* und im Plan, Abb 39, durch die Linien *fe* gezeigt.

Wenn eine Traverse unmittelbar auf dem Wallgang errichtet ist, so ergibt die Praxis, daß das vom Wallgang abfließende Wasser in die Räume der Traverse eindringt, indem es durch die Risse, welche die Traverse vom Wallgang trennt, durchfließt. Außerdem erscheint eine ähnliche Lage der Traverse sehr ungünstig für die Bewahrung einer Monolität der Massive III, Abb. 41.

Deswegen ist es in jeder Hinsicht meist richtig, den ganzen Druck der Traverse auf die inneren Massive IV, Abb. 41, welche die Poternen bedecken, zu übertragen, indem man in der Traverse Vorsprünge *fm* (Abb. 41, linke Traverse) läßt, um Bedeckungen der Vertikaleinschnitte *fe* zu erhalten.

Es ist wünschenswert, diese Vorsprünge über der Oberfläche des Wallgangs auf 1 bis 1,5 Fuß zu erheben, um in den Massiven (III) entsprechende Kronen *mf*, welche eine Art von Plintusse bilden und ein Eindringen des Wassers in die vertikalen Einschnitte nicht zulassen, zu erhalten.

Um einen Einfluß der Veränderungen des Massivvolumens (III) auf dic Traversen zu verringern, kann man die Kronen von oben durch senkrechte Flächen *mn* (Abb. 41, die rechte Traverse) begrenzen.

Es ist wünschenswert, die vertikalen Einschnitte der gewölbartigen Bedeckungen der Kasematten in den Flächen, welche längs den Widerlagsmauern (Linien *def*, Abb. 39 und 40, und *ef*, Abb. 41) laufen, zu machen.

Die Bedeckungen des vertikalen Einschnitts im Wallgang (*de*, Abb. 39) oder in der Brustwehr sind in Abb. 43 und 44 näher angegeben.

Längs den Querschnitten eines jeden der zwei angrenzenden Massive sind 2zöllige Erhöhungen zur Ableitung des Wassers von dem Einschnitt gemacht; der Einschnitt ist mit einem Eisenstreifen von 5 bis 6 Zoll Breite und $^3/_8$ bis $^1/_4$ Zoll Dicke bedeckt.

Zu einer Befestigung der Streifen und zu einem dichten Anliegen desselben an die Massive können Anker aus $^3/_4$zölligem Eisen dienen, bestehend aus einem Splintbolzen B und einer Spindel a, welche in die Mauer in einer Entfernung von 20 bis 24 Zoll von der äußeren Oberfläche eingelegt wird. Unter den Eisenstreifen kann man, um eine größere Undurchdringlichkeit zu erhalten, eine Unterlage aus Dachpappe machen; die Ankermutter anschraubend, kann man einen festen Verschluß des Einschnitts erhalten.

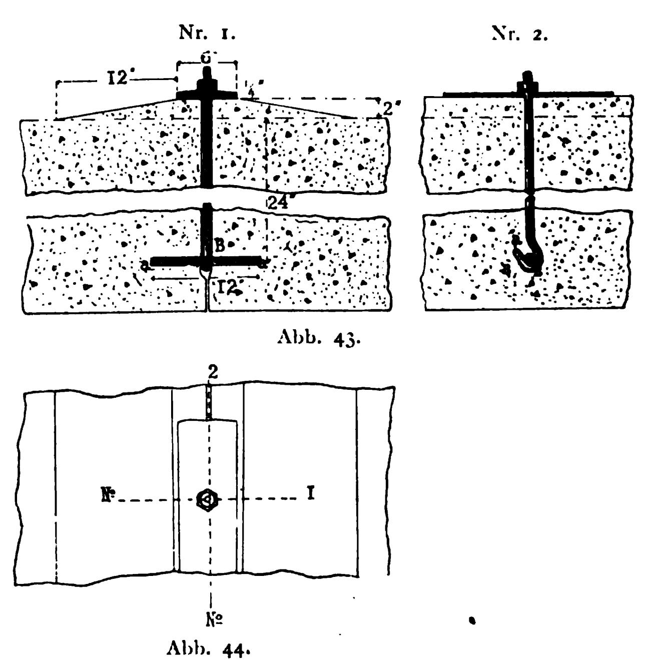


Abb. 43.

Abb. 44.

Eine andere einfachere Art, um die Vertikaleinschnitte vor einem Wassereindringen zu bewahren, ist in Abb. 45 hnd 46 angeführt.

In diesem Falle kann der Eisenstreifen durch gebrandmarktes Eisen ersetzt werden.

Vertikale Einschnitte des Mauerhauptes sind so auszuführen, damit eine totale Geschlossenheit und Unzerreißlichkeit der die Kasematten und Kellerräume schützenden Mauern nicht zerstört wird.

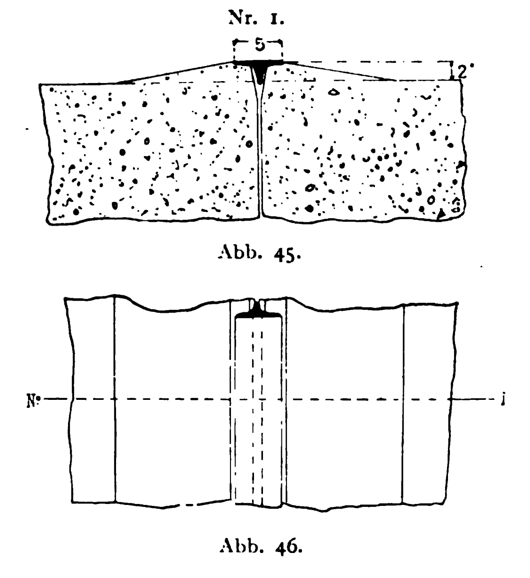


Abb. 45.

Abb. 46.

Um dieser Bedingung zu genügen, muß man die vertikalen Einschnitte so ausführen, daß die Flächen der den Poternen entsprechenden Mauerfront M und N abgeteilt werden.

Um durchgehende Risse bei einer Verkleinerung dieser Flächen zu vernichten, kann man eine Verbindung der Mauern N und M mit den Kasemattenwänden vermittels eines Spuntes, wie in Abb. 40 gezeigt, machen. Die inneren Quer-

wände P und Q, welche einem geringeren Einfluß des Wechsels der äußeren Temperatur und der Feuchtigkeit ausgesetzt sind, können mit den Längsmauern gleichfalls vermittels eines Spuntes verbunden werden.

Bei einer solchen Lage der vertikalen Einschnitte, Abb. 40, werden jede zwei Kasematten, welche einem Geschoßlager entsprechen, eine ganze monolithe Gründung aus einer Reihe von Längs-Querwiderlagsmauern, au. welche sich eine gleiche monolithe Bedeckung der Kasematten stützt, bilden Gleichfalls wird auch eine jede Traverse und eine jede Bedeckung der Poterne ein einzelnes Monolith bilden.

Für das Ableiten des Wassers vom Wallgang längs den Leisten *m*, Abb. 41 und 42, ist es wünschenswert, Rinnen mit einer Senkung zum Wallgang einzurichten; von einem meist höchsten Punkte, welcher dem Zentrum des Geschoßlagers entspricht, können Neigungen zu den angeführten Rinnen gemacht werden.

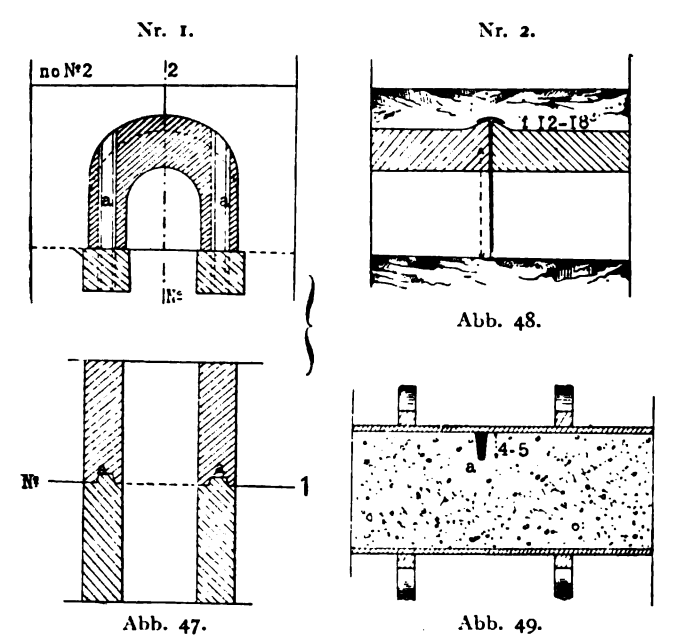


Abb. 47.

Abb. 48.

Abb. 49.

In langen Poternen wird eine Entfernung zwischen den Vertikaleinschnitten auf Grundlage vorhergehender Erörterungen berechnet.

Um durchgehende Risse in den Widerlagsmauern zu vernichten, können die Verbindungen angrenzender Flächen vermittels eines Spuntes gemacht werden, indem man zur Erzielung einer freien Schwindung eines jeden Poterneteiles Furchen *a* (Abb. 47) einrichtet. Von oben kann der Einschnitt gleich dem, wie in Abb. 43 und 44 gezeigt ist, bedeckt werden; bei einer Erdbeschüttung der Poterne (Abb. 48) kann der Einschnitt mit einem Bleistreifen oder einem Streifen aus verzinktem Eisen bedeckt werden.

In starken Widerlagsmauern wird gewöhnlich anstatt von durchgehenden Vertikaleinschnitten die Bildung von schmalen Spalten, 3, 4, und 5 Zoll tief vom Mauerhaupt, als genügend angesehen. Hierzu werden in einer ganzen Mauerhöhe in die Betonschüttung dünne Holz- oder Eisenleisten (*a*), 3, 4 und 5 Zoll breit, Abb. 49, eingebracht.

Eine ähnliche Einrichtung eines Einschnitts ist auf jenen Auffassungen begründet, daß in starken Widerlagsmauern mit einer sich an die Erde

anlehnenden Seite das Mauerhaupt einem größten Einfluß der Wechsel der äußeren Temperatur und der Feuchtigkeit ausgesetzt ist; aber die ganze die Erde berührende Betonmasse bewahrt eine Temperatur- und Feuchtigkeitsbeständigkeit. Deswegen wird bei schroffem Wechsel der äußeren Temperatur ein größtes Schwinden in jener Betonmasse, welche sich an das Mauerhaupt anlehnt, beobachtet, infolgedessen auch durch ein ähnliches Schwinden des Betons hervorgerufene Risse sich allmählich von der Oberfläche ins Innere der Massive verbreiten müssen. Bei solchen Bedingungen bestimmen ähnliche nicht tiefe künstliche Spalten, sozusagen, die Stellen der natürlichen Risse voraus, deren weitere Vergrößerung vollständig von den äußeren Bedingungen und den Eigenschaften des Betons abhängig ist.

Eine ähnliche Erklärung der Frage kann man in bezug auf Festungsmauern auf Grundlage folgender Auffassungen nicht als regelrecht ansehen.

1. In den vorhergehenden Kapiteln 2 und 7 wurde erklärt, daß ein jegliches Gebinde angrenzender, sich in verschiedenen Bedingungen befindender Massive in einem jeden einzelnen innere, die Festigkeit der Massive gegen die Wirkungen der äußeren Kräfte erniedrigende Spannungen hervorruft. Deswegen ist es natürlich, daß ein durchgehender künstlicher Einschnitt günstiger ist, als ein natürlicher Riß, welcher nur in jenem Moment, in welchem die Spannungen der inneren Kräfte die Grenze der zeitweiligen Festigkeit des Betons gegen Zug erreicht haben, sich bildet.

2. Bei einer bedeutenden Länge der Mauern sind in der Praxis Unterbrechungen während der Arbeit unvermeidlich; deswegen erscheint eine Verbindung der Unterbrechungsflächen, als schwächste Querdurchschnitte, mit den Einschnittsflächen als ganz natürlich.

3. Wenn die Schüttung bei einer verhältnismäßig niedrigen Temperatur gemacht wird, so ist es notwendig, um die inneren Spannungen in der Mauer, welche bei einer weit höheren äußeren Temperatur erhalten werden können, möglichst zu verringern, die Einschnitte mit einer gewissen bestimmten Breite zu machen.

Wollen wir annehmen, daß drei nach der Länge gleiche Betonmassive A, B und C (Abb. 50) durch vertikale Einschnitte m und n geteilt sind. Wenn die Aufführung bei einer Temperatur von 0° gemacht ist, so wird sich, bei Erhöhung der Temperatur der erhärteten Massive bis $+30°$, die freie Verlängerung eines jeden Massivs, bei einer Länge eines jeden $l = 15$ m, ausdrücken:

Abb. 50.

$$a = \alpha \cdot t \cdot l = 0{,}0000081 \cdot 30 \cdot 15 = 0{,}0036 \text{ m}.$$

In gegebenem Falle ist der Ausdehnungskoeffizient α des Betons aus Granitsteinschlag gleich 0,0000081 angenommen.

Wenn die Breite eines jeden Einschnitts m und n gleich oder größer sein werden, als die oben erhaltene Verlängerung des Massivs, $a = 0{,}0036$,

so werden bei solchen Bedingungen die Massive A, B und C aufeinander keinen Einfluß ausüben. In jedem Massiv werden bei der Ausdehnung gewisse innere Druckkräfte, in Abhängigkeit von der Verbindung der Massive mit den Fundamenten, erscheinen (s. Kapitel VII). Wenn aber die Breite der Einschnitte m und n kleiner als die Verlängerung des Massivs ist, so wird der Einfluß der äußersten Massive A und C auf das mittlere B durch ihre Festigkeit gegen eine Ausdehnung des Massivs B ausgedrückt werden, infolgedessen in den Massiven neue entsprechende Druckkräfte erscheinen werden.

So z. B., wenn wir annehmen, daß das Betongemenge 1 : 7, der Elastizitätskoeffizient des Betons beim Druck zum Schluß einer dreimonatlichen Frist $E = 160\,000$ kg pro 1 qcm (s. Tabelle Nr. 17) ist, so wird bei einem festen Widerstand die Spannung innerer Druckkräfte im mittleren Massiv auf die angrenzenden Massive: $p = E \cdot \alpha \cdot t = 160\,000 \times 0{,}0000081 \times 30 = 38{,}9$ kg pro 1 qcm sein.

Diese Spannung wird sich mit jenen Spannungen der inneren Druckkräfte, welche im Massiv durch die Bedingung seiner Verbindung mit dem Fundament hervorgerufen werden, summieren.

Deswegen ist es natürlich, daß bei ähnlichen Bedingungen ein nützlicher, sichtbarer Widerstand des mittleren Massivs geringer sein wird, als ein Widerstand eines gleichen, aber dem Einfluß der angrenzenden Massive ausgesetzten Massivs.

Auf diese Weise kann bei der Anwendung von durchgehenden Einschnitten in Mauern und übrigen massiven Bauten eine größte Festigkeit derselben nur in dem Falle erzielt werden, wenn die Breite der Vertikaleinschnitte jener höchsten Temperatur entsprechen wird, deren Wirkung die Bauten ausgesetzt sein können.

Bei einer Schüttung während einer höchsten Temperatur kann man eine dichte Berührung der Grenzmassive zulassen.

In solchen Fällen ist es zum Erzielen eines möglichst geringeren Gebindes der einzelnen Massive wünschenswert die Unterbrechung der Einlegung mit einem Seifenmörtel oder mit einem flüssigen Tonmörtel zu bestreichen, um dadurch eine Verbindung der neuen Schicht mit der erhärteten zu vermeiden.

Zur Beseitigung eines Durchfließens des Wassers durch die durchgehenden Einschnitte in starken Widerlagsmauern, aber gleichfalls zur Erhaltung einer festen Verbindung der einzelnen Mauerteile ist es wünschenswert, die Einschnitte in Spuntform, wie oben für Widerlagsmauern der Poternen (Abb. 47) angegeben ist, zu machen.

Die vorhergehenden Beschlüsse werden durch folgende Ergebnisse der Praxis bewiesen:

Betontrottoire, Dielen und Pflaster, welche ohne Einschnitte von betreffender Breite gelegt sind, bauchen beim Erwärmen und Annässen aus

und geben nachher einen eigentümlichen Bruch mit erhobenen Rändern, Abb. 51. Ein ähnlicher Fall wurde in Chikago während der Ausstellung beobachtet; an Betontrottoiren, welche ohne einen Einschnitt im März bei einer niedrigen Temperatur gelegt wurden, waren im Mai mit dem Eintreten der Hitze Ausbauchungen zu sehen, und dieselben gaben Brüche mit einer Randerhebung von 30 bis 40 cm (Abb. 51).[51]

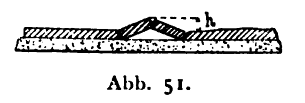


Abb. 51.

In der Tonindustrie-Zeitung (1900, S. 58) ist ein Zerstörungsfall eines 100 m langen Betonsockels, welcher bei niedriger Temperatur (im März) aus Betonstücken von 1,5 m Länge mit einer dichten Ausfüllung der vertikalen Fugen mit fettem Zementmörtel gebaut war, angeführt; die Querschnitte des Sockels stützten sich auf schwer belastete und stark im Boden befestigte Pfeiler. Im Sommer war der Eckstein des Sockels, infolge eines deutlichen Strebens des Sockels zu einer Ausdehnung, gänzlich zerdrückt.

Im selben Journal (1900, S. 59) sind Ergebnisse der Beobachtungen von Betontrottoireausdehnungen in Heidelberg angeführt. Bei einer Gesamtfläche der Trottoire von 3000 qm bestand der Einschnitt aus 7—8 mm breiten Fugen, welche mit einer Mischung aus Birkenteer und fein gemahlenem Kork (Korngröße 5 mm) ausgefüllt waren. Im Sommer wurde diese Ausfüllung durch eine hohe Hitze ausgepreßt (Abb. 52a), aber beim Sinken der Temperatur nahm die Ausfüllung ein in Abb. 52a gezeigtes Aussehen an.

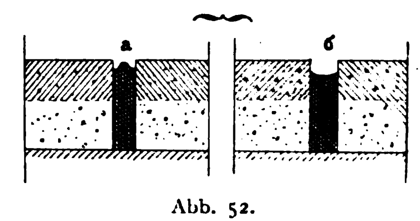


Abb. 52.

Die Praxis ergibt, daß zur Bewahrung einer Monolität der Betontrottoire, Dielen und Pflaster, welche starkem Temperatur- und Feuchtigkeitswechsel bei einer unbedeutenden Dicke des Betons ausgesetzt sind, außer vertikalen Einschnitten auch ein möglichst geringeres Gebinde mit dem Grund als notwendige Bedingung erscheint.

Deswegen ist es z. B. beim Legen von Dielen notwendig, oberhalb der Ziegelschicht oder der kleinen Gewölbe auf den eisernen Balken Zwischenschichten aus sehr magerem Beton, Sand oder Dachpappe zwischen der Diele und seiner Gründung zu legen, um dadurch eine möglichst größere Unabhängigkeit dieser verschiedenartigen Bestandteile, welche sich in verschiedenen Bedingungen bezüglich des Einflusses der Temperatur und der Feuchtigkeit befinden, zu erhalten.

Ein besonders grelles Beispiel einer praktischen Bedeutung des oben erwähnten Prinzips einer möglichst größeren Unabhängigkeit der Teile in Betonbauten, um ihre Monolität zu bewahren, stellen Betonbrücken mit bedeutenden Spannweiten dar.

[51] Tonindustrie-Zeitung 1900, S. 58.

Dieses Prinzip besteht darin, daß man bei Betonbrücken im Bogenschluß und in Widerlagern Zwischenschichten und Scharniere, welche den Einfluß der Pfeiler und aller äußeren Bedingungen auf die monolithen Halbgewölbe bis aufs geringste vermindern, anwendet.

Dieser Einfluß der äußeren Bedingungen auf die Gewölbe besteht in folgendem:

1. Bei der Aufführung eines Gewölbes entsteht eine unvermeidliche Deformation der Gewölbrüstung infolge einer allmählich zunehmenden Belastung durch das Betongewicht, welche eine höchste zum Moment des Einsetzens des Schlußsteins wird. Außerdem ist das Material der Rüstungen — Holz — in Abhängigkeit von den Feuchtigkeitsbedingungen einem bedeutenden Eintrocknen und Schwellen ausgesetzt.

2. Im Moment der Abrüstung entsteht im Gewölbe ein gewisses elastisches Schwinden des Betons, infolgedessen die Länge und der Umriß der Gewölbachse sich verändern müssen.

3. Ebenso können die Pfeiler, einer Wirkung des Gewölbes ausgesetzt, eine gewisse Schwindung oder Verschiebung zeigen, was ebenso eine entsprechende Deformation des Gewölbes hervorrufen muß.

4) Die Veränderung der Temperatur- und Feuchtigkeitsbedingungen ruft ununterbrochen eine Veränderung der Länge und des Umrisses der Gewölbachse hervor.

Eine jegliche Veränderung der erstlichen Länge und des Umrisses der Achse in massiven monolithen Gewölben zieht im Beton unvermeidlich das Erscheinen von inneren Spannungen nach sich, welche sich mit den durch die Belastung hervorgerufenen Spannungen summieren. Bei einer gewöhnlichen Konstruktion der Gewölbe, welche mit den Pfeilern unzertrennlich verbunden sind oder sich mit denselben in den Gewölbfußflächen berühren, können diese nachträglichen Spannungen nicht bestimmt werden, da in ähnlichen Fällen die ganze Konstruktion statisch unbestimmbar ist.

Deswegen wird bei einer praktischen Aufklärung dieser Frage die Gewölbstärke unter den ungünstigsten Voraussetzungen bestimmt, was eine Vermehrung der Materialquantität zur Folge hat und eine weit festere Konstruktion der Pfeiler erfordert.

Die Anwendung von elastischen Zwischenschichten oder Scharnieren bestimmt die Lage der Kurve von Druckkräften im Gewölbe, wofür jene drei Punkte, welche die Scharnierachsen im Schlußstein und in den Kämpfern des Gewölbes vorstellen, vollständig genügen.

Wenn aber die Kurvenlage der Druckkräfte bekannt ist, so kann man in jedem einzelnen Falle alle Spannungen im Gewölbe bestimmen und das Material auf eine vorteilhafteste Weise ausnutzen. Zugleich verringern die Zwischenschichten oder die Scharniere, das Gewölbe in zwei Massive teilend, bis zu einem möglichen Grade den Einfluß der oben aufgezählten äußeren

Bedingungen, welche bei Wegbleiben der Zwischenschichten oder der Scharniere die Monolität der Betongewölbe stören können.

In dieser Hinsicht ist die Monolität der Betongewölbe mit bedeutenden Oeffnungen (bis 50 m) mehr gesichert, als die Monolität aller übrigen Betonbauten, angefangen vom Typus einer freistehenden Betonmauer, ungeachtet einer scheinbaren Konstruktionseinfachheit im letzteren Falle. Wie oben erklärt ist, kann ein schädlicher Einfluß des Fundaments auf eine solche Mauer nur teilweise geschwächt werden durch Anwendung von Zwischenschichten und kann nicht genau ausgerechnet werden.

In nebenstehender Tabelle 30 sind Hauptdaten bezüglich einiger Betonbrücken in Süddeutschland mit der Angabe von Schwindungsgrößen im Schlußstein der Gewölbe nach der Abrüstung angeführt.[52])

In beiliegender Zeichnung Nr. 6 ist eine Betonbrücke (Spannweite



Zeichnung 6.

50,82 m) mit Scharnieren aus Gußeisen, über den Neckar bei Neckarshausen im Jahre 1900 erbaut, gezeigt.

Für die meisten angeführten Brücken war das Betongemenge für die Gewölbe 1 : 2,5 : 5, und nur bei einer Brücke über den Neckar bei Tübingen (Nr. 6) war das Betongemenge 1 : 1,25 : 4,5 und bei der Brücke bei der Station Eggingen (Nr. 2) 1 : 3 : 6.

Bei der Brücke bei Munderkingen (Nr. 17) wurde nach der Abrüstung eine folgende Pfeilerverschiebung bemerkt: in horizontaler Richtung beim linken Pfeiler 6,5 mm, beim rechten Pfeiler 3,6 mm und in vertikaler Richtung 4 und 2 mm.

Beobachtungen des Einflusses der Temperatur im Laufe eines halben

[52]) Stuttgarter Immobilien- und Baugeschäft.

Tabelle 30.

Nummer	Benennung des Ortes	Spannweite; Meter	Gewölbhöhe; Meter	Dicke des Gewölbes; Meter			Zwischenschichten aus Blei; cm			Schwinden am Schlußstein; cm	
				An den Kämpfern	Im gefährlichen Querschnitt	Am Schlußstein	Dicke	Breite An den Kämpfern	Breite Am Schlußstein	Beim Abrüsten	Bei der Belastung
1	Kupferzell	13	1,7	0,60	0,50	0,40	2	10	10	0,9	1,1
2	Station Ehingen	18	3,6	1,0	—	0,45	2	10	10	1,4	1,4
3	über Forbach bei Niederstetten	18	2,0	0,60	0,60	0,50	2	10	10	0,9	—
4	über die Donau bei Ehingen	22	2,2	0,90	—	0,70	2	15	13	0,7	2,5
5	über den Kanal bei Eßlingen	19	1,8	0,45	0,80	0,40	1,8	15	15	0,5	2,9
6	über den Neckar bei Tübingen	23	2,3	0,85	0,85	0,60	2	14	12	3,0	3,5
7	über den Neckar bei Fischingen	22	2,5	0,55	0,70	0,45	2	10,4	9,3	1,4	2,2
8	über die Donau bei Rechtenstein	23	2,5	0,90	—	0,65	2	20	18	1,0	3,5
9	über die Lein	23,1	3,5	0,90	—	0,50	2	15	13	3,0	5,5
10	über den Argen bei Großholzleute	24	2,4	0,60	—	0,50	2	12	10	0,6	2,0
11	über den Neckar	30	3,5	0,75	—	0,50	2	—	11	1,0	2,1
12	über den Argen bei Schlomberg	28	2,8	0,75	0,82	0,62	2	22	15	0,5	1,5
13	über die Eich bei Imnau	30	3,0	0,50	0,80	0,45	0,5	10	10	1,5	3,0
14	über die Tauber bei Markelsheim	30	3,0	0,85	0,86	0,75	2	18	15	1,9	—
15	über den Neckar bei Heimrichheim	38	5,5	0,90	—	0,80	2	15	12	1,7	6,3
							Scharniere:				
16	über die Donau bei Inzigkofen	43	4,38	0,78	1,10	0,70	aus Gußeisen			0,7	3,8
17	über die Donau bei Munderkingen	50	5,0	1,10	1,40	1,00	aus Eisen			7,8	13,2
18	über den Neckar bei Neckarshausen	50,82	4,54	0,90	1,20	0,85	aus Gußeisen			9,1	12,2

Jahres zeigten, daß die Achse des Scharniers am Schlußstein (bei derselben Brücke) sich bei einer Temperaturerniedrigung auf 1° C. auf 1,1 mm senkte.[53]

Also wird sich bei einer möglichen Temperaturdifferenz von 50° die Verschiebung des Schlußsteinscharniers der Brücke bei Munderkingen ausdrücken (Tabelle 30):

$$132 + 55 = 187 \text{ mm}.$$

Beim Fehlen der Scharniere würde eine so bedeutende Deformation des monolithen Gewölbes unbedingt Risse hervorrufen.

Der Ausdehnungskoeffizient, nach den Veränderungszahlen des mittleren Gewölbbogens ausgerechnet, war $\alpha = 0{,}0000088$ bei einem Betongemenge: 1 T. Zement, 2,5 T. Sand und 5 T. Granitsteinschlag. In der Tabelle 9 ist der durchschnittliche Ausdehnungskoeffizient für 5 Sorten Granit durch 0,0000081, bei einer größten Bedeutung $\alpha = 0{,}0000086$, ausgedrückt.

Dieses praktische Beispiel kann als eine Wiederholung der im Kapitel III (Tabelle 10) angeführten theoretischen Erörterungen und Versuchsergebnisse gelten, welche beweisen, daß die Ausdehnungskoeffizienten des Betons und des Materials seiner steinartigen Bestandteile zueinander sehr nahe stehen.

Bei unbedeutenden Spannungen der Betongewölbe wurden vorerst anstatt Scharniere Asphaltzwischenschichten verwendet, was sich bald als untauglich erwies, weil der Asphalt bei hoher Temperatur aufweichte und sozusagen eine Schmiere zwischen zwei Gewölbteilen bildete.

Bedeutende zerschneidende Kräfte, welche bei einer einseitigen Belastung sich bilden, konnten ein Gleiten und eine relative Verschiebung der Gewölbteile hervorrufen. Deswegen werden jetzt in Brücken mit mittleren Spannungen (bis 38 bis 40 m) anstatt Asphalt Zwischenschichten aus Blei, welche über eine größere Druck- und Zerschneidungsfestigkeit als Asphalt verfügen, angewendet.

Infolge seiner Plastizität füllt Blei alle Poren und alle Unebenheiten in den auseinandergeteilten Gewölbteilen mit Leichtigkeit aus, infolgedessen der Druck gleichmäßig auf der ganzen Berührungsfläche des Betons mit der Zwischenschicht verteilt wird. Versuche und die Praxis bestimmen, daß auf gewalztes Blei ein Druck bis 120 kg zugelassen werden kann.

Je geringer die Breite der Zwischenschicht, desto genauer kann im Gewölbe die Lage der Druckkurve bestimmt werden, was auch eine genauere Ausrechnung zur Folge hat. Gewöhnlich beträgt die Breite der Bleizwischenschichten $^1/_5$ bis $^1/_6$ der Gewölbstärke, sich von 10 bis 22 cm verändernd.

In Brücken mit bedeutenden Spannungen (über 40 m) ist der Druck gewöhnlich stärker als die angeführte Grenzgröße der Druckfestigkeit des Bleies, und in solchen Fällen werden Scharniere aus Gußeisen, Eisen oder Stahl gebraucht und in seltenen Fällen aus festen Natursteinen. Diese

---

[53]) Leibbrand, Gewölbte Brücken, S. 63.

Frage ist von Leibbrand in „Gewölbte Brücken" genau erklärt. In beiliegenden Plänen, Abb. 53 bis 56, sind angeführt: in Abb. 53 Type von Zwischenschichten aus Blei, in Abb. 54 Type von Scharnieren aus Stein, in Abb. 55 — aus Gußeisen, und in Abb. 56 — aus Eisen.

Im allgemeinen zeigt die Praxis, daß nach Maßgabe einer Vergrößerung der Spannungen entsprechende Konstruktionsveränderungen der Betongewölbe entstehen.

Wenn die Spannweite die Grenzen, welche eine Monolität des Gewölbes und der mit demselben unzertrennbar verbundenen Pfeiler (Spannungen von 10 bis 12 m) sichern, überschreitet, so wird die ganze Aufführung in drei und nachdem in vier einzelne Massive zergliedert, und werden Maß-

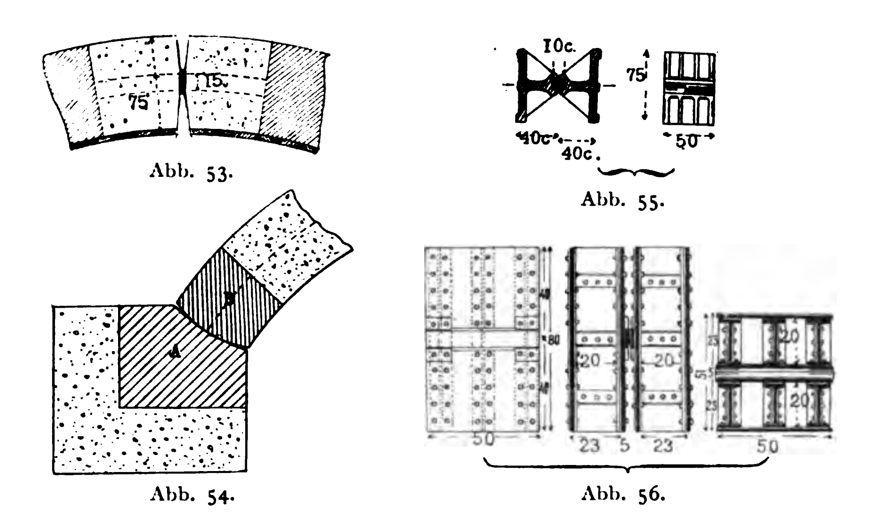


Abb. 53. Abb. 54. Abb. 55. Abb. 56.

regeln getroffen, um den Einfluß aller Bedingungen, welche die Monolität eines jeden Gewölbteiles stören können, möglichst zu schwächen. Hieraus ersieht man deutlich den Uebergang von Zwischenschichten aus Blei, welche ihrer Bestimmung bei mittleren Spannungen (bis 40 m) genügen, zu Scharnieren aus Gußeisen und nachdem zu Scharnieren aus Eisen und Stahl bei Brücken mit größten Spannungsweiten (von 40 bis 50 m).

In Abb. 55 und 56 dargestellte Scharniere wurden bei Betonbrücken bei Inzigkofen (Spannweite 43 m) und bei Munderkingen (Spannweite 50 m) angewendet und unterscheiden sich im allgemeinen durch nichts von Scharnieren, welche zu Metallbogenbrücken verwendet werden.

Auf diese Weise sind zur Bedingung einer Dauerhaftigkeit und Festigkeit der Brücken, ungeachtet der Verschiedenartigkeit der Materialien in gewölbten Betonbrücken, wie auch in Metallbogenbrücken, gleiche Bestimmungen erforderlich: eine möglichst größere Unabhängigkeit der Hauptteile bei der freien Veränderung ihrer Volumen, was in beiden Fällen tatsächlich durch die Anwendung gleicher Scharnierkonstruktionen erzielt wird.

Betonbrücken mit bedeutenden Spannungen zeigen in ihren Aufführungsarten gewisse Eigenartigkeiten.

In dieser Hinsicht ist es notwendig, folgende Auffassungen in Betracht zu ziehen:

1. Bei einer bedeutenden Länge der Spannweite ist keine Möglichkeit vorhanden, gänzlich feste Rüstungen zu errichten, zumal das Material der Rüstungen — Holz — einem Schwinden und Quellen ausgesetzt ist.

2. Beton selbst zeigt bei Erhärtung an der Luft eine Volumenänderung infolge von Trocknen, Temperaturwechsel und Nebenerscheinungen, welche den Erhärtungsprozeß begleiten (Kapitel II, III und IV);

3. Bei in Gewölben mit großen Spannweiten zuzulassenden bedeutenden Druckkräften (bis 40 kg für 1 qcm) ist es notwendig, daß die Aufführung eine möglichst größere Gleichartigkeit besitzt, was durch eine ununterbrochene Aufführungsarbeit von Massiven unbedeutender Dimensionen erzielt werden kann.

Die Aufführung eines Gewölbes muß so gemacht werden, damit der Einfluß dieser ungünstigen Bedingungen möglichst geschwächt wird.

Zur Vernichtung des Einflusses der Deformationen der Rüstungen und zur Verringerung der inneren Spannungen, welche beim Trocknen und überhaupt bei Volumenänderungen des Betons in der Anfangsperiode des Erhärtens erscheinen, wird die Aufführung des Gewölbes in einzelnen Massiven, Abb. 57, mit parallel der Gewölbachse aufgestelltem Querschutze begrenzt, gemacht. Zur Verhinderung eines Quellens der Rüstungen werden die Massive symmetrisch und gleichzeitig in jedem Halbgewölbe aufgeführt, angefangen von den Kämpfern, dem Schlußstein und einem oder mehreren Stützpunkten der Rüstungen, in Abhängigkeit von der Spannungslänge. In Abb. 57 zeigen die Ziffern eine Reihenfolge der Anfüllung von die Formen der Massive bildenden Kasten, wobei in erster Reihe die ungeraden Zahlen in Arbeit kommen. In zweiter Reihe werden die Massive mit geraden Zahlen aufgeführt, und in jedem Halbgewölbe wird der Schlußstein gleichzeitig mit der Packung des mittleren Kastens (*c*) eingesetzt.

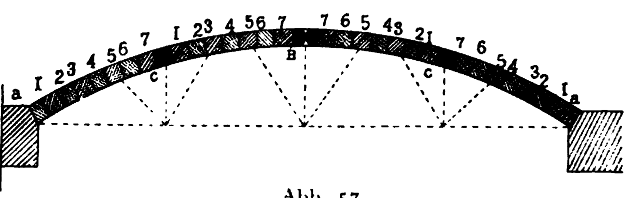


Abb. 57.

Endlich wird im ganzen Gewölbe der Schlußstein eingesetzt, gleichzeitig mit der Packung der Massive, welche an den Scharnieren oder Zwischenschichten bei den Kämpfern (*a*) oder im Schlußstein des Gewölbes (*B*) liegen.

Bei solch einer Aufführungsart wird der Einfluß der Rüstungsdeformationen in möglichem Grade verhindert, und zugleich wird, bei Beachtung der betreffenden Unterbrechungsfristen während der Aufführung der

einzelnen Massive, ein geringster Einfluß auf die Aufführung des Trocknens und aller schädlichen, die Erhärtung des Betons begleitenden Erscheinungen erhalten.

Beim Einsetzen des Schlußsteins eines jeden Gewölbes wird an den Zwischenschichten oder Scharnieren Beton bester Qualität, entsprechend jenen Anstrengungen, welche in diesen Teilen des Gewölbes eintreten müssen, verwendet. In Abb. 53 ist die Art der Einlegung von Zwischenschichten beim Bau der Betonbrücke bei Ehingen gezeigt.[54])

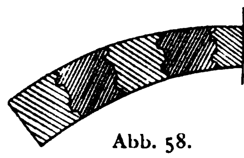


Abb. 58.

Um ein stärkeres Gebinde der einzelnen Massive, welche sozusagen Keile in der Gewölblegung bilden, zu erzielen, kann man die Verbindung derselben vermittels Spunte, wie in Abb. 58 gezeigt, machen.

Zur Verhinderung eines möglichen Trocknens der Rüstungen und des Verdeckes ist es notwendig, dieselben bis zur Abrüstung des Gewölbes mit Wasser zu begießen.

IX. Gesamteinfluß der Feuchtigkeit und des Frostes auf die Monolität der Betonbauten.

In Gegenden mit kaltem und feuchtem Klima üben beiderseitig die Feuchtigkeit und der Frost eine zerstörende Wirkung auf die Betonbauten aus.

Bei einer Temperatur von mehr als null Grad erscheint eine möglichst größere Feuchtigkeit in den Anfangsfristen des Betonerhärtens sehr wünschenswert, weil unter solchen Bedingungen sein Streben, bei Erhärtung an der Luft zu trocknen, geschwächt wird; außerdem wird durch die Feuchtigkeit der äußeren Atmosphäre die Möglichkeit einer raschen Verdunstung aus dem Beton jenes Wassers, welches für den Erhärtungsprozeß nötig ist, beseitigt.

Ein Gesamteinfluß der Feuchtigkeit und des Frostes erscheint für Betonaufführungen gefährlich, wie in den Anfangsfristen nach der Aufmauerung, so auch nach Schluß des Betonerhärtens.

In den Anfangsfristen des Betonerhärtens drückt sich der Einfluß des Frostes durch folgende Erscheinungen aus:

1. Das im Beton befindliche Wasser friert und kann in solchem Zustande auf den Zement keine chemische Wirkung ausüben;

2. eine Temperaturerniedrigung des Betons verlangsamt das Abbinden und das Erhärten des Zements, und

3. die Volumenvergrößerung des Wassers beim Frieren hat eine Zerstörung des Gebindes der Betonteilchen zur Folge.

[54]) Zentralblatt der Bauverwaltung, S. 523.

Zur Beseitigung der aufgezählten ungünstigen Bedingungen werden bezüglich der Bedingungen, unter welchen die Betonschüttung geschieht, in der Praxis folgende Vorkehrungen getroffen.

I. Falls die Betonschüttung bei einer Temperatur unter Null geschieht, so ist es notwendig:

a) die Temperatur der Betonbestandteile zu erhöhen, oder

b) die Gefriertemperatur des Wassers zu erniedrigen.

II. Falls aber die Betonschüttung bei einer Temperatur über Null geschieht und dieselbe während der Abbindungsdauer und der Anfangsperiode des Erhärtens einer Wirkung des Frostes ausgesetzt ist, z. B. in den Nachtfrösten z. Z. der Herbstarbeit, so ist es notwendig, eine der folgenden Maßregeln zu treffen:

a) den Gefrierpunkt des Wassers zu erniedrigen,

b) das Abbinden und das Erhärten zu beschleunigen, oder

c) in der Schüttung eine Temperatur über Null zu bewahren.

Eine Temperaturerhöhung der Betonbestandteile beschleunigt einerseits das Abbinden und das Erhärten des Zements, und anderseits vermehrt sie die Wärmemenge in der Betonschüttung. Deswegen kann eine Erniedrigung der Schüttungstemperatur unter Null zur Zeit einer gegenseitigen Wirkung der nötigen Wassermenge und des Zements, wodurch auch der Beton die erforderliche Festigkeit erlangt hat, eintreten.

Diese Art wurde in mehreren Fällen bei Frösten bis 5° in England und Amerika[55]) mit Erfolg angewendet.

Im allgemeinen wurde die Arbeit folgendermaßen verrichtet: Der Beton wurde in einem warmen Raum bereitet, wobei alle trägen Bestandteile vorher durch einen Dampfstrahl erwärmt wurden. Das durch die Dampfkondensation erhaltene Wasser sättigte vorbeigehend den Steinschlag und den Sand. Die Temperatur des während der Durcharbeitung des Betons zugesetzten Wassers war nicht unter + 15°. Vor der Schüttung des Betons wurden alle Flächen, welche der Beton berühren muß, vom Eis befreit und im Laufe von 15 bis 20 Minuten durch Dampf erwärmt, woraut die Schüttung des Betons rasch vorgenommen wurde. Um das Abkühlen der Aufschüttung zu verringern, wurden alle offenen Flächen derselben mit Strohmatten, Säcken usw. bedeckt.

Je größer das Volumen der Schüttung, desto langsamer schreitet das Abkühlen vor; deswegen ist bei einer Temperatur unter Null solch eine Bauausführungsart von starken Mauern und anderen massiven Bauten hauptsächlich bei einer Möglichkeit, den gebrauchten Dampf für die Erwärmung des Betons zu benutzen, anwendbar.

Zur Erniedrigung der Gefriertemperatur des Wassers wird in der Praxis gewöhnlich Kochsalz gebraucht. Bezüglich der anderen Stoffe, wie

---

[55]) Sutcliffe: Concrete, its nature and uses, S. 169.

z. B. Soda und Zucker, welche ebenfalls die Gefriertemperatur des Wassers erniedrigen, sind keine so bestimmten praktischen Ergebnisse vorhanden.

Aber in dieser Richtung angestellte praktische Versuche erklären nicht ganz die Frage, betreffs der Tauglichkeit von Soda und Zucker, weil bei solchen Versuchen gewöhnlich eine geringere Wassermenge zur Herstellung der Probekörper angewendet wird, weswegen auch der Einfluß des Frostes auf solche Probekörper geringer ist als in der Praxis.

In Wirklichkeit muß man bei Aufführung von Betonbauten einen gewissen Wasserverlust, infolge von Verdunstung, Aufsaugen desselben durch den Steinschlag, Sand und durch die Holzform, in Betracht ziehen. Deswegen ist in der Praxis immer ein gewisser Wasserüberfluß vorhanden, infolgedessen der Frost einen bedeutenden Einfluß auf die nicht erhärtete Betonschüttung ausübt.

Versuche zeigen, daß ein Zusatz von 1 vH. Kochsalz (nach Gewicht) die Gefriertemperatur des Wassers um 0,6 ° C. erniedrigt. Die höchsten in England und Amerika angewendeten Zusätze von Kochsalz zum Wasser erreichen 7 bis 8 vH., was die Möglichkeit gibt, eine Betonschüttung bei — 4 bis — 5 ° zu verrichten.

Der Einfluß des Kochsalzes drückt sich folgendermaßen aus: 1. Vergrößerung der Mörtel- und Betonfestigkeit in den Anfangsfristen ihrer Erhärtung, am Schluß einer Jahresfrist nähert sich ihre Festigkeit derjenigen von mit süßem Wasser angemachten Mörteln und Betons; 2. Vergrößerung der Hygroskopizität des Betons, und 3. Erscheinen eines Anflugs auf den Außenflächen der Bauten infolge eines Salzabscheidens bei Verdunstung des Wassers.

Bei Seebauten ist es möglich, Meereswasser zu verwenden, welches gewöhnlich 2,7 vH. Kochsalz und etwa 0,8 vH. übrige Salze enthält und deswegen bei — 2,5 ° friert.

Zur Verschnellerung des Abbindens und Erhärtens des Betons ist, außer einer Temperaturerhöhung, notwendig eine betreffende Auswahl und ein richtiges Mischungsverhältnis der Betonbestandteile. In dieser Hinsicht ist es am vorteilhaftesten, raschabbindenden Portlandzement guter Qualität und grobkörnigen Sand mit einem geringen Wasserzusatz zu verwenden.

Nach Maßgabe einer Vergrößerung der Sandmenge wird das Abbinden und die Erhärtung der Zementmörtel verlangsamt; deswegen muß man in gegebenem Falle fetten Beton verwenden.

Der Einfluß der Feuchtigkeit und des Frostes auf die erhärtete Betonmasse drückt sich folgendermaßen aus: Bei einer geringen Wärmeleitungsfähigkeit des Betons kann in einer unmittelbaren Atmosphärwirkung ausgesetzten Betonmassiven die Temperaturverteilung nicht gleichmäßig vor sich gehen. Die Temperaturdifferenz zwischen dem Massivkern und den Außenflächen kann sich außerdem infolge einer den Erhärtungsprozeß des Betons begleitenden Wärmeabteilung vergrößern.

Ebenso ist die Verdunstung des freien Wassers in den Außenschichten des Betons eine höchste und verbreitet sich allmählich ins Innere.

Solch ein ungleichmäßiger Wechsel der Temperatur- und Feuchtigkeitsbedingungen hat im Massiv das Erscheinen innerer Kräfte zur Folge, deren Verteilung und Stärke sich von jenem Falle, wo eine gleichmäßige Volumenänderung des Betons beobachtet wird, unterscheidet.

Bei einem raschen Trocknen zeigt die äußere Betonschicht das Streben zu einer Trockenschwindung; aber der Kern der Betonmasse, sich in einem konstanten Zustand befindend, wirkt gegen eine jegliche Volumenänderung der mit ihm unzertrennbar verbundenen äußeren Betonschicht.

Wenn wir bezeichnen: durch E den Elastizitätskoeffizienten des Betons gegen Zug, p die Spannung der inneren Kräfte bei vollem Trocknen, β das relative Trocknen des Betons, l die Länge der betrachteten Mauer, so ist

$$p = \frac{E \cdot \beta \cdot l}{l} = E \cdot \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Falls p größer ist als die Grenze einer zeitweiligen Festigkeit des Betons gegen Zug, so müssen sich am Mauerhaupt Risse zeigen.

Lassen wir zu, daß die Betonmauer am Mauerhaupt einem starken Trocknen unterworfen ist bei einem Mischungsverhältnis des Betons: 1 T. Zement, 3 T. Sand und 5 T. Kies mit Steinschlag.

Für Granitsteinschlag kann man das relative Trocknen annehmen: $\beta = 0{,}00015$; wenn man außerdem zuläßt, daß die Beendigungsfrist der Schüttung 58 Wochen ist, so kann der Elastizitätskoeffizient eines solchen Betons gegen Zug laut Zahlen der Tabelle 19 bestimmt werden:

$$E = 98\,000 \text{ kg pro } 1 \text{ qcm}.$$

Diese Zahlen in die Gleichung (m) setzend, erhalten wir:

$$p = E \cdot \beta = 98\,000 \cdot 0{,}00015 = 14{,}70 \text{ kg pro } 1 \text{ qcm}.$$

Aus der Tabelle 19 ist unterdessen zu ersehen, daß die Grenze einer zeitweiligen Festigkeit des betrachteten Betons gegen Zug 9,1 kg pro 1 qcm ist; folglich müssen sich bei einem so raschen Trocknen am Mauerhaupt durchaus Risse zeigen.

In der nebenstehenden Tabelle 31 sind auf Grundlage der gegebenen aus den Tabellen 18 und 19 und nach Versuchsergebnissen von Considère Spannungsgrößen für verschiedene Betons und Mörtel bei totalem Trocknen angeführt.

Die letzte Kolonne der Tabelle 31 zeigt, daß bei der Bedingung eines totalen Trocknens einem größten Aufreißen ausgesetzt sind: der Bewurf aus reinem Zement und fette Betons; nach Maßgabe einer Magerung der Betons und Mörtel, so auch einer Verlängerung der Fristen verringert sich das Streben zum Aufreißen.

Deswegen muß man, um in Bauten das Entstehen von Rissen zu verhüten, möglichst länger eine dauernde Feuchtigkeit im Mauerhaupt vermittels Annässen, vor Sonne und Wind schützend, anhalten.

Tabelle 31.

Mischungsverhältnis der Betons und der Mörtel.	Fristen; Wochen.	Relatives Trocknen β.	Elastizitäts-koeffizient E; kg pro 1 qcm.	Spannung p; kg pro 1 qcm.	Zeitweilige Festigkeit R; kg pro 1 qcm.	$\frac{p}{R}$
I. Beton:						
1. 1 T. Zement, 3 T. Sand, 5 T. Kies mit Steinschlag . . .	58	0,00015	98000	14.7	9,1	1,6
2. 1 T. Zement, 2 T. Sand, 3 T. Kies mit Steinschlag . . .	58	0,00015	280000	42,0	24,9	1,7
3. 1 T. Zement, 1 T. Sand, 1 T. Kies mit Steinschlag . . .	58	0,00015	250000	37,5	18,1	2,1
4. 500 kg Zement, $^1/_2$ cbm Sand und $^1/_2$ cbm Kies	4	0,00015	213400	31,8	9,5	3,3
II. Mörtel:						
1. Reiner Zement	4	0,0010	180000	18,0	23,8	7,5
2. 600 kg Zement, pro 1 cbm Sand (1 : 3)	4	0,0003	210900	63,3	9,9	6,4
3. 1 T. Zement, 3 T. Sand . .	58	0,0003	314000	94,2	21,8	4,3

Infolge einer geringen Wärmeleitung des Betons befördert ein schroffes Sinken der äußeren Temperatur gleichfalls das Entstehen von Rissen an den Oberflächen der Betonbauten.

Im VII. Kapitel wurde darauf hingedeutet, daß das Temperatursinken einen besonders starken Einfluß auf Beton hat, und in der Tabelle 28 sind Temperaturminima, welche ein Zerreißen der in 58 wöchentlicher Frist erhärteten Betonprobekörper hervorrufen, angeführt.

In der beifolgenden Tabelle 32 sind auf Grundlage gleicher Berechnungen Spannungen, welche in den Außenschichten der Mörtel bei einer raschen Temperaturerniedrigung der Luft bis auf 10 Grad entstehen, ausgerechnet.

Tabelle 32.

Mörtelgehalt.	Fristen; Wochen.	Ausdehnungs-koeffizient α.	Elastizitäts-koeffizient E; kg pro 1 qcm.	Spannungen p; kg pro 1 qcm.	Zeitweilige Festigkeit R; kg pro 1 qcm.	$\frac{p}{R}$
1. Reiner Zement	4	0,000014	180000	25,2	23,8	1,06
2. 600 kg Zement, pro 1 cbm Sand	4	0,000012	210900	25,3	9,9	2,56
3. 1 T. Zement, 3 T. Sand . .	58	0,000012	314000	37,7	21,8	1,73

Zahlen der Tabellen 31 und 32 zeigen, daß scharfe Aenderungen der Feuchtigkeits- und Temperaturbedingungen an den Außenflächen der offenen und beworfenen Betonbauten unvermeidlich das Entstehen von Rissen hervorrufen.

In Gegenden mit feuchtem und kaltem Klima zieht das Bilden von Rissen, infolge einer Gesamtwirkung der Feuchtigkeit und des Frostes, eine weitere Zerstörung der offenen Betonbauten nach sich.

Die Volumenvergrößerung des Wassers ist beim Frieren sehr bedeutend; die lineare Ausdehnung des Wassers beim Frieren kann bestimmt werden $\alpha = 0{,}035$, der Elastizitätskoeffizient beim Schwinden $E = 23450$ kg pro 1 qcm.[56]) Deswegen entsteht beim Frieren des Wassers in einem geschlossenen würfelförmigen Gefäß (Seitenlänge l) auf die Wände ein Druck:

$$p = \frac{E \cdot \alpha \cdot l}{e} = 23450 \cdot 0{,}035 = 820{,}75 \text{ kg pro 1 qcm.}$$

Das Eis verfügt über eine besondere Plastizität und über eine Fließbarkeit, ähnlich wie viele feste Teere. Dank dieser Eigenschaft verändert die, einer anhaltenden Wirkung verhältnismäßig geringer Kräfte unterworfene Eismasse ihre Form, ohne eine Zerstörung zu zeigen. Bei einem langsamen Frieren des die Poren im Betonmassiv ausfüllenden Wassers kann deswegen eine Volumenvergrößerung des Massivs auf die Seite einer geringsten Widerstandsleistung, d. h. nach außen hin, geschehen, oder aber das sich bildende Eis wird alle Unebenen und Zweige der Poren anfüllen.

Bei einem weiteren rascheren Frieren des Wassers wird das sich an der Außenfläche des Massivs gebildete Eis eine Gegenwirkung auf das Austreten des neugebildeten Eises ausüben, weswegen die sich bildende Eismasse, sich in das Innere der Poren ausdehnend, einen entsprechenden Druck auf das nicht gefrorene Wasser verursachen wird. Vermittels dieses Wassers wird sich der ganze Druck gleichmäßig auf die Porenwände übertragen.

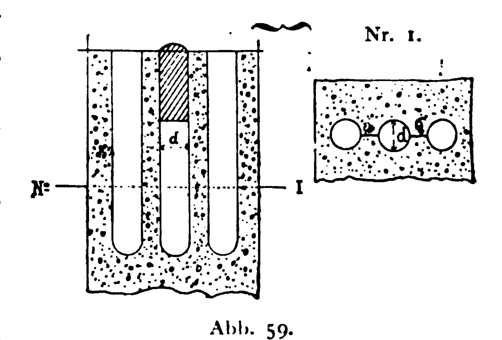


Abb. 59.

Wenn wir die Länge eines solchen Eispfropfens, welcher sich in einer zylindrischen mit Wasser gefüllten Spalte, Abb. 59, gebildet hat, durch l bezeichnen, die Haftkraft des Eises an den Spaltenwänden durch k, den Perimeter eines Querdurchschnitts der Spalte durch C, so wird sich die angeführte Widerstandsleitung des Eispfropfens ausdrücken:

$$R = k \cdot c \cdot l.$$

Zulassend, daß die Querdurchschnittsfläche der Spalte q, aber der

56) Ganot, Physik.

Druck des in der Spalte zusammengepreßten Wassers p ist, so ergibt sich: $R = p \cdot q = k \cdot c \cdot l$ oder

$$p = \frac{k \cdot c \cdot l}{q} \quad \text{. . . . . (1)}$$

Wenn der Durchmesser der zylindrischen Spalte gleich d ist, so erhalten wir:

$$p = \frac{4 \cdot k \cdot \pi \cdot d \cdot l}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot k \cdot l}{d} \quad \text{. . . . . . (2)}$$

Bei Bedingung einer totalen Undurchdringlichkeit der Spaltenwände wird sich der die Wände zerreißende Druck, Abb. 59, auf die Längeneinheit der Spalte ausdrücken:

$$P = p \cdot \frac{d}{2} = 2k \cdot l, \quad \text{. . . . . (3)}$$

d. h. die Kraft, welche die Spaltenwände in den Punkten a und b zerreißt (Abb. 59, Nr. I), wird proportional der Gefriertiefe sein.

Wenn die Durchfrierungstiefe $l = 10$ cm ist, so wird bei einer Haftkraft des Eises an den Spaltenwänden $k = 2{,}8$ kg pro 1 qcm[57])

$$P = 2 \cdot 2{,}8 \cdot 10 = 56 \text{ kg}$$

pro 1 cm Länge der Spalte (Pore) sein.

Wenn im Massiv ein horizontaler, schmaler Riß von a cm Länge und b cm Breite vorhanden ist, so wird der Perimeter des Querdurchschnitts sein: $c = 2a + 2b$, aber die Querdurchschnittsfläche:

$$q = a \cdot b.$$

Deswegen wird sich in gegebenem Falle die Gleichung (1) ausdrücken:

$$p = \frac{k \cdot 2(a + b) \cdot l}{a \cdot b} \quad \text{. . . . . (4)}$$

Zulassend, daß die Länge des Risses $a = 20$ cm, die Breite $b = 0{,}01$ cm, die Tiefe des Durchfrierens $l = 10$ cm, so erhalten wir bei der Bedingung einer totalen Undurchdringlichkeit des Materials:

$$p = \frac{2{,}8 \cdot 2\,(20 + 0{,}01) \cdot 10}{20 \cdot 0{,}01} = 5602{,}8 \text{ kg pro 1 qcm.}$$

Dieser Druck ist stärker als die zeitweilige Festigkeit eines beliebigen Steinmaterials gegen Zug.

Da die Breite eines Risses b im Verhältnis zu dessen Länge a gewöhnlich sehr gering ist, so kann man in der Formel (4) die Dividendsgröße b weglassen; dann ergibt sich:

$$p = \frac{k \cdot 2a \cdot l}{ab} = \frac{2k \cdot l}{b},$$

d. h. bei einem raschen Durchfrieren ist der hydrostatische Druck proportional der Durchfrierungstiefe und umgekehrt proportional der Breite des Risses.

---

[57]) Trautwine. The Civil Engineers Pocket-Book, S. 594.

Auf Grund des Erörterten kann man erklären, weshalb in Wirklichkeit poröse Materialien, wie z. B. guter Ziegelstein, einer geringeren zerstörenden Wirkung der Feuchtigkeit und des Frostes unterworfen sind als Materialien schieferiger Zusammensetzung.

Die Porosität des Materials sichert einerseits ein freies Eindringen des Wassers in den Kern des Massivs bis zum Zustand einer vollen Sättigung; anderseits gibt sie dem Eis eine Möglichkeit, seine Fließbarkeit zu zeigen. Nach Maßgabe der Volumenvergrößerung des sich in Eis verwandelnden Wassers wird der andere nicht gefrorene Teil des Wassers einen freien Weg ins Innere des Massivs haben. Deswegen können sich bei einem allmählichen, langsamen Durchfrieren des Massivs im selben so lange keine inneren Druckkräfte entwickeln, bis die Grenze einer vollen Sättigung des Massivs nicht erreicht ist.

Dieselbe Porosität, die Wärmeleitung des Materials verringernd, läßt eine rasche Abkühlung und ein damit verbundenes Bilden einer bedeutenden Eisquantität, welche eine dem Eis eigene Fließbarkeit beim raschen Frieren des Wassers nicht erreicht, nicht zu.

Versuche von Blümke und Bauschinger[58]) ergaben, daß:

1. die Festigkeit gegen Wirkungen des Frostes sich nach Maßgabe der Näherung der Materialfeuchtigkeit der Sättigungsgrenze verringert;

2. bei voller Sättigung durch Wasser die Materialien während aufeinanderfolgenden Frierens und Tauens Zerstörungskennzeichen zeigen und in einem desto größeren Grade, je größer ihre Porosität ist; und

3. bei Sättigung durch Wasser als fest gegen Frost Marmor und Granit waren.

Die Porosität kann nach Bauschinger nach der für eine Sättigung der Probekörper benötigten Wasserquantität angenommen werden:

1. für Marmor	0	bis	0,2	vH.
2. „ Granit	2,60	„	2,67	„
3. „ Sandstein	11	„	33	„
4. „ Kalkstein	12	„	35	„
5. „ Ziegelstein	30	„	42	„

Freistehende Betonbauten werden gewöhnlich mit Zementmörtel beworfen. Die Porosität der Zementmörtel schwankt in bedeutenden Grenzen und ist in jedem einzelnen Falle von dem gegenseitigen Verhältnis der Bestandteile, ihren Eigenschaften, der Herstellungs- und Verwendungsart des Mörtels abhängig.

Im Kapitel I wurde darauf hingewiesen, daß Mörtel mit einer geringsten Porösität erhalten werden können bei einem gegenseitigen Verhältnis des Zements und Sandes von 1 : 1,5 bis 1 : 5 und in Abhängigkeit von der Dichtung der Mörtel.

---

[58]) Bauschinger, Versuche über die Frostbeständigkeit natürlicher und künstlicher Bausteine.

In jedem Falle erreichen beworfene freistehende Mauern mit einer geringen Senkung die vollste Sättigung leicht bei Regenwetter, und beim Eintreten von Frost und Tauwetter unterliegen dieselben einer allmählichen Zerstörung. Außerdem sind sogar senkrechte Flächen der Betonbauten der Wirkung eines schrägen Regens ausgesetzt. Das abfließende Wasser gerät in die schmalen Risse, welche sich beim Trocknen des Mörtels oder Betons und infolge von Temperaturwechsel bilden. Wie aus angeführten Berechnungen zu sehen ist, muß das Frieren dieses Wassers eine unvermeidliche zerstörende Wirkung auf die Betonbauten ausüben, indem es sich längs den Flächen mit einer geringsten Festigkeit und einer größten Porosität, d. h. längs den Arbeitsschichten, ins Innere verbreitet.

Deswegen ist zur Bewahrung der freistehenden Betonbauten notwendig:

1. Maßnahmen für die Beseitigung eines unmittelbaren Einflusses der umgebenden Atmosphäre auf die Betonflächen zu treffen, zur Bewahrung derselben von einem raschen Trocknen und Abkühlen und einer unmittelbaren Wirkung der Feuchtigkeit.

2. Die horizontalen und gesenkten Flächen müssen mit einem unporösen Material bedeckt sein.

Der ersten Forderung entsprechen Bekleidungen aus dauerhaften natürlichen und künstlichen Steinen. Eine langjährige Praxis zeigt, daß bis zur Jetztzeit nur jene altertümlichen Betonbauten erhalten geblieben sind, an welchen die Bekleidung heil geblieben ist. Von vielen Betonbauten aus der Zeit des römischen Reichs (Pevensey und Richmond in England) oder aus dem XI. und XII. Jahrhundert, wie z B. das Schloß in Jokshire, sind bis jetzt nur jene Teile erhalten, an welchen die Bekleidung nicht geraubt worden ist.[59])

Ziegelstein kann als taugliches und billiges Bekleidungsmaterial der Fronten von Betonmauern dienen. Hierzu kann man über jede gestampfte Betonschicht dicht an die Formenwände doppelte Reihen Ziegelsteine, mit Zementmörtel verbunden, legen und nachdem mit Beton beschütten und die Schicht in so einer Höhe stampfen, daß nach Beendigung des Stampfens eine jede Arbeitsschicht in gleicher Fläche mit der entsprechenden doppelten Reihe der Ziegelsteine ist (Abb. 60).

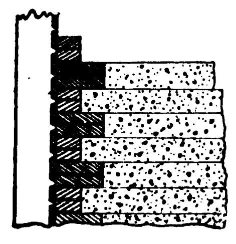


Abb. 60.

Bei solcher Bekleidungsart werden folgende Vorteile erhalten: 1. ein festes Gebinde der Bekleidung mit dem Betonmassiv; 2. eine genügende Dicke der Bekleidung, um das Betonmassiv von scharfen Veränderungen der äußeren Temperatur und der Feuchtigkeit zu bewahren; 3. die Formverkleidung kann aus Brackbrettern ohne ein dichtes Zusammenfügen her-

[59]) Sutcliffe, Concrete, its nature and uses, S. 5 und 6.

gestellt werden, was die Herstellung der Formen bedeutend billiger macht; 4. die Formabnehmung kann verhältnismäßig bald nach Beendigung der Schüttung gemacht werden, da der Beton auch ohne Formen von der unmittelbaren Wirkung der Atmosphäre durch seine Bekleidung geschützt sein wird; und 5. die Remonteausgaben einer Ziegelbekleidung sind niedriger als die Ausgaben für die Erneuerung einer äußeren Zementbekleidung.

Der zweiten Forderung entspricht aber vollständig, die Bewahrung freistehender gesenkter Flächen sichernd, eine Bekleidung dieser Flächen mit einer Asphaltschicht von $^3/_4$ bis 1 Zoll Dicke.

Schluß.

Auf Grundlage alles Betrachteten kann man folgende sich auf die Frage über die Monolität der Betonbauten beziehende Beschlüsse fassen:

1. Den geringsten Volumenänderungen sind magere, poröse Betons, welche aus vollständig gutem, abgelagertem Portlandzement und steinartigen Bestandteilen (aus Ziegelstein, Kalkstein und Granit) bereitet sind, ausgesetzt.

2. Zum Erhalten einer möglichst großen Gleichartigkeit der Betonmassive und zur Beseitigung des Erscheinens von Horizontalrissen ist eine Schüttung des Betons ohne Unterbrechungen und mit einer Auflockerung der Oberfläche der Arbeitsschichten notwendig.

3. Die Grenzdimensionen der Betonmassive sind in jedem einzelnen Falle von den Eigenschaften des Betons, vom Einflußgrad der Feuchtigkeit, der Temperatur und der Konstruktionsbedingungen abhängig. Die größten Dimensionen der Betonmassive können erzielt werden bei einem geringsten Einfluß der Konstruktionsbedingungen auf eine freie Volumenänderung der Betonmassive.

4. In Betonbauten ist eine möglichst größere Unabhängigkeit der einzelnen Teile, welche sich in verschiedenen Bedingungen bezüglich der Belastungskraft und des Einflusses der umgebenden Atmosphäre befinden, notwendig, was durch eine Zergliederung des ganzen Massivs in einzelne Monolithe vermittels Anwendung von horizontalen und vertikalen Einschnitten erzielt werden kann.

5. Zur Bewahrung der freistehenden Betonbauten von einem zerstörenden Einfluß der atmosphärischen Wirkungen sind notwendig:

a) eine starke Bekleidung der äußeren Mauerflächen und
b) wasserdichte Bedeckungen aller übrigen offenen Flächen.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW.

FORSCHERARBEITEN
AUF DEM GEBIETE DES
EISENBETONS



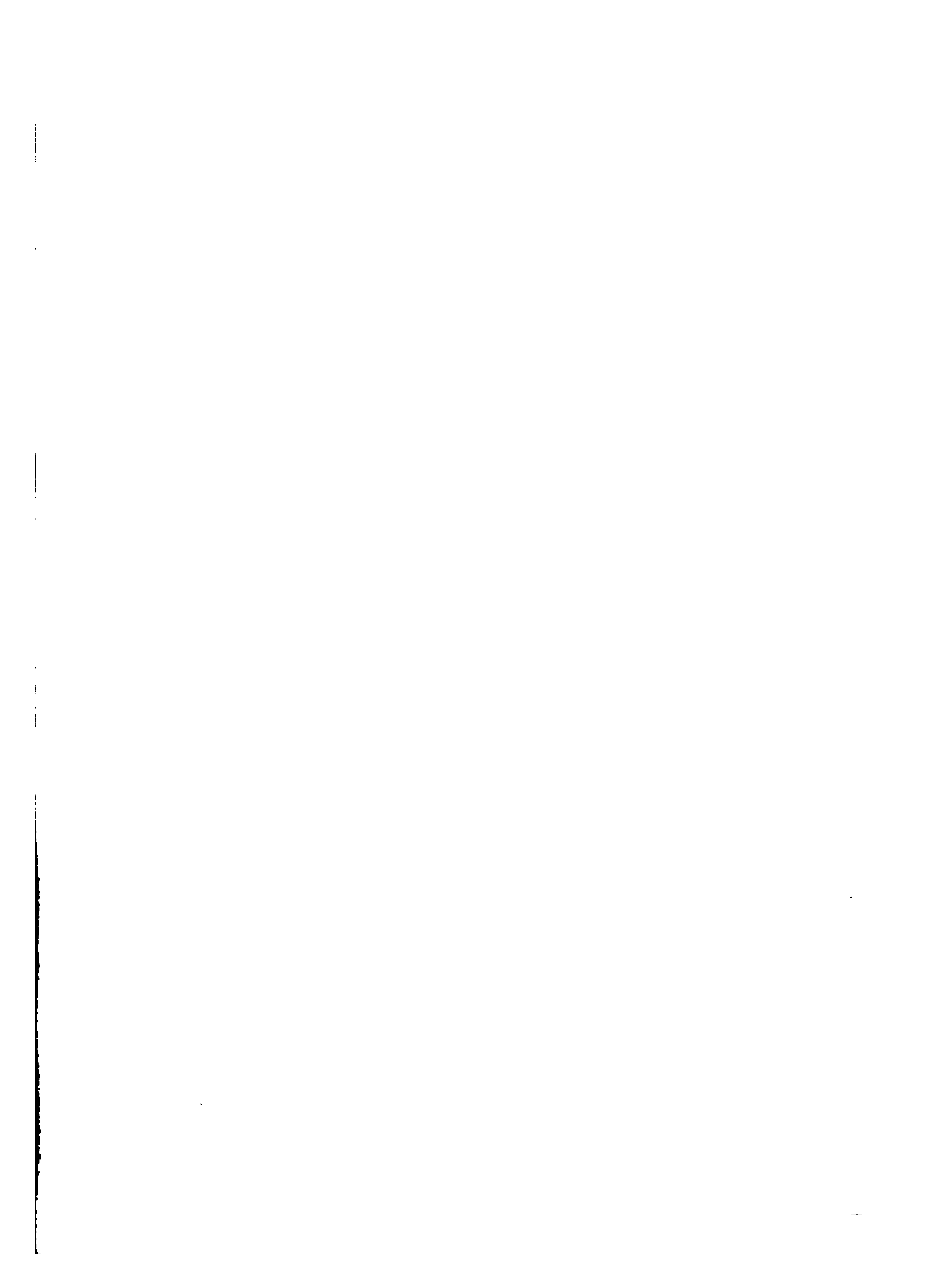
HEFT VIII

PREIS 5 MARK

VON

DR. ING. FRITZ v. EMPERGER
K. K. BAURAT.





Versuche mit Säulen aus Eisenbeton und mit einbetonierten Eisensäulen

in Stuttgart und in Wien

von

Dr. Ing. **FRITZ v. EMPERGER**
K. K. Baurat.

Mit 94 Abbildungen und 7 Tafeln Tabellen.

BERLIN 1908
Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

VORWORT.

Die in folgendem behandelten Versuche mit Säulen sind in ihrer Mehrzahl bei Professor C. v. Bach in Stuttgart und zum kleineren Teile, und zwar später, bei Professor B. Kirsch in Wien ausgeführt worden. Den genannten beiden Anstaltsleitern sage ich meinen tiefgefühltesten Dank für die entgegenkommende Erledigung der ganzen Angelegenheit und die gründliche Behandlung aller dabei auftretenden Fragen, sowie für die Gewährung einer erheblichen Kostenermäßigung. Das Säulenmaterial selbst ist mir im Winter 1901/2 zum Zwecke einer kurzfristigen Erledigung von den Firmen Ed. Ast u. Co., Pittel u. Brausewetter und G. A. Wayss u. Co. zur Verfügung gestellt worden. Ich würde es eigentlich mir und der technischen Öffentlichkeit schuldig sein, eine Erklärung darüber abzugeben, wie es kommen konnte, daß die Ausführung einer so wichtigen Arbeit, die für den damals noch in den Anfängen liegenden Eisenbetonbau von der größten Bedeutung gewesen wäre, so lange Zeit verhindert wurde. Ich glaube aber, daß man den dabei in Frage kommenden Personen zu viel Ehre antut, wenn man sich mit ihnen befaßt. Ich habe die Angelegenheit durch die Sendung einer ganzen Waggonladung von Säulen nach Stuttgart zu einem Abschluß gebracht. Daher beschränke ich mich darauf, an dieser Stelle den genannten, weitblickenden Firmen, die damals die gesamte österreichische Eisenbetonindustrie verkörperten, herzlich zu danken und das von wissenschaftlichem Interesse getragene Entgegenkommen von Professor C. v. Bach als nachahmenswertes

Beispiel hinzustellen. Die späterhin noch untersuchten Eisensäulen sind mir von der Firma R. Ph. Waagner, Biro u. Kurz im Verein mit der Wittkowitzer Berg- und Hüttengesellschaft kostenlos zur Verfügung gestellt worden, und ich hatte nur die Kosten der Einbetonierung und der Versuchsdurchführung zu bestreiten. Ich muß dieses von seiten der Herren Eisenindustriellen mir erwiesene Vertrauen um so höher schätzen, als ich damit ohne Rücksicht auf die bestehenden Konkurrenzverhältnisse zwischen Eisen und Eisenbeton gewürdigt wurde. Zur Bestreitung der Auslagen habe ich noch von seiten des österreichischen Verbandes der Portlandzementfabriken allen nötigen Zement kostenlos und außerdem einen Beitrag von 500 Kronen zu verzeichnen; ein Betrag, der, um falsche Auslegungen zu vermeiden, wohl die Betonierung, aber keinesfalls die Kosten der Versuchsausführung dieser Versuchsgruppe deckt, von deren Kostspieligkeit man sich gewöhnlich keinen richtigen Begriff machen kann. Allen Genannten sage ich für ihre tatkräftige Unterstützung aufrichtig Dank und bin überzeugt, daß das hier Veröffentlichte auch heute noch lange nicht zu spät kommt.

Wien, im Mai 1908.

Dr. Ing. **Fritz v. Emperger.**

INHALTSVERZEICHNIS.



EINLEITUNG.

Das im Nachstehenden ausgeführte Versuchs-Programm umfaßt das gesamte Gebiet der Säulenfestigkeit, indem es alle dabei in Betracht kommenden Einflüsse erörtert und in Betracht zieht. Gerade aber diese Mannigfaltigkeit macht es dem Experimentator zur Pflicht, dieses unbekannte Gebiet an der Hand eines Kompasses, eines Versuchszieles zu betreten, ein Bestreben, das selbstverständlicherweise nicht zur Voreingenommenheit gegenüber den erzielten Tatsachen werden darf. Ich glaube dem Verständnis der vorliegenden Arbeit am besten zu dienen, wenn ich den Leser von diesem meinem Bestreben im voraus verständige, damit er die am Ende der Abhandlung gezogenen Schlußfolgerungen gleich von Anfang an mißtrauisch ins Auge zu fassen und in objektiver Weise zu überprüfen in der Lage ist und so für alle Fälle gewarnt ist, wenn etwa Voreingenommenheit mitspielen sollte. Das Ziel lautet in kurzen Worten: Die volle und gleichzeitige Ausnutzung beider Materialien beim Bruch. Es ist nicht überflüssig, bei diesem Anlasse hervorzuheben, daß die Tragfähigkeit einer Säule und die daraufhin gewählten Abmessungen einzig und allein von ihrer Bruchfestigkeit abhängen und daß diese allein sowie die Sicherheit gegen Bruch uns einen brauchbaren Schlüssel für die gewählten zulässigen Inanspruchnahmen geben. Dies gilt keinesfalls nur von Eisenbeton, sondern von Säulen aus jederlei Material.

Mit diesen Gesichtspunkten scheinen mir die bisher gewählten zulässigen Inanspruchnahmen und die Einbeziehung des ganzen Betonquerschnittes nicht gut vereinbar. Es gilt dies sowohl bezüglich der heute üblichen Ziffern, als auch im verstärkten Maße bezüglich jener Zahlen, wie sie zur Zeit der Verfassung dieses Versuchs-Programms üblich waren. Damals (1900) rechnete man noch mit den Hennebiqueschen Zahlen, 1000 kg für das Eisen und 25 kg für den Beton, das ist eine Übertragung von 40. Heute ist man recht allgemein auf die Übertragungszahl 15 herabgegangen, ohne aber dabei die zulässige Inanspruchnahme des Betons wesentlich zu erhöhen.

Bei 25, höchstens 30 kg/cm² im Beton wird eine Druckbeanspruchung des Eisens von 365 bis 450 kg/cm² zugelassen, d. h. es wird das Verhältnis der

Verkürzungen bis zum Bruch hinauf aufrecht erhalten gedacht und die bei Beton für notwendig gehaltene Sicherheit auf das Eisen übertragen. Die darauf aufgebaute Formel lautet: $P = \sigma_b (F_b + 15 F_e)$, und ergibt sich demnach für die Bruchlast bei einer $n$fachen Sicherheit allgemein

$$nP = n\sigma_b \left(F_b + \frac{E_b}{E_e} F_e\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

abgeleitet aus $\sigma_e = \sigma_b \frac{E_e}{E_b}$. Meine gegenteilige Meinung kommt am besten durch die dementsprechende Formel zum Ausdruck. Nach meiner Meinung ist die Bruchlast einer Eisenbetonsäule die Summe zweier Festigkeiten, die von dem Verhältnis der beiden Elastizitätskoeffizienten nicht abhängt. Der Beton, wenn armiert, erhält analog wie bei Zug auch eine hinreichend große Zusammendrückbarkeit, daß er es dem Eisen ermöglicht, die Bruchspannung aufzunehmen, ohne selbst zerstört zu werden; dieselbe ist aber nicht groß genug, um dem Eisen das Fließen zu gestatten, bevor der Beton nicht selber durch Brucherscheinungen zerstört wird. Es ist also eine Art Wechselwirkung vorhanden und zu berücksichtigen. Bezeichnen wir also die Bruchfestigkeit des Betons mit $n\sigma_b = \sigma_b'$ und die Knickfestigkeit des Eisens mit σ_e', so ist die Bruchlast der Säule $nP = F_e \sigma_e' + \overline{F}_b \sigma_b'$ und demnach die zulässige Last

$$P = \frac{F_e \sigma_e'}{n} + \overline{F}_b \,.\, \sigma_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Unter dem Zeichen $\overline{F}_b$ verstehe ich den vom Eisen eingeschlossenen Säulenquerschnitt, der allein imstande ist, diese Wechselwirkung auszuüben, die Festigkeit der Eisensäule zu vermehren, und verweise zur Begründung dieses von der bisherigen Übung abweichenden Resultates auf die späteren Darlegungen. Die Formel (2) kennzeichnet die Eisenbetonsäule nicht mehr als einen mit Eisen armierten Betonpfeiler, wie das in Gleichung (1) geschieht, sondern als eine Eisensäule, die durch Beton verstärkt und aus gesteift wurde. Das Verhältnis der beiden Inanspruchnahmen wird weiter nicht mehr durch das Verhältnis der Elastizitätskoeffizienten, sondern durch das Verhältnis der beiden Bruchfestigkeiten bestimmt, wobei nicht zu übersehen ist, daß die Druckfestigkeit des Betons durch die Anwesenheit des Eisens eine ganz bedeutende Erhöhung erfahren kann.

Das vorliegende Versuchs-Programm wurde von mir 1900 nach Abschluß meiner diesbezüglichen Studien in Paris zusammengestellt, nachdem es mir gelungen war, mich der einmütigen Unterstützung der damaligen drei Wiener Eisenbetonfirmen und des Stadtbauamtes zu versichern und außerdem noch die schriftliche Erlaubnis für den Gebrauch der Maschinen an der Technischen Hochschule zu erhalten, mit einer mir damals nicht bekannten Reservatio mentalis. —

Wenn ich die Entwicklung meiner Anschauung rückblickend wiedergebe, so habe ich mir zuerst die Frage vorgelegt, welches von den beiden Materialien

für den Bruch ausschlaggebend ist; darüber bestanden die verschiedensten Meinungen. Auf Grund fremder Versuche bin ich in meinem Bericht über die Weltausstellung 1900[1]), unter Zugrundelegung der Gesamtquerschnitte, zu dem Schlusse gelangt, daß die Erhöhung der Druckfestigkeit eine so geringe ist, daß man gut tut, für den Gesamtquerschnitt nur die Würfelfestigkeit des Betons in Betracht zu ziehen. Diese meine Meinung erhielt durch meine Versuche mit Würfeln aus reinem und armiertem Beton im Jahre 1903[2]) keine wesentliche Änderung, bis auf die Annahme, daß sich dieses Verhältnis bei höheren Armaturprozenten ändern dürfte. Dies führte mich dazu, fertige Eisensäulen teilweise ohne Beton, teilweise mit Beton verstärkt schon in mein erstes Versuchs-Programm einzubeziehen, weil diese mir die beste Gelegenheit zu geben schienen, meine Anschauungen, wenn nötig, zu berichtigen. Als diese Versuche im Jahre 1906/7 endlich vorlagen, habe ich nicht gezögert, dieses Material zuerst durch einige Vorversuche 1907 und dann durch eine neue Versuchsreihe 1908 zu ergänzen. Dieselbe beschränkte sich auf Eisensäulen, während ich bezüglich der eigentlichen Eisenbetonsäulen auf das hier erörterte fremde Versuchsmaterial verweise, das ja vollgültige Beweise enthält. Auf diese Weise ergab sich mir die Frage, wie der Querverband zwischen den einzelnen Eisenprofilen beschaffen sein soll, und ich stand zunächst vor einer Lücke in unserm Wissen, da diese Frage auch im reinen Eisenbau nicht geklärt, geschweige denn gelöst ist. Ich habe daher die Arbeit mit den Eisensäulen dahin ausgedehnt. Es gab mir Gelegenheit, experimentell festzustellen, wie der Querverband einer reinen Eisensäule ohne Beton beschaffen sein muß. Das Resultat dieser Arbeit findet sich an anderer Stelle[3]) veröffentlicht vor. Es ist auf die Verhältnisse in Eisenbeton übertragen in kurzem das folgende: Bezeichnen wir die Schwerpunktsentfernung zweier Rundeisen mit α, den Rundeisendurchmesser mit δ und die Säulenlänge mit l, so besteht unsere Aufgabe, wenn wir aus diesen Teilquerschnitten eine einheitliche Eisensäule schaffen wollen, zunächst darin, die Eisenquerschnitte vom Trägheitsradius $\frac{\delta}{4}$ so zu verbinden, daß ein Trägheitsradius des Gesamtquerschnitts von $\frac{\alpha}{2}$ erzielt wird. Nach der bisherigen Theorie sollten hierzu Verbindungen in Abständen $\lambda = \frac{l\delta}{2\alpha}$ genügen. Meine Versuche lassen jedoch schließen, daß bei einer steifen Verbindung **ohne Beton** wohl nicht dieser, **aber der halbe Abstand zur Erzielung einer einheitlichen Eisensäule genügen würde.** Um uns gleich hier Zahlen vor Augen zu halten, wie sie in der Folge in der Versuchsgruppe I vorkommen, so ist bei den vorliegenden Versuchen:

---

[1]) Sieh „Zeitschrift d. Österr. Ing.- u. Arch.-Vereins" 1901 oder die ersten Hefte „B. u. E." 1901.

[2]) „B. u. E" 1903, S. 268.

[3]) „B. u. E." 1908, Heft III, IV, V u. VI.

$\alpha = 130$ mm und $\delta =$	28,	22,	16	und	12 mm,
für $l = 320$ cm, also $\lambda =$	172,	135,	98	„	74 cm,
„ $l = 210$ „ „ $\lambda =$	113,	88,	65	„	48 „
„ $l = 100$ „ „ $\lambda =$	54,	42,	31	„	23 „

Es sei bemerkt, daß dieser Bedingung in meinen Versuchen nicht immer entsprochen worden ist, ohne daß darunter die Bruchzahl gelitten hat. Dieser durch Eisen allein nicht gut erzielbare steife Anschluß wird, wie die Versuche bewiesen haben, durch Beton in so vollständiger Weise besorgt, daß es erlaubt erscheint, die Entfernungen der horizontalen Querverbindungen neuerdings viel weiter zu machen, als sie die Theorie des reinen Eisens verlangt. In den vorliegenden Versuchen ist es natürlich nicht möglich gewesen, sich in die Feinheiten dieser Frage später zu vertiefen, da von vornherein nur auf eine hinreichende Verbindung der Eisen Gewicht gelegt war, so daß zwar immer angenommen werden konnte, daß die **in Beton eingeschlossene Eisensäule zur Aufnahme ihrer vollen Knicklast geeignet konstruiert war** und jenen Überschuß an Zugfestigkeit gegen die Scherkräfte im Betonwürfel liefern konnte, die es ihm ermöglichten, seine volle Druckfestigkeit zu entwickeln. Ob und in welchem Maße dies eingetroffen ist, sollen die folgenden Versuche zeigen. Wir wollen aber an obiger Zahl als Vergleichsmaßstab der gewählten Bügelentfernungen festhalten und nur noch bemerken, daß die Rechnung bei kurzen Säulen ihre Bedeutung verliert, weil die Änderung der Knicklänge fast gar keine Änderung mehr in der Knickfestigkeit zur Folge hat, was hier besonders im Auge behalten werden muß, weil die meisten Säulen nur ein kleines x haben.



Abb. 1.
Bruchbilder der Säulen III u. IV der Gruppe B.

Zum besseren Verständnis dienen zwei neuere Versuche (Abb. 1), die hier vorausgeschickt werden, weil sie uns diese Verteilung beim Bruch besonders anschaulich wiedergeben. Es handelte sich um Glieder eines Säulenversuches der später erwähnten Serie B, die in der Länge eines Knotenabstandes herausgenommen worden waren: Der oben und unten verbundene 1 m hohe Eisenquerschnitt ergab allein eine Druckfestigkeit von 114,7 t oder 2784 kg/cm². Nun habe ich den Zwischenraum zwischen beiden

U-Eisen mit Beton ausgefüllt, den ich fast acht Wochen alt werden ließ. Die Eisen waren an ihren Innenflächen minisiert. Der Beton bekam hiervon das Aussehen einer glatten, wie polierten Fläche. Von einem Zusammenhang zwischen Beton und Eisen konnte also in keinem Stadium der Belastung die Rede sein, und es bestand für das U-Eisen keine Gegenkraft, die es am Ausknicken nach außen gehindert hätte, genau so, wie es ohne Beton geschehen war (sieh Serie B). Die Festigkeit dieses Körpers stieg durch das Einbetonieren auf 126,7 t, und da kein Grund vorliegt, an eine Erhöhung der Eisenfestigkeit zu glauben, so mußte dieser Mehrbetrag von 12 t vom Beton getragen worden sein, das entspricht 132 kg/cm². Wir sehen also in dem Moment vor dem Ausknicken der Eisen dasselbe ebenso wie den Beton bis zu seiner höchsten Druckfestigkeit **gleichzeitig** ausgenutzt. Das Ausknicken der Eisen tritt erst dann ein, wenn die erzielte bleibende Zusammendrückbarkeit des Betons dies erlaubt hat. Das Bild zeigt uns diesen Moment, wo der Beton die Unterstützung der Eisen gegen Scherkräfte verliert und das Eisen des Hindernisses gegen Ausknicken verlustig wird. Die Zerstörung geht also vom Eisen aus, das die regelmäßigen Zusammendrückungen des Betons zunächst mitmacht, ohne seine Tragkraft zu verlieren. Dasselbe sprengt dabei die statisch wertlose Schale ab, wo dieselbe vorhanden ist. Das Eisen gibt dann in dem Maße, als es das Zusammendrücken und Zerstören des Betons gestattet, seine Tragkraft an den Beton ab, während gleichzeitig die Zerstörungserscheinungen vom Beton das Ausknicken der Eisen beschleunigen, so daß ein vollständiges statisches Ineinandergreifen beider gerade beim Bruch festgestellt werden kann, wo von einer Verbundwirkung nicht mehr die Rede ist. Es bleibt damit immerhin nicht ausgeschlossen, daß die ursprüngliche Idee des Verfassers, daß auch die Fließerscheinungen des Eisens, sofern sie frühzeitig auftreten, d. h. sofern der Beton noch nicht genügend hoch beansprucht ist, seine Bruchfestigkeit beeinflussen, unter Umständen Beachtung verdient. Für die ausführliche experimentelle Behandlung dieser letzteren und vieler anderen Fragen war jedoch innerhalb dieser Versuche keine Möglichkeit, da die dort gewonnene Erkenntnis erst eine Vorbedingung für eine gründliche Arbeit nach dieser Richtung war. Es erscheint dem Schreiber dieses wie eine zweite Stufe, die zu erklimmen seine bescheidenen privaten Mittel nicht ausreichen.

Das Vorliegende hat in dieser Hinsicht den Charakter von Vorversuchen, die dazu dienen, nicht selbst alles zu lösen, sondern die Hauptfragen klarzulegen. Zu den entscheidenden Versuchen werden wir aber erst dann gelangen können, wenn wir an den Kern dieser Angelegenheit gelangt sind, also insbesondere wenn die Fachwelt die von mir hier gezogenen Schlußfolgerungen geprüft und sich über die Richtigkeit derselben entschieden haben wird. Es ist auf diesem, einer wissenschaftlichen Behandlung so fremden Gebiete, wie bei einem Weg im Dunkeln. Man muß sich zunächst über die Himmelsrichtung, wohin man gehen soll, klar werden.

Die Versuchsanordnung.

Über die Behandlung der Versuchskörper in Stuttgart schreibt Professor C. v. Bach unterm 21. Juli 1906: „Die Stirnflächen der Körper sind behufs Herbeiführung von Parallelismus der Druckflächen gehobelt worden. Soweit diese Flächen bei der Anlieferung beschädigt waren, wurde vorher eine Schicht aus reinem Zement aufgebracht."

Für die Verläßlichkeit des Bruchresultates ist es meines Erachtens nötig, daß die gewählte Anordnung bis zum Bruch erhalten bleibt. Nur dann darf man sagen, daß dieselbe bei der Bruchfestigkeit zum Ausdruck gekommen ist und daraufhin seine Schlußfolgerung aufbauen. Um darzulegen, wie dies im vorliegenden Fall gedacht war und geschehen ist, sei auf jene Anordnungen verwiesen, die dieses Ziel meines Erachtens nicht vollständig erreicht haben.

An Erfahrungen, wie man das nicht machen soll, fehlt es jetzt nicht mehr, nachdem die sechs Jahre, die bedauerlicherweise verfließen mußten, ehe ich diese Arbeit abschließen konnte, einer Reihe von Forschern Gelegenheit gab, dasselbe Thema aufzugreifen. Es ist naheliegend, daß ich nur das hervorheben möchte, was mir an den besten Arbeiten dieser Art nicht zweckmäßig scheint, um auf diese Weise meine Wahl besser begründen und erklären zu können. Die Arbeit von Prof. Artur N. Talbot[1]) umfaßt Säulen von 1,80 m bis 3,60 m Länge, die mit dem beistehenden Querschnitt (Abb. 2) ausgeführt worden sind. Als Resultat derselben wird uns das Folgende mitgeteilt: „Die durchschnittliche Festigkeit der reinen Betonsäulen hat 109 kg/cm² betragen, die durchschnittliche Festigkeit der armierten Betonsäulen, bezogen auf dieselbe Fläche, hat 123 kg/cm² betragen. Daraus geht hervor, daß wohl die Gesamtfestigkeit der armierten Säule größer ist, daß aber die Tragfähigkeit des Betons in der armierten Säule um 15 vH. kleiner wird", und weiter: „die Säulen mit Horizontalverband zeigen keine größere Festigkeit als jene Säulen, wo die Eisen keine horizontale Verbindung hatten, und ist auch kein Unterschied im Bruch ersichtlich".

„Tatsächlich kann nicht angenommen werden, daß bei so großen Abständen (30,5 cm) diese Verbindungen einen wohltätigen Einfluß auf die Säulenfestigkeit haben können."

[1]) „Tests of concrete and reinforced concrete columns", University of Illinois Bulletin Nr. 11, 1. Februar 1907.

Tabelle I.

Nr.	F_b	F_b	F_e	$\frac{F_b}{F_e}$	Länge	ϱ	x	Bruchlast t	bezogen auf den Eisenquerschnitt kg/cm²	Eisen $3100 - 8{,}1\,x$ kg/cm²	Beton[1] $\overline{F_b}$ kg/cm²	ϱ'	x'	Eisen $\frac{20\,E}{x'^2}$ kg/cm²	Beton $\overline{F_b}$ kg/cm²	Anmerkung
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	6a	7a	10a	11a	
1	952	613,5	11,4	53,8	366	11,4	32	106,1	9307	2840	120	0,46	795,6	628	161	4 R.-E. 18 mm.
2	555	351	7,9	44,4	366	8.6	42,5	57,6	7291	2755	102	0,4	915	436	154	4 R.-E. 16 mm.
3	943	613,5	11,4	53,8	366	11.4	32	123,5	10658	2840	145	0,46	795,6	628	186	4 R.-E. 18 mm u. Bügel.
4	Fehlversuch			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	945	—	—	—	366	—	—	113,5	—	—	120	—	—	—	120	Ohne Eisen.
6	574	351	7,9	44,4	366	8,6	42,5	58,7	7430	2755	105	0,4	915	436	157	4 R.-E. 16 mm.
7	939	613,5	11.4	53,8	366	11,4	32	122,0	10702	2840	146	0,46	795,6	628	185	4 R.-E. 18 mm.
8	568	—	—	-	366	—	—	73,47	—	—	141	—	—	—	141	Ohne Eisen.
9	946	—	—	—	366	—	—	107.0	—	—	113	—	—	—	113	Ohne Eisen.
10	529	351	7,9	44,4	366	8,6	42,5	47,6	6025	2755	73,6	0,4	915	436	126	4 R.-E. 16 mm u. Bügel. Eines der Eisen aufruhend, das die einseitige Öffnung am Säulenfuß veranlaßt.
11	937	613,5	11,4	53,8	366	11,4	32	127,5	11184	2840	154	0,46	795,6	628	196	4 R.-E. 18 mm u. Bügel.
12	534	351	7,9	44,4	274	8,6	31,8	87,5	11081	2842	183	0,4	915	436	239	4 R.-E. 16 mm u. Bügel.
13	960	—	—	—	366	—	—	115,2	—	—	120	—	—	—	120	Ohne Eisen.
14	529	351	7,9	44,4	366	8,6	42,5	50,8	6430,6	2755	827	0,4	915	436	135	4 R.-E. 16 mm u. Bügel.
15	955	—	—	—	183	—	—	79,8	—	—	84	—	—	—	84	Ohne Eisen.
16	532	351	7,9	44,4	274	8,6	31,8	60,1	7607,7	2842	107	0,4	915	436	161	4 R.-E. 16 mm u. Bügel.
17	539	351	7,9	44,4	183	8,6	21,2	83,6	10587	2928	172	0,4	457,5	872	219	4 R.-E. 16 mm.
18	539	—	—	—	183	—	—	40,9	—	---	76	—	—	—	76	Ohne Eisen. Die Säule zeigte schlechten Beton.

[1]) Die Rubrik 11 ergibt sich durch Subtraktion der 10 von 9 und Division durch 4.

Es sind das Schlußfolgerungen, die beunruhigend wirken müssen, sofern sie richtig sind. Wir haben absichtlich den gewählten Querschnitt (Abb. 2) beigedruckt, um zu zeigen, daß der Zusammenschluß der Horizontalverbindung bei *a* ein unzureichender war. Bei einer so kurzen Umbiegung an den Enden kann dieselbe nicht wirksam sein, und ist es vollständig verständlich, daß dieselben sich so verhalten haben, als ob sie keinen Horizontalverband gehabt hätten. In diesem Falle ist eine Armatur, die schon bei einer niedrigen Ziffer ausknickt und den äußeren Betonquerschnitt, der etwa 34 vH. des Gesamtquerschnitts beträgt, absprengt, nur schädlich. Die Bügel aber, die zu einem einseitigen Öffnen Anlaß geben, beseitigen diese Zerstörungsursache nicht, die auch in ihrem Abbrechen am Eck aus der von Talbot gegebenen Abbildung deutlich ersichtlich ist. Wir können uns nicht versagen, jetzt schon auf Grund unserer späteren Rechnung eine Tabelle (sieh S. 7) der Versuche Talbots einzufügen. Wir finden in der Rubrik 11 die rechnungsmäßigen Betonfestigkeiten mit den direkt ermittelten zusammengestellt und ersehen daraus, daß von den sechs Versuchen ohne Eisen die durchschnittliche Festigkeit 109 kg/cm² beträgt, daß aber die Rechnung mit Bezug auf den Betonkern für armierte Säulen ohne Bügel 129 kg/cm², mit Bügel 121 kg/cm², ergibt, daß aber bei diesen Ziffern solche Schwankungen vorkommen, daß man ein Recht hat, die Betonfestigkeit in beiden Fällen, wo die reduzierte Betonfläche eingeführt und die Eisenfestigkeit abgezogen ist, als nahezu gleich zu bezeichnen.

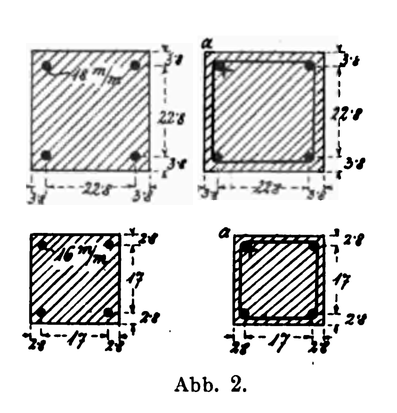


Abb. 2.

Weil die Bügelarmierung, wie aus diesen Zahlen ersichtlich, so gut wie gar keinen Effekt hat, so ist dieselbe Rechnung nochmals für den Fall durchgeführt, wenn die Eisen jedes einzeln wirken. Wir erhalten dann für den von dem Eisen umschlossenen Querschnitt in der Rubrik 11a eine Betonfestigkeit im Durchschnitt von 175 bezw. 174 kg/cm², also eine Erhöhung von mehr als etwas 60 vH. gegenüber der nachgewiesenen Säulenfestigkeit von 109 kg/cm². Diese Erhöhung ist bereits eine ähnliche, wie wir sie später wiederholt nachweisen. Die Druckfestigkeit des Betons kann zwar bei einer ordentlichen Bügelarmierung, wie wir ja sehen werden, auch ohne Umschnürung noch mehr gesteigert werden. Die Folgerungen Talbots aber, daß der Beton in der armierten Säule weniger getragen hat, kommen nur daher, daß er auch den Betonmantel mitgerechnet hat und daß er weiter seine horizontalen Bügel nicht ordentlich verankert hat.

Unter diesen Umständen geht es wohl nicht an, aus den Versuchen von Talbot, 1906, weitgehende Schlußfolgerungen aut das Wesen der armierten Betonsäule und die ihr zulässigen Inanspruchnahmen zu ziehen

und will ich auch eine Nachprüfung der von ihm Hand in Hand damit aufgestellten höchst bemerkenswerten Theorie an dieser Stelle vorläufig unterlassen. Es ist gewiß denkbar, daß die Ummantelung des eigentlichen Kernes mit einer so dicken und so zugfesten Betonschicht geschieht, daß sie die Anbringung von besonderen eisernen Bügeln überflüssig macht. Ich schreibe es diesem Umstand zu, daß in dem vorliegenden Falle kein größerer Fehlschlag zu verzeichnen ist. Bezüglich weiterer Einzelheiten seiner Versuche sieh „B. u. E." 1907, Heft VII, S. 185.

Ein zweiter, noch viel allgemeinerer Fehler bei diesen Säulenversuchen ist in der mangelhaften Anordnung der Druckfläche zu suchen. Fast alle Experimentatoren sind von dem Gedanken, daß sie es mit einer Betonsäule zu tun haben, dermaßen durchdrungen gewesen, daß sie es sorgfältig vermieden haben, die Armaturen bis nahe zur Lagerfläche hinaufzuführen. Die Folge hiervon war, daß zwischen der eigentlichen Eisenbetonsäule und der Druckfläche eine Zwischenlage gewöhnlichen Betons geschaffen wurde, die die Last zu übertragen hatte. Überträgt man die Last direkt auf die Eisen, so hat man dafür zu sorgen, daß dieselbe eine tunlichst gleichmäßige sein soll. Ist man nicht in der Lage, dies von vornherein anzuordnen, so empfiehlt es sich, den Ausgleich durch ein Zwischenmittel besorgen zu lassen, wie dies bei meinen Versuchen in Stuttgart durch Professor C. v. Bach mittels einer Zementschicht, von mir in Wien mittels einer Bleiplatte geschehen ist. Der eigentliche Ausgleich findet dann in der Höhe der ersten Bügelverbindung statt, die nicht zu entfernt von der Druckfläche anzuordnen wäre. Es verbleibt immerhin eine Gefahr, daß trotz allen Vorsichtsmaßregeln der Bruch am Kopf der Säule eintritt, wo sich naturgemäß eine ungleichmäßige Druckverteilung und der schlechtere Beton befindet. Auch in dieser Hinsicht sind die Versuche Talbots ein Beispiel, wie man nicht vorgehen soll. Dies geht aus den Anmerkungen der Tabelle I hervor, wo es bei Säule 10 heißt, daß ein Eisen einseitig aufgeruht hat.

Es darf die Zwischenlage zwischen den Eisenenden und der Druckplatte nicht so groß und muß tunlichst gleichmäßig stark sein. Ist das nicht der Fall, so wird dieselbe zur Bildung selbständiger pyramidenartiger Scherflächen Anlaß geben, die das Eisen ungleichmäßig herausdrücken und so die Säule, ausgehend von der Lagerfläche, zerstören. Bei einigen französischen Versuchen wurde sogar bei jedem Ende der Längsstange der Beton durch Auskratzen entfernt, so daß eine 7 mm große Lücke zwischen Druckplatte und Armaturstange entstand (sieh S. 33). Es ist wohl kaum nötig hervorzuheben, daß die Resultate solcher Versuche zu Bedenken Anlaß geben, sofern es unmöglich ist, die Höhe dieses Einflusses festzustellen. Es war meine erste Aufgabe, diesbezüglich eine Entscheidung zu treffen. Ich habe mich für eine direkte Auflagerung auf Eisen mit den erwähnten Vorsichtsmaßregeln entschieden und in vielen Fällen bei dem Versuchsobjekt von vornherein eine Eisenplatte angebracht, in welcher Löcher zur Einführung

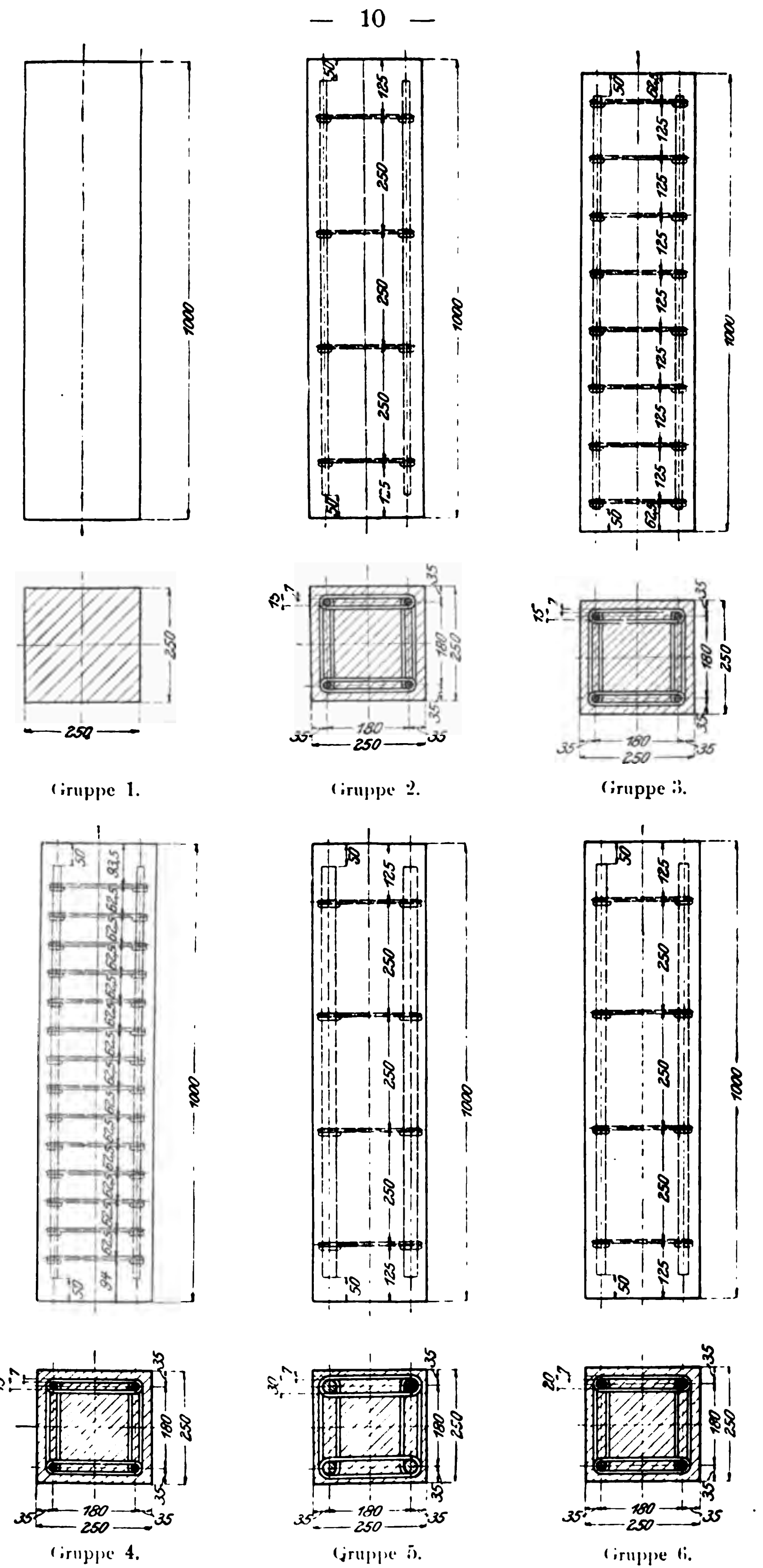


Abb. 3. Versuche von Bach 1905.

der vier Rundeisen angebracht waren. Dieselbe erwies sich als eine große Ersparnis, da sonst das nachträgliche Herrichten der Flächen in der Versuchsanstalt recht kostspielig war. Ich verweise bei dieser Gelegenheit auf eine Reihe von Versuchen, die ich wegen der Schwierigkeiten, die man mir in Wien machte, in Amsterdam bei Koning u. Bienfait am 3. März 1903 ausführen ließ[1], wobei ich Würfel in Vergleich gezogen habe, deren Eisen aufgelagert war, und solche, die auf entsprechend durchlochten Platten aufgestellt worden waren. Die inzwischen anderwärts ausgeführten Versuche geben jedoch reichliche Gelegenheit, die Unzulänglichkeit der anderen Anordnung festzustellen. Es geht dies z. B. auch aus den ersten Versuchen, die C. v. Bach für den Jubiläums-Ausschuß 1905[2]) gemacht hat, hervor, und es ist nicht schwer darzutun, welcher Unterschied sich aus den in der nebenstehenden Abb. 3 dargestellten Anordnungen ergibt. Da selbstverständlich C. v. Bach sich des besten fachlichen Ratschlages bedient hat und bei seiner sonstigen Gewissenhaftigkeit jeder Fehler als ausgeschlossen gelten kann, so haben gerade diese Abweichungen eine doppelte Bedeutung. Es läßt sich beweisen, daß einzig und allein die in der Abb. 3 nach der Numerierung Bachs dargestellten Gruppen 3 und 4 eine ganz einwandfreie Beurteilung der Wirkung des armierten Betons zulassen, daß dagegen die Gruppen 2, 5 und 6 wegen der mangelhaften Anordnung der Eisen am Kopf vor ihrer eigentlichen Bruchfestigkeit zerstört wurden, und daß man wenigstens nicht genau bestimmen kann, wieviel dieser Abfall betragen hat. Die in der Gruppe 3 und 4 dargestellte Anordnung kann immerhin als gleichwertig mit der von mir gewählten angesehen werden. Der Unterschied besteht nur darin, daß bei meinen Versuchen, die Eisen bis zur Druckplatte durchgehen, und dieselbe wie ein letzter Bügel wirkt, die vier Eisen zusammenhält, während hier die Druckübertragung auf das Eisen erst durch den $6^1/_4$ cm bezw. 9,3 cm tiefer liegenden Bügel geschieht. Jedenfalls liegt derselbe immerhin noch nahe genug an der Druckplatte, um die Bildung einer Scherpyramide am Kopf zu verhindern (Abb. 4, Bruchbilder der Gruppe 3), was bei der anderen Anordnung mit einer Entfernung von 12,5 cm nicht mehr der Fall ist, wie dies alle Bruchbilder der Gruppe 2, 5 und 6 dartun (Abb. 5, Bruchbilder der Gruppe 5). Die letztere Abbildung ist für alle Versuche aus den Gruppen 2, 5 und 6 typisch und kennzeichnet dieselben als Fehlversuche, wie noch ausführlich am Schluß dieser Abhandlung nachgewiesen werden wird. Als Folge dieser Erkenntnis ist es anzusehen, daß bei den bevorstehenden Versuchen des „Österreichischen Eisenbeton-Ausschusses" die Köpfe aller Säulen mit Umschnürungen versehen werden sollen.

[1]) Beton u. Eisen 1903, S. 268.

[2]) Druckversuche mit Eisenbetonkörpern Berlin 1905, Heft 29 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten bei J. Springer, Berlin.

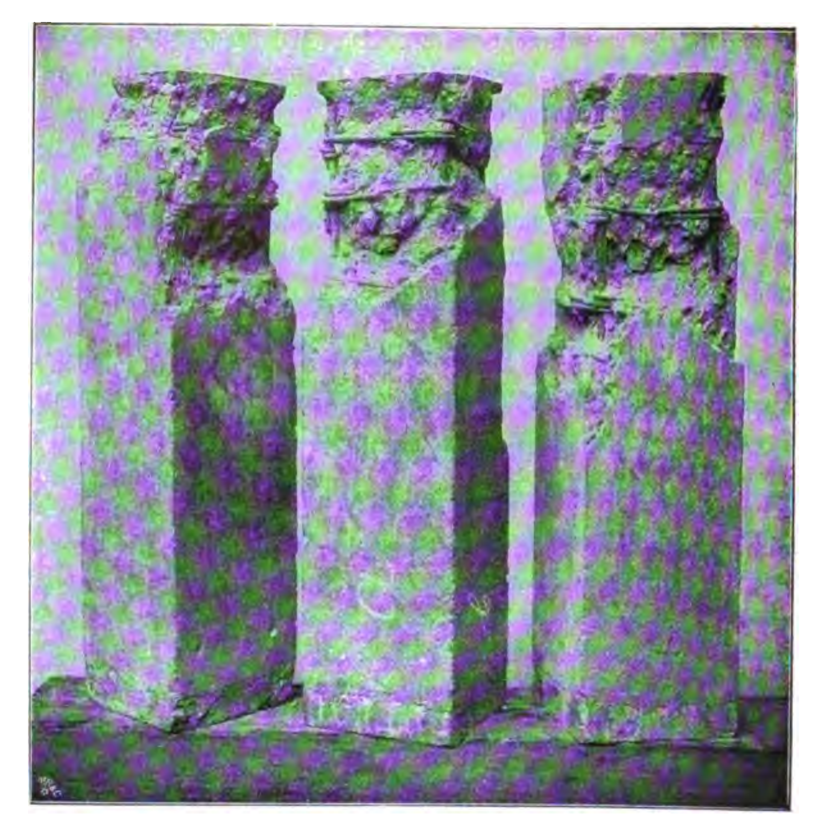


Abb. 4. Bruchbilder der Gruppe 3.



Abb. 5. Bruchbilder der Gruppe 5.

Es sei nur nochmals wiederholt, daß mir vorerst jeder Maßstab für die Größe des Einflusses dieser Anordnung fehlt, erst der am Schluß angeführten Tabelle IIIa S. 31 entnehmen wir, daß dieser keinesfalls immer so groß ist, wie es auf den ersten Blick scheinen will. Die Druckfestigkeit der reinen Betonsäule wird mit 141 kg/cm² angegeben. Dieselbe verhält sich, wie die Tabelle am Schlusse zeigt, in der Anordnung Abb. 3, Gruppe 2, 5 und 6 höchst unregelmäßig (74 bis 217 kg/cm²), während sie bei der Anordnung nach Abb. 3, Gruppe 3 und 4 im Durchschnitt — 245 kg/cm² beträgt, d. i. etwa 70 vH. mehr als der reine Beton. Wir sehen also, daß mit der Armatur eine beträchtliche Steigerung der Festigkeit des Betonkernes verbunden ist, die meines Erachtens noch größer sein kann, als sie sich aus dem vorstehenden Versuche Bachs ergibt. Während bei den von mir durchgeführten Versuchen die Zwischenschicht zwischen dem Eisenende und der Druckfläche nur so groß war, um einen Ausgleich in den unvermeidlichen Unebenheiten herbeizuführen, beträgt sie bei den Versuchen von Bach in der Säule 50 mm, welche Entfernung im Zusammenhang mit der Wahl des nächsten Bügels für die Übertragung maßgebend ist und zu den besprochenen Abweichungen führt. Wieviel dieselben betragen können, soll aus den später dargelegten Versuchen ersichtlich sein. Der bisher stets nachgewiesene große Unterschied zwischen dem einfach armierten Beton mit Bügeln und dem umschnürten Beton ist zum größten Teil darauf zurückzuführen, daß man im ersten Falle die statisch wertlose Schale mitgezählt hat, während im zweiten Falle die große Steigerung der Betonfestigkeiten nur beim umschnürten Kern nachgewiesen worden ist. Wie unberechtigt diese Einbeziehung der Betonschutzschicht bei einem Nachweis der Bruchfestigkeiten eines armierten Querschnitts ist, darüber gibt uns ein Blick auf eines der vielen Bruchbilder Aufschluß, die in dieser Abhandlung sich vorfinden. Bei umschnürtem Beton tritt dies deutlicher umgrenzt hervor. Die Unregelmäßigkeit bei gewöhnlichem Beton ist kein Hindernis für diese Erkenntnis.

I. Meine älteren Versuche aus 1901.

Die Einflüsse, die für die Säulenfestigkeit von Eisenbeton bestimmend sind, sind recht mannigfacher Natur. Versuche, die den Zweck haben, das Maximum der Leistungsfähigkeit von Säulen aus Eisenbeton zu ermitteln, müssen daher so angelegt sein, daß sie uns die Möglichkeit geben, die Größe der einzelnen Einflüsse zu ermitteln, sie auf ihre Bedeutung abzuschätzen, um danach unsere Abmessungen wählen zu können. Als solche Einflüsse kommen folgende Gruppen in Betracht:

1. die Qualität der beiden Materialien,
2. die Querschnittsabmessungen einzeln sowohl als im Verhältnis zueinander,
3. das Längenverhältnis und
4. der Querverband der einzelnen Armaturen.

Als eine Vorfrage für die eigentliche Untersuchung erscheint die Ermittlung der Säulenfestigkeit bei reinem Beton dienlich. Diese Zahlen hätten die Bedeutung eines Ausgangspunktes für die verschiedenen Längenverhältnisse, an welche sich die steigenden Ziffern der zunehmenden Armatur angereiht hätten. Leider kann ich gerade von diesen Exemplaren nur wenige vorführen. Es ist das einzige Verdienst, das die Wiener Technische Hochschule sich bei dieser älteren Arbeit zuschreiben darf, daß mir innerhalb der vier Jahre, wo dieselben dort gelagert sind, die meisten dieser reinen Betonsäulen zerbrochen worden sind.

Ich kann aber jetzt schon den Umstand nicht verschweigen, daß mir diese Versuche nicht sehr wertvoll erscheinen und daß es mir gelungen ist, direkt aus den Versuchen mit armierten Säulen eine Druckfestigkeit des Betons mit hinreichender Gleichmäßigkeit abzuleiten. Es handelt sich nur um das Verhältnis, das zwischen der Würfelfestigkeit des reinen Betons und der Druckfestigkeit des armierten Betons besteht. Versuche mit reinen Betonsäulen von größeren Längen werden meines Erachtens kaum eine für den armierten Beton geeignete Unterlage bieten, da die Schwankungen und die Zahl der Einflüsse auf das Resultat eine zu große ist, um einen brauchbaren Zusammenhang in beiden Fällen herstellen zu können. Sie können höchstens dartun, wie wenig Mauerwerksäulen im allgemeinen zu schlanken Tragkonstruktionen geeignet sind, wenn dieselben etwas mehr wie eine architektonische Aufgabe haben.

Mit Bezug auf die oben angeführten vier Punkte ist zu sagen:

1. Die Qualität der Materialien.

a) Der Zement. Derselbe war in allen Fällen ein durchaus einwandfreier Portlandzement von tunlichst gleichmäßiger Qualität. Die von Herrn Baurat Greil in der entgegenkommendsten Weise im Wiener Staatbauamt kostenlos gemachten Normenproben ergaben keine wesentlichen Abweichungen. Da es nicht in der Absicht dieser Versuche gelegen hat, dem Einfluß der Zementqualität weiter nachzugehen, so kann auch auf eine Wiedergabe derselben hier verzichtet werden, umsomehr, als bei diesem hohen Alter kleine Abweichungen einflußlos bleiben müssen. Weiter unten finden sich in zwei Fällen nähere Daten angeführt vor.

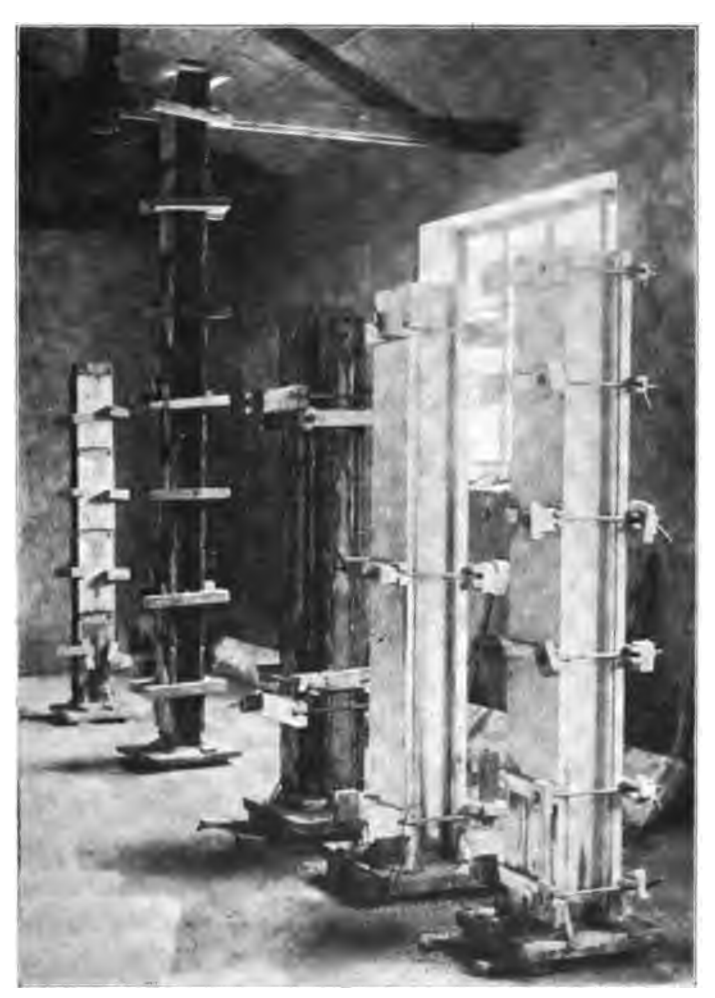
b) Der Beton. Es wurden drei Qualitäten Beton in Verwendung gebracht:

⊙ I. 23 Säulen. Hergestellt von G. A. Wayss & Co. am 18. Juni 1901 auf ihrem Werkplatz in Wien, Kaiserplatz Nr. 6, mit Klumatschauer Portlandzement: 500 kg Zement auf 1 m³ Sand und Schotter[1]). Das spezifische Gewicht der Zuschlagstoffe betrug 1,71. Die einzelnen Gemische bestanden aus ¹/₄ m³ Zuschlagstoffen, 125 kg Zement und 60 l Wasser. Es

[1]) Bitte nicht zu übersehen, daß dies nicht dasselbe ist, als wie wenn die Vorschrift des k. k. Ministeriums des Innern in Wien sagt: 1 m³ Gemenge von Sand und Schotter.

ist dies etwas fetter wie **1 : 3**. In diesem einzelnen Falle wurden von jeder Säulenform zwei Versuche gemacht und diese zwei Versuche dazu benutzt, um eine derselben stehend, die andere liegend herzustellen. Diese zwei Parallelversuche sind in der Folge immer besonders gekennzeichnet und getrennt angeführt als Ia und Ib. (Sieh Tafel I, II und III.)

△ II. 8 Säulen. Hergestellt von Pittel & Brausewetter in Gemeinschaft mit Adolf Baron Pittel am 1. Juni 1901 am Werkplatz der letzteren Firma in Weißenbach an der Triesting mit Achauer Portlandzement: 400 kg



Herstellung der Versuchssäulen II in Weißenbach a. d. Tr.
Abb. 6.

Zement auf 1 m^3 Sand und Schotter. Das spezifische Gewicht des Sandes betrug 1,53, das des Schotters 1,46. Beide Zuschlagstoffe sind Kalksteine und wurden durch Absieben dem Steinbrecher entnommen. Die einzelnen Gemische bestanden aus $^7/_{60}$ m^3 Sand- $^8/_{60}$ m^3 Schotter, 100 kg Zement und 40 l Wassser. Es ist fast **1 : 4**. (Sieh Tafel IV und V.)

☐ III. 7 Säulen. Hergestellt von Ed. Ast & Co. am 15. Mai 1901 auf ihrem Werkplatz Wien, Muthgasse 66, mit Kurewitzer Portlandzement: 300 kg Zement auf 1 m³ Sand und Schotter[1]) von den folgenden Eigenschaften nach einer Untersuchung im städtischen Bauamt:

Buch Post	Gewicht in g für 1 Liter		Erhärtungsbeginn		Abbindezeit				Siebeproberückstand in vH. auf dem		Zugfestigkeit in kg für 1 cm² nach		Druckfestigkeit in kg für 1 cm² nach	
					an der Luft		im Wasser		900	4900	7	28	7	28
	fest	lose gesiebt	h	m	h	m	h	m	Maschensieb		Tagen			
5033	—	1174	—	35	6	20	10	—	1	19	—	27,25	—	277,75

Darrprobe bestanden.

Das spezifische Gewicht des Donausandes (grubenfeucht) betrug 1,66, das des Pflasterriesels 1,75, das des Zements 1,4. Die einzelnen Gemische bestanden aus $^1/_4$ m³ Sand, $^1/_4$ m³ Pflasterriesel, 150 kg Zement (oder 300 kg auf 1 m³) und 75 l Wasser. Es ist dies die magerste Mischung nahezu **1 : 5**. (Sieh Tafel VI.)

c) Eisen. Das in den Versuchen verwendete Eisen war mit Ausnahme der später zu erwähnenden Eisensäulen kein Qualitätseisen[1]), sondern gewöhnliches Handelseisen, über dessen Eigenschaften sich im Forscherheft V[2]) bei den Balkenversuchen ausführliche Angaben vorfinden.

2. Die Querschnittsabmessungen.

Allen Versuchen ist mit geringen Abweichungen ein äußerlicher Betonquerschnitt von 18/18 zugrunde gelegt. Die Abmessungen der Betonkerne sind aus den Tabellen zu entnehmen. Zur Bewehrung wurde teilweise Rund-, teilweise Walzeisen verwendet. Es wurde versucht, alle Prozentverhältnisse der Armatur, wie sie in der Praxis vorkommen und möglich sind, zu erproben, und ist hierbei in der Folge aus Gründen, die später erörtert werden sollen, gewöhnlich nicht der ganze Betonquerschnitt mit dem Eisenquerschnitt verglichen, sondern nur der vom Eisen umschlossene Betonquerschnitt in Betracht gezogen. Es ist dabei ein Verhältnis von 2,7 vH. (entsprechend einem 37fachen Betonquerschnitt) bis hinauf zu 29,2 vH. (entsprechend einem 3,4fachen Betonquerschnitt) untersucht worden mit Zwischenpunkten von etwa 5 vH., 10 vH., 15 vH. und 20 vH. (entsprechend einem 20fachen, einem 10fachen, einem 7fachen und einem 5fachen Betonquerschnitt).

Die kleinste Eisenmenge von 2,7 vH. des Betonkerns entspricht, bezogen auf den Gesamtquerschnitt, etwas mehr wie 1 vH.

---

[1]) Die diesbezüglichen Versuche mit den Säuleneisen finden sich in „B. u. E." 1908, Heft III, S. 71.

[2]) Emperger: Die Abhängigkeit der Bruchlast vom Verbunde usw. Berlin 1906. Wilh. Ernst u. Sohn.

3. Das Längenverhältnis.

Wenn es auch in der Absicht der Arbeit lag, das Knickungsgesetz bezw. die Abminderung bei zunehmender Länge allgemein zu erforschen, so forderten doch die übergroßen Kosten gebieterisch eine Einschränkung. Deshalb hat man sich auf praktische Verhältnisse beschränkt und zeigen die Versuche gewöhnliche Längen, entsprechend einem Verhältnis des Trägheitsradius zur Säulenlänge von 15 bis 60, welch letzteren eine mittlere Stockwerkshöhe bei einer schlanken Säule $a = 18$ cm, $l = 3{,}6$ m, 2,1 um 1,0 m entspricht. Außerdem wurden noch einige Würfel- und Prismenversuche angeschlossen.

4. Der Querverband.

Das Bestreben des Versuchprogrammes war es, ein tunlichst genaues Bild über den Wert der einzelnen Abweichungen zu gewinnen, wie sie in der damaligen Praxis gerade auf diesem Gebiet zu finden waren. Man hat also nicht nur in der Betonherstellung, sondern auch im Querverband diejenigen Formen befolgt, wie sie von der damaligen Praxis (1901) bei den einzelnen Firmen als die besten angesehen wurden.

Bei der Beurteilung der in den Plänen vorgesehenen Querverbindungen darf man nicht übersehen, daß man bei der Herstellung dieser Säulen das Jahr 1901 schrieb. Die Arbeiten Considères über Umschnürung waren noch nicht veröffentlicht. In welchem Maße diese Frage jedoch damals schon den Schreiber dieser Zeilen beschäftigt hat, soll folgender Hinweis dartun. Bei den Versuchen mit Walzprofilen waren nach meinem Entwurf Parallelversuche vorgesehen, mittels welcher untersucht werden sollte, ob nicht die kostspielige Vernietung oder Verschraubung durch eine entsprechend angezogene Drahtspirale ersetzt werden könnte. Diese Versuche wurden jedoch nicht ausgeführt, da mich die betreffende Firma bat, hiervon abzusehen wegen der Schwierigkeit ihrer Herstellung; ein Bedenken, womit der umschnürte Beton auch heute noch zu kämpfen hat.

Vorliegende Versuche zeigen entweder eine Vernietung oder Verschraubung bei Profileisen. Ich glaube auch heute noch, daß diese Verbindungsformen dem Wesen des Eisenbetons nicht ganz entsprechen, weil es nicht möglich ist, ihnen eine Anfangsspannung zu geben, und hoffe bald Gelegenheit zu haben, über diese Frage durch Parallelversuche mir Klarheit zu verschaffen.

Zur horizontalen Verbindung bei Rundeisen wurden drei verschiedene Sorten von Bügeln verwendet:

1. die 5 mm-Drähte in den Gruppen I und II.
   In der Gruppe III finden wir
2. die von Hennebique empfohlenen gelochten Bleche und
3. die bei Säule 3 der Gruppe III, Tafel VI ersichtliche Anordnung.

Bezüglich der Verbindung der Eisen finden wir zwei grundlegende Verbindungen erprobt: die umlaufende und die übereck. Die letztere in der Gruppe I und bei den Versuchen 2 und 5 bei der Gruppe II. Die beiden Anordnungen in den Gruppen I und II zeigen noch den Unterschied, daß bei I die Bügel abwechselnd, bei II jedoch in einer Ebene angeordnet sind. Was schließlich die Entfernungen der Bügel anlangt, so wurde der Versuch gemacht, eine wenn auch bescheidene Variation zu versuchen.

Wir finden in der Gruppe II, Versuch 4 mit Bügeln in der Entfernung von zwei kleinsten Abmessungen (36 cm), in der Gruppe III mit drei kleinsten Abmessungen (50 cm) und in der Gruppe I mit vier kleinsten Abmessungen (bis 74 cm). Die genaueren Aufnahmen bei den Bügeln der Gruppe I haben freilich ein wenig erhebendes Resultat ergeben. Man muß dabei nicht übersehen, daß, die Herstellung dieser Säulengruppe auf einem offenen Materialplatz, während eines derartigen Platzregens stattfand, daß eine Kontrolle in dieser Sintflut nahezu unmöglich war, besonders bei den stehenden Säulen, wo der Aufenthalt auf der Leiter durch mehrere Stunden nötig gewesen wäre. Leider sind aber auch am Fußende der liegenden Säulen 2 und 4 die Bügel vergessen worden. Ein Umstand, der sich bei dem Resultat (sieh die Bruchbilder der Tafel I) deutlich zu erkennen gibt, da er in seiner Folge ähnliche Verminderungen der Bruchfestigkeit nach sich zieht, wie sie bei den eingangs erwähnten Versuchen aufgetreten sind.

Ein weiterer, nicht zu übersehender Unterschied besteht darin, ob die Bügel beim Einbringen angespannt waren, bezw. ob sie im Bedarfsfalle sofort in Wirksamkeit getreten sind, oder ob sie, wie das bei den Hennebiqueschen durchlochten Blechen der Fall zu sein scheint, der Bewegung der Rundeisen einen gewissen Spielraum gegeben haben, ein Umstand, der, wie ich offen gestehen muß, in seiner Tragweite mir erst später zum Bewußtsein gekommen ist.

Erzeugung und Aufbewahrung der Versuchssäulen.

Die Herstellung aller Säulen, mit Ausnahme der unter I erwähnten, geschah in stehenden Holzformen, die in ihrer Ausführung den beim Bau üblichen entsprachen. Auch die sonstige Behandlung der Säulen war entsprechend den Verhältnissen beim Bau. Sie war ebenfalls für alle Säulen in jeder Serie eine vollständig gleichmäßige. Nach ungefähr 1 bis $1^1/_2$ Monaten wurden die Säulen ausgeschalt, verladen und die Säulen I und III per Achse, die Säulen II per Bahn und dann per Achse in die Technische Hochschule geschafft, wo sie vier Jahre hindurch wechselvolle Schicksale, größtenteils im Keller, verleben sollten, um dann nach Stuttgart transportiert zu werden. Wichtig ist, daß die Gruppe II im geschlossenen Raume hergestellt worden war (Abb. 6) und in demselben verblieb, während I und III im Freien

hergestellt wurden. Hierbei ergab sich der weitere Unterschied, daß die Herstellung von I in eine Regenperiode, die von III in eine solche von großer Hitze gefallen ist, Umstände, die auf das Resultat von großem Einfluß waren, und die es aber, wie gesagt, nicht hinderten, Vergleiche innerhalb einer Gruppe zu erlauben.

Die Resultate der Untersuchungen in Stuttgart.

Die Prüfung der Säulen seitens des Professors C. v. Bach erfolgte in Stuttgart in zwei Gruppen. Zuerst 17 Körper bis 1 m Länge am 28. September 1906 und der Rest am 12. Juni 1907 wegen eines Bruchs in der Maschine, laut den folgenden Briefen, die wir im Original wiedergeben.

Die weiteren Mitteilungen des Professors C. v. Bach liegen in den Tafeln I bis VI geordnet vor, wobei vom Verfasser nur in der Reihenfolge der Versuche unwesentliche Abänderungen zur besseren Übersichtlichkeit und unter Einfügung der ursprünglichen uns gelieferten Abbildungen gemacht worden sind.

Materialprüfungsanstalt
an der K. Technischen Hochschule.

Stuttgart, den 28. September 1906.

Herrn Dr. Ing. Fritz v. Emperger, k. k. Baurat,

Wien I.

Die von Ihnen eingelieferten 17 Betonkörper bis zur Länge von rund 1 m, deren Form, Zusammensetzung (ob mit oder ohne Eiseneinlagen) und deren Abmessungen in den Beilagen enthalten sind, wurden nach Maßgabe Ihres Auftrages der Prüfung unterworfen.

Vor der Prüfung, die in einer stehenden Maschine erfolgte, waren die Versuchskörper durch Hobeln mit ebenen und parallelen Stirnflächen versehen worden.

Ermittelt wurden für sämtliche Körper die gesamten, bleibenden und federnden Zusammendrückungen, sowie die Belastung bei Eintritt der Rißbildung und die Höchstbelastung.

Das Wesen der Meßvorrichtung zur Ermittlung der Zusammendrückungen findet sich beschrieben in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1895, S. 489 u. f. sowie in derselben Zeitschrift 1898, S. 35 u. f. und in C. Bach, „Elastizität und Festigkeit“, 5. Aufl., S. 115 u. f.

Die geringste Belastung (Anfangslast) für den mittleren Querschnitt eines Körpers ist das halbe Eigengewicht des letzteren, vermehrt um das Gewicht der angebrachten Instrumente mit dem zugehörigen Bügel.

Als erste Belastungsstufe wurden in der Regel 10000 kg gewählt. Diese Last wirkte 3 Minuten, dann erfolgte die Ablesung an den Instrumenten; hierauf wurde die Belastung auf die Anfangslast erniedrigt, 3 Minuten nachher wieder abgelesen und sodann die Belastung auf 20000 kg gesteigert usw. Die Zusammendrückungen wurden somit für jede Belastungsstufe nur einmal bestimmt. Die höchste Belastung, bis zu welcher Elastizitätsmessungen gemacht wurden, war in der Regel 60000 kg.

Nach Überschreitung der Höchstbelastung wurde der Versuch meistens unterbrochen und der Versuchskörper photographiert. In einzelnen Fällen verblieb der Körper unter Belastung, um die Brucherscheinungen besser hervortreten zu lassen.

Die Versuchsergebnisse sind in den Zusammenstellungen 1 bis 3 der Beilagen A, B und C enthalten. Die Beilagen 1 bis 19 zeigen die Schaulinien für die Zusammendrückungen sowie die Photographien der zerstörten Körper.

Das Ziehen von Schlußfolgerungen glaubt der Unterzeichnete Ihnen überlassen zu dürfen.

Der Vorstand
C. Bach.

Stuttgart, den 12. Juni 1907.

Im Anschluß an unser Zeugnis vom 28. September 1906 übersenden wir Ihnen in den 11 Beilagen die Ergebnisse, welche die Prüfung der restlichen 20 Betonkörper von rund 2,1 bis 3,6 m Länge geliefert hat, nachdem die Durchführung der Versuche möglich geworden ist.

Vor der Prüfung, die in einer stehenden Maschine erfolgte (vergl. die Abb. 7), waren die Versuchskörper durch Hobeln mit ebenen und parallelen Stirnflächen versehen worden.

Ihrem Auftrage entsprechend wurden ermittelt:

1. Die gesamten Ausbiegungen, welche die Mitte der Säule unter verschiedenen Belastungen erfährt.
2. Die Belastungen bei Eintritt der Zerstörung und soweit als möglich bei Eintritt der Rißbildung.
3. Die Gestaltung der Stelle, an welcher die Zerstörung sich eingestellt hat.

Die Versuchsergebnisse sind in den Zusammenstellungen und Beilagen enthalten.

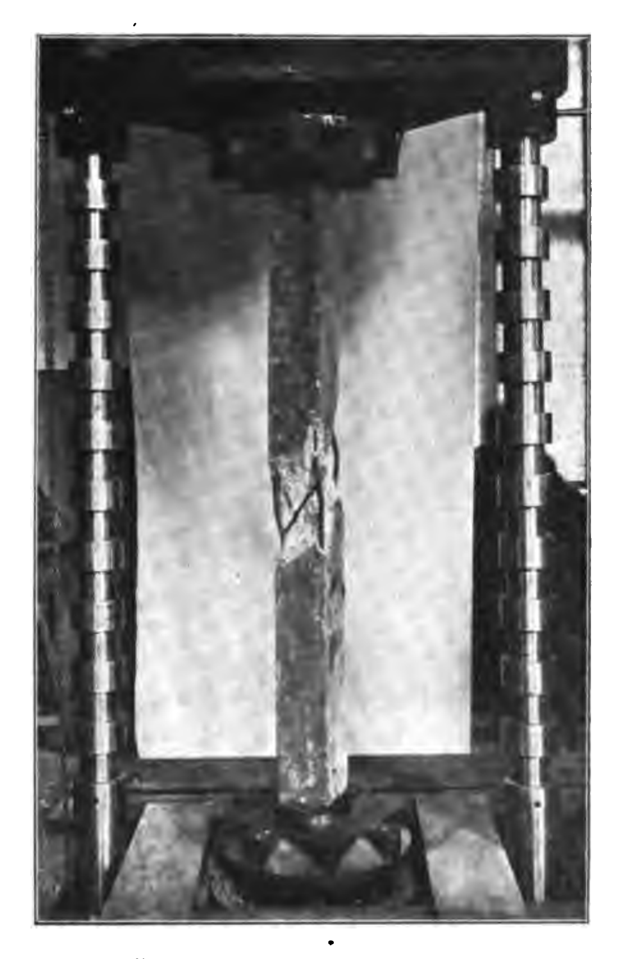


Abb. 7. Gruppe I, Versuch Nr. 5 der Tafel I.

Die Belastungsdauer bei Ermittlung der Ausbiegungen betrug jeweils rund 3 Minuten. Bei den angegebenen Belastungen ist das Eigengewicht der Körper nicht berücksichtigt.

Das Ziehen von Schlußfolgerungen glaubt der Unterzeichnete Ihnen überlassen zu dürfen.

Der Vorstand
C. Bach.

Die in den Tafeln I—VI (Abb. 8—15 ausführlich dargestellten Resultate finden sich in der folgenden Tafel VII, Tabelle II ersichtlich geordnet und auf ihre Wirkung berechnet vor.

Auswertung der Resultate mit den fünf und sechs Jahre alten Säulen.

1. Einfluß der Bewehrung.

In diesem und in folgenden Fällen ist versucht worden, als Ergänzung zu den berechneten Tabellen durch eine graphische Darstellung der Resultate dem Leser eine rasche Übersicht über dieselben zu ermöglichen. Es ist hierbei jene Bezeichnung der drei Gruppen beibehalten worden: ⨀ I, △ II, ⊡ III, wie sie bereits früher auf Seite 14 angegeben worden ist.

Um den Einfluß der Bewehrung festzustellen, ist es nötig, Unterteilungen in den Säulengruppen von nahezu derselben Länge zusammenzufassen. Dies ist in der Abb. 16 geschehen. Die Resultate sind auf Grund der alten Formel, d. h. mit dem 15fachen Eisenquerschnitt und auf zweierlei Weise dargestellt. Einmal geschah es mit dem ganzen Betonquerschnitt F_b

$$\sigma = \frac{P}{F_b + 15\,F_e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und das zweite Mal mit Hilfe des Betonkerns $\overline{F_b}$

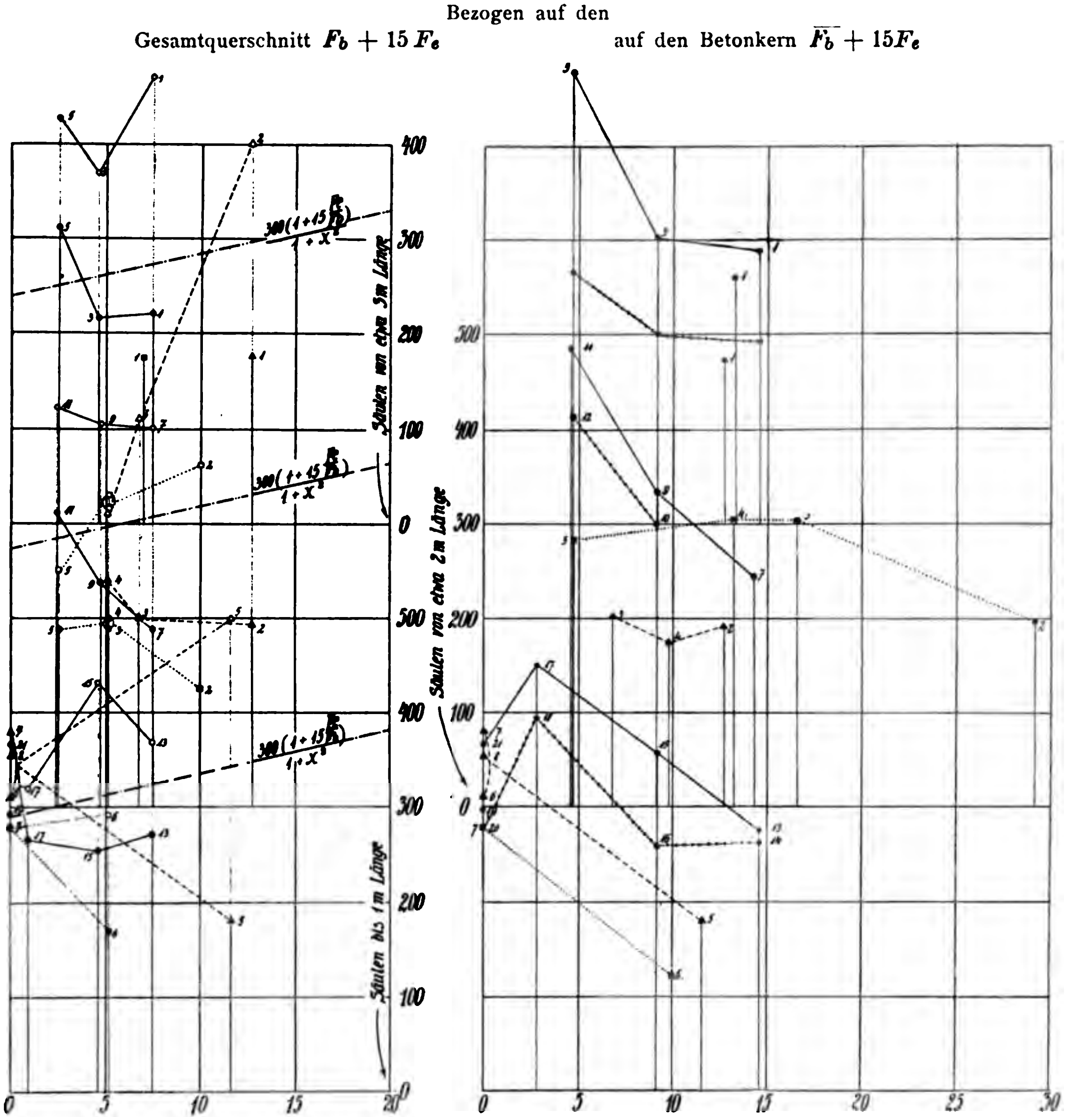
$$\sigma = \frac{P}{\overline{F_b} + 15\,F_e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

In beiden Bildern sind die Versuche von nahezu gleicher Länge einheitlich zusammengefaßt, und zwar in drei Unterteilungen, in bis 1 m, ferner die 2 m und über 3 m langen Säulen. Es finden sich dort die zusammenhängenden Resultate aus ein und demselben Beton durch Linienzüge verbunden vor. Wenn wir von den zwei Darstellungen zunächst die linke ins Auge fassen, so geht schon aus dieser hervor, daß mit der Zunahme an Eisenarmatur ein auffallender Abfall an Säulenfestigkeit eintrifft.

Wenn die Gleichung 3 richtig wäre, dann müßten die Resultate wenigstens annähernd die gleichen bleiben, d. h. die Verbindungslinien müßten parallel zur x-Achse gehen, so aber zeigen sie ein ganz deutliches Abfallen mit der Zunahme des Eisens. Um uns diesbezüglich nicht irreführen zu lassen, findet sich in derselben Abbildung eine zweite Serie von Resultaten eingetragen vor. Dieselbe gibt uns die Bruchlast auf 1 cm^2 reinen Betonquerschnitt (sieh Tabelle II). Die Darstellung zeigt eine Verlängerung der ursprünglichen Ordinaten zu einer sonst gleichen Bezeichnung, der jedoch der Punkt in der Mitte fehlt. Um auch hier die so gewonnenen neuen Linienzüge mit obiger Regel aus Gleichung 5 vergleichen zu können, ist die Richtung der notwendigen Erhöhung durch je drei Grade dargestellt, die der Gleichung 5 entspricht und die von 300 kg/cm ausgehend gedacht ist. Dieselbe ist jedoch, entsprechend der im folgenden Paragraphen nachgewiesenen Abminderung, abhängig von der Säulenlänge verschoben eingezeichnet worden. Vergleichen wir nun die verschiedenen Linienzüge, so

müssen wir sagen, daß zwar eine Vermehrung über die reine Betonfestigkeit zu verzeichnen ist, daß aber eine auffallende Regellosigkeit allerwärts zutage tritt, die es uns nicht möglich macht, bestimmte Vorschläge daraus abzuleiten.

In dem daran anschließenden zweiten Schaubilde rechts finden sich dieselben Werte, jedoch nur unter Berücksichtigung des Säulenkernes, eingezeichnet vor.



Vergleich von Säulen gleicher Länge und zunehmender Eisenmenge.

Abb. 16.

Im Gegensatz zu dem vorigen macht der Verlauf dieser Kurven einen durchaus geregelten Eindruck. Wenn wir von dem Ansteigen zwischen der reinen Betonfestigkeit und der Betonfestigkeit des Eisen-

betons absehen, so tritt auch hier auf Grund der Resultate der Gleichung 6 ein gleichmäßiges Abfällen der Bruchfestigkeit zutage in dem Maße, als der Eisenquerschnitt zunimmt. Wir wissen bereits aus dem vorigen Schaubild, daß dies keinesfalls dahin zu verstehen ist, daß die Säule auf diese Weise schwächer wird. Im Gegenteil, die Säule als Ganzes wird fester, nur nicht in dem Maße, wie es die Gleichung 6 voraussetzt. Um zu überprüfen, ob diese Gleichung mit einem anderen Übertragungsverhältnis vielleicht bessere Resultate ergeben würde, ist es nicht nötig, die ganzen Versuche neuerdings aufzutragen, es genügt vielmehr die folgende Erwägung. Nehmen wir z. B. an, die Übertragungsziffer 15 wäre richtig, dann ist es, wie gesagt, nötig, daß die Linienzüge nahezu horizontal werden. Dieselben verlaufen aber in einer geneigten und soweit ähnlichen Weise, daß dahinter irgend ein Gesetz vermutet werden kann. Wir wollen zunächst zu seiner Ermittlung den folgenden Weg einschlagen. Wir legen den Resultaten die folgende Gleichung zugrunde, die Bruchlast

$$P = \sigma_b (F_b + n F_e),$$

und wollen nun umgekehrt für diese Gleichung jene Werte von σ_b und n bestimmen, die diesen Resultaten entsprechen. Es ist dies in der folgenden Zusammenstellung mit je zwei dort angegebenen Punkten versucht worden mit dem nachstehenden Erfolg:

Nr.	n	σ_b
13—17	3,5	580
1—5	2,25	691
7—9	0	781
13—15	2,3	723
15—17	6,2	540

Wie ersichtlich, schwankt n zwischen 0 und 6,2 und σ zwischen 540 und 781. Es sind das Resultate, die nur das eine beweisen, daß die Beibehaltung eines nur für zulässige Lasten mit einigem Recht angewendeten Gesetzes auf Bruchlasten unbedingt untunlich erscheint, und daß man einen anderen Weg einschlagen muß, um die Gesetzmäßigkeit dieser Erscheinung darzulegen.

2. Einfluß der Druckfestigkeit des Betons.

Derselbe ist der bereits in der Einleitung erwähnte und findet sich in der Abb. 17 dargestellt vor. In dieser Abbildung sind jene Zahlen aus der Tabelle II zur Darstellung gebracht, die die Eisenbetonsäule statisch als eine verstärkte Eisensäule behandeln. Es sind also bei dem jeweiligen Längenverhältnis die Bruchlasten, bezogen auf 1 cm^2 Eisenquerschnitt, allein ohne Beton aufgetragen worden. Eine strichpunktierte Linie gibt uns die mögliche Tragfähigkeit des Eisenquerschnitts (immer für Flächenlager)

nach der bekannten Tetmajerschen Gleichung: $3100 - 8{,}1x$ an. Wir sehen also deutlich, welcher Überschuß auf die Rechnung des Betonquerschnitts zu setzen ist. Auch hier sind jeweilig die Säulen aus demselben Beton und der gleichen Armatur, also natürlicherweise auch gleichen Betonquerschnitts durch Linienzüge verbunden worden. Es findet sich nun in der Tabelle II die Rechnung durchgeführt vor, welche Betondruckfestigkeit des umhüllten Kernes diesem Überschuß entspricht. Die Resultate finden sich mit Bezug auf die Gruppe Ia und Ib, d. h. also derselbe Beton nur in verschiedener Weise eingefüllt, in der Abb. 18 zusammengestellt vor. Das arithmetische Mittel dieser Darstellung ergibt sich für die senkrecht gestampften mit 540 kg/cm², der liegend hergestellten (einschl. der beiden Fehlversuche 2 und 4) mit 380 kg/cm², während die zugehörigen Würfel eine mittlere Festigkeit von 350 kg/cm² ergeben haben. Wir ersehen aus diesen Zahlen, daß zwischen Würfelfestigkeit einerseits und Säulenfestigkeit anderseits kein unbedingt sicheres Verhältnis herzustellen ist, wenn man nicht alle Nebenumstände mit in Betracht zieht. Sie zeigen uns aber weiter, daß auch eine gewöhnliche Art der Längsarmierung eine Verdopplung der nachgewiesenen, gewiß schon an und für sich beträchtlichen Druckfestigkeit erzielen kann. Es ist nunmehr das im Falle Ia erzielte

Bruchfestigkeit auf 1 cm² Eisenquerschnitt.

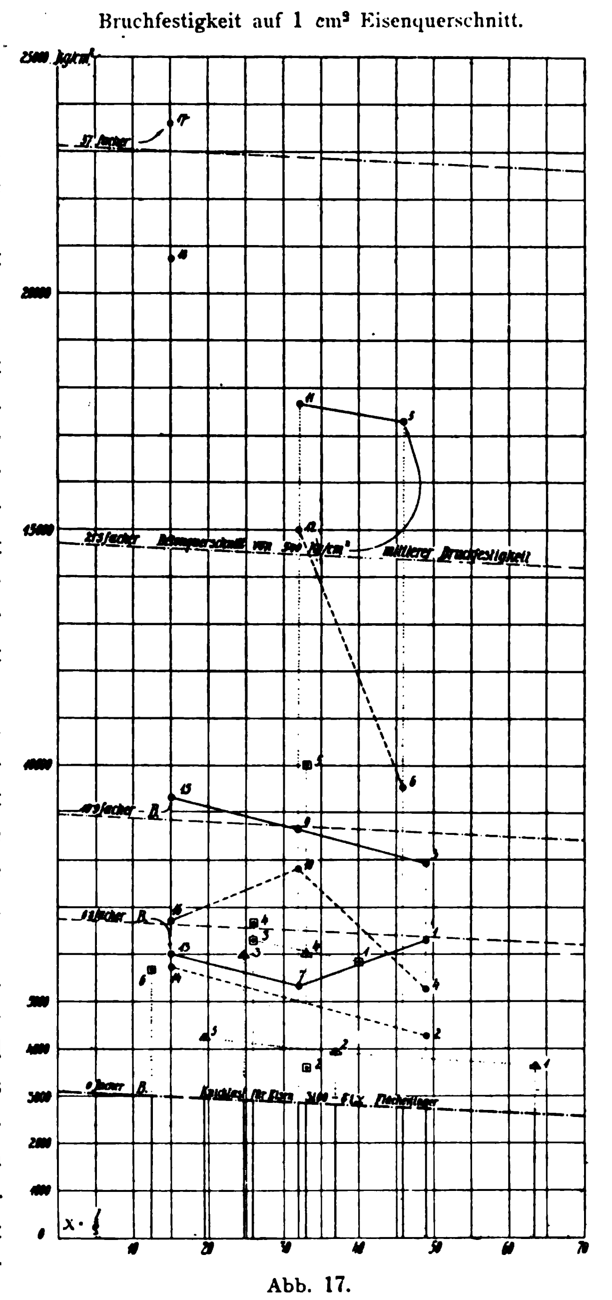
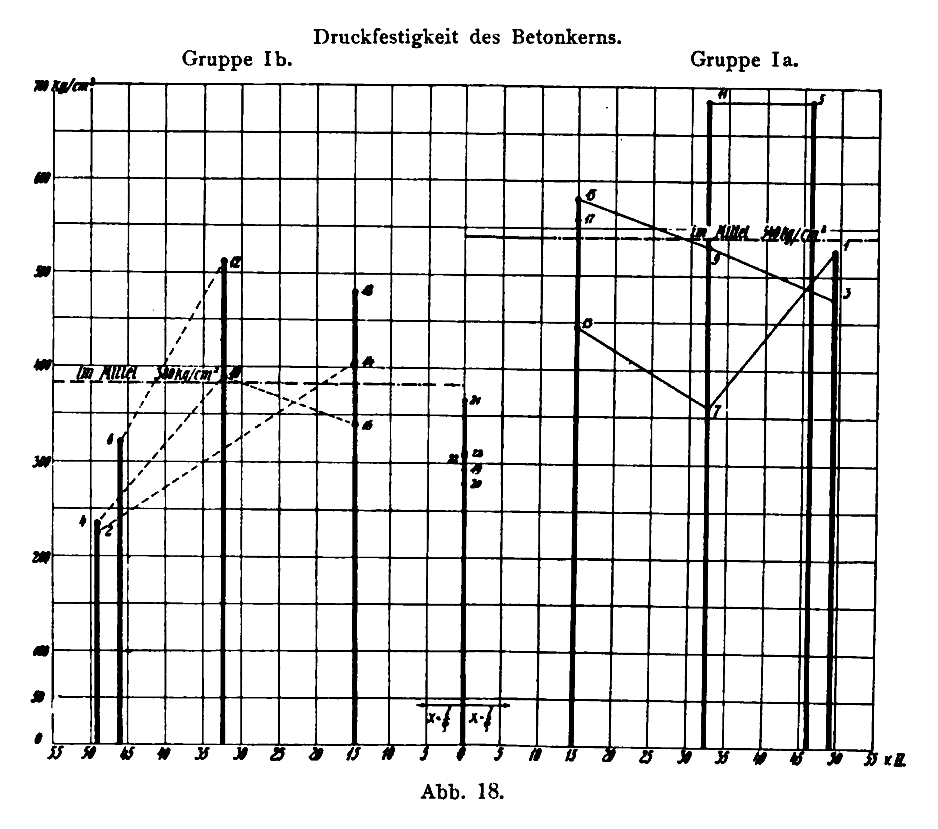


Abb. 17.

Mittel von 540 kg/cm² dazu benutzt worden, um rechnerisch den umgekehrten Weg zu gehen und auf Grund der in der Abb. 17 eingetragenen Säulen mit Armaturen, entsprechend einem 6,8fachen, 10,9, 21,5 und 37fachen Betonquerschnitt, die denselben entsprechenden Erhöhungen dort ersichtlich zu machen. Man ist also in der Lage, zu beurteilen, inwieweit dieses Gesetz mit den nachgewiesenen Tatsachen übereinstimmt. Die Abb. 17 läßt ersehen, daß diese Übereinstimmung bei allen Betonquerschnitten mit weniger als 10 vH. Armatur hinreichend genau zutrifft und größere Unterschreitungen nur bei 15 vH. Armatur nachgewiesen werden konnten, ent-



Druckfestigkeit des Betonkerns.

Abb. 18.

sprechend einem nur 6,8fachen Betonquerschnitt. Es sind dies die Säulen der Gruppe Ia Nr. 1, 7 und 13 mit 4 R.-E. von 28 mm, von der Gruppe II mit Walzprofilen. Ob damit ein Anzeichen verbunden ist, daß bei so viel Eisen die erwähnte Verdopplung der Würfelfestigkeit nicht mehr erreicht werden kann, darf auf Grund des beschränkten Materials nicht mit Bestimmtheit gesagt werden. Die Rechnung ist bei Gruppe II nicht ganz einwandfrei. Die Änderung ist jedoch eine so für die Sache unwesentliche, daß ich hier, um mir Zeit zu sparen, nur auf die geänderte Rechnung gelegentlich der späteren Versuche mit einbetonierten Eisensäulen am Schluß dieses Heftes verweise. Jedenfalls ist die Bestimmung der österreichischen Vorschriften, die schon bei über 2 vH. einen ungünstigen Einfluß

auf die rechnungsmäßige Tragfähigkeit annimmt und durch diese meine Versuche gerechtfertigt sein soll, nur durch die bisher allgemein übliche unrichtige Rechnung begründet, die, wie man nicht genug nachdrücklich hervorheben kann, die Tragfähigkeit dieser Säulen weit unterschätzt. Im Anschluß hieran seien auch gleich die übrigen hier untersuchten Betonqualitäten besprochen.

Die Gruppe II ist in der Abb. 19 dargestellt. Sie zeigt uns einen Beton aus Kalksteingrus und Schotter, also aus sehr weichem Material, und Säulen von hohem Eisenprozentsatz, welchem Umstande es zuzuschreiben ist, daß die so ermittelte Druckfestigkeit nur 198 kg/cm² erreicht. Seine Würfelfestigkeit ist im Durchschnitt mit 350 kg/cm² erhoben worden. Nur der Versuch 4 mit R.-E. zeigt nahezu die Würfelfestigkeit. Es ist bezeichnend, daß auch selbst dieser, ähnlich wie in Gruppe I hergestellte Versuch, keine Erhöhung über die Würfelfestigkeit zeigt. Es muß also zur Beurteilung noch ein anderes Moment, wie

Druckfestigkeit des Betonkerns bei Gruppe III.

Druckfestigkeit des Betonkerns bei Gruppe II.

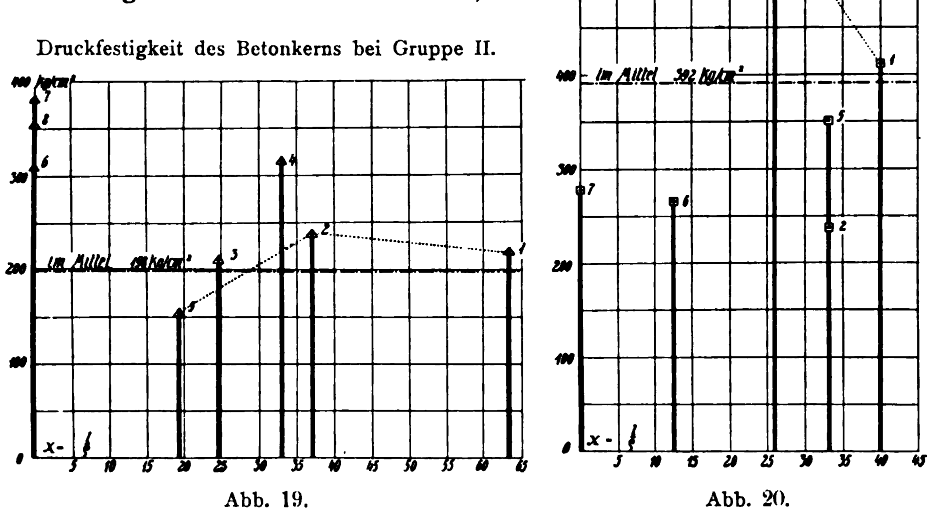


Abb. 19. Abb. 20.

die Würfelfestigkeit der beiden Materialien, hinzukommen. Ich glaube, die Scherfestigkeit und vielleicht der Elastizitätsmodul, d. h. die damit zusammenhängende Zusammendrückbarkeit. Jedenfalls werden diese Umstände bei den übrigen Versuchen dieser Gruppe trotz der überaus kräftigen Querverbindung noch verschlechtert. Siehe zum Vergleich die andern Versuche derselben Art am Schluß mit Beton aus quarzigem Material, wo dieser Abfall nicht zu verzeichnen war.

In der Gruppe III endlich treten zwei deutlich verschiedene Erscheinungen zutage (Abb. 20). Einerseits Säulen, deren Druckfestigkeit sich von der Würfelfestigkeit nicht viel unterscheidet, anderseits solche, die ebenso wie in der Gruppe I eine Verdopplung dieser Zahlen erreichen. Der Beton ist

zwar wesentlich magerer gemischt wie in I, bei nahezu gleichen Zuschlagstoffen, er zeigt jedoch in seinen statischen Eigenschaften keine so wesentlichen Abweichungen, wie die nahezu halbe Menge von Zement erwarten läßt, und wie dies insbesondere in verschiedenen Vorschriften zum Ausdruck kommt. Die erwähnten Abweichungen in der Festigkeit führe ich auf eine andere Ursache, auf die in diesem Falle nicht so verläßliche Bügelarmierung, zurück, als wie in I.

Obwohl das Schaubild Abb. 17 nicht dazu bestimmt ist, die absolute Größe der Druckfestigkeit zu besprechen, so erlaubt es uns doch, dieselben untereinander zu vergleichen. Wir sehen insbesondere aus den diesbezüglichen Linienzügen, welch großer Abfall an Druckfestigkeit zwischen Ia und Ib besteht, ein Abfall, der in erster Linie auf die horizontale Erzeugung der Gruppe Ib zurückzuführen ist. Der schlechte Einfluß dieser Herstellungsart wird auch durch die große Unregelmäßigkeit noch mehr gekennzeichnet, die teilweise durch das Fehlen von Bügeln beim Kopf (sieh Bruchbilder) zu erklären ist. Es kommt ferner noch das verschiedene Material zur Anschauung. Während zwischen den Gruppen I und III ein wesentlicher Unterschied nicht besteht, zeigt die Gruppe II, die aus Kalksteingrus und Kalksteinschotter hergestellt ist, also aus einem Stein von wesentlich geringerer Scherfestigkeit, einen deutlichen Abfall, der unter Umständen bis die Hälfte beträgt. Alle diese Umstände zeigen, wie unrichtig die österreichischen Vorschriften verfahren haben, als sie die zulässige Druckfestigkeit allein von der verwendeten Zementmenge abhängig gemacht haben. Das Unrecht kommt in zweifacher Hinsicht zum Ausdruck. Einerseits, indem man durch sorgfältige Auswahl der Materialien auch bei mageren Mischungen hohe Druckfestigkeiten erzielen kann, und anderseits, indem so eine Vorschrift das Bestreben, etwas Besseres zu leisten, nicht fördert.

3. Einfluß der horizontalen Verbindung.

Im Lichte der auf Tabelle II dargestellten Resultate wäre folgendes hervorzuheben. Zunächst bezüglich der umlaufenden und der Verbindungen der Eisen übers Eck, läßt sich sagen, daß die mit der letzteren Form erzielten Resultate vollständig zufriedenstellen. Ob die eine oder andere Form besser ist, läßt sich nicht sagen, da hierzu die Vergleichsunterlagen nicht genügen. Wohl aber bin ich der Meinung, daß die Längseisen rechts und links im Beton verspannt nur in der Richtung ausweichen können, in welcher der Bügel übers Eck gelegt ist, daß also hier mit einer geringen Eisenmenge ein größerer Effekt erzielt werden kann, als bei der umlaufenden Anordnung. Am allerwichtigsten erscheint der Einfluß des guten Anliegens der Bügel, und wird hierauf das gute Resultat des Versuchs III_3 (sieh auch Abb. 20) zurückgeführt. Während die übrigen Versuche derselben Gruppe, die mit gelochtem Flacheisen verbunden waren, mehr oder weniger große Ausfälle gezeigt haben, da dieselben gegenüber dem R.-E. einen Spielraum von 2 mm haben müssen und auch sonst nicht so gut wirken können.

Was schließlich die Entfernung der Bügel anlangt, so besteht, wie bereits hervorgehoben wurde, auf Grund des nicht genug hinreichenden Materials keine Möglichkeit, zu endgültigen Schlüssen zu gelangen. Aus meinen Versuchen mit Eisensäulen wissen wir, daß uns das Verhältnis der Trägheitsradien des einzelnen Eisenquerschnitts zu dem des Gesamtquerschnitts, multipliziert mit der Säulenlänge, einen Maßstab der anzuordnenden Knotenabstände abgibt. In Tabelle II ist derselbe Maßstab festgehalten worden. Aus meinen Versuchen von Eisensäulen[1]) wissen wir, daß hierzu eine steife Verbindung in dem halben so berechneten Abstande genügt. Aus den am Schlusse dieses Heftes gemachten Versuchen geht ferner hervor, daß im Falle der Einbetonierung einer Eisensäule diese Knotenpunkte weiter als diese Entfernung auseinander gerückt werden können. Wieviel etwa dies beträgt und ob überhaupt dies ein zutreffender Maßstab ist, läßt sich derzeit nicht sagen. Nur bei kleinen Säulen (z. B. bei den Versuchen von Talbot) wäre zu bemerken, daß dann das Auseinanderrücken der Knotenpunkte nicht in dem Maße ins Gewicht fällt. Im vorliegenden Falle haben wir bei Gruppe I bei den längeren Säulen Entfernungen der schachbrettförmig angeordneten Bügel, die 2 bis 3 mal größer sind als die theoretisch bestimmte Ziffer. Dieselben haben ebenso wie der Versuch 4, der bei Anordnung der gekreuzten Bügel in derselben Ebene, und zwar in Abständen vom 1,5fachen, zufriedenstellende Resultate ergeben. Der Versuch 4, insbesondere der Gruppe II, ist auffallend besser als der Versuch 3 mit dichter umlaufender Verbindung, obwohl auch dieser Vergleich zu Bedenken Anlaß gibt und daher nichts beweist.

Die Versuche der Gruppe III zeigen ebenfalls Knotenabstände vom 2- bis 3fachen. Die besten Versuche 3 und 4 haben dreimal so große Abstände, als die Theorie es verlangen würde, ohne daß das Resultat dadurch Schaden leidet. Man kann also erwarten, daß Abstände von dieser Größe zur Erreichung der höchsten Betonfestigkeit genügen, sofern natürlich die Quereisen von entsprechenden Abmessungen sind. Dies sowohl, wie die Entfernungen mit den übrigen Säulenabmessungen in Einklang zu bringen, bleibt einer späteren systematischen, wohl dotierten Forschung vorbehalten.

4. Einfluß des Längenverhältnisses.

Da das vorliegende Beweismaterial mir hinreichend erscheint, um darzutun, daß von Beton nur der umschnürte Kern in Frage zu ziehen ist, so sei in der Folge von der Darstellung beider Formen abgesehen und nur diese zur Anschauung gebracht. Um den Einfluß des Längenverhältnisses kennen zu lernen, ist es nötig, die übrigen Einflüsse auszuschalten. In der Folge sind alle Säulen derselben Bewehrung zusammengefaßt, und sind

---

[1]) „B. u. E.“ 1908, Heft III u. f. bis VI.

die einzelnen Schaubilder in Abb. 21 übereinander gestellt und auf dieselbe x-Achse bezogen. Die Darstellung bezieht sich auf Bewehrungen von etwa 0, 5, 10 und 14 vH. In diesen Bildern sind die Werte kg/cm² nach Gleichung 6, d. i. also unter Annahme eines 15fachen Eisenquerschnitts eingetragen. Außerdem finden sich die verschiedenen Betonsorten zu Linienzügen verbunden vor, wobei ebenso wie in Abb. 16 die Bewehrung folgendermaßen gewählt wurde: Ia ———, Ib —o—o—o, II — — — und III ....

Bruchfestigkeit, abhängig von der Länge bei gleicher Bewehrung.

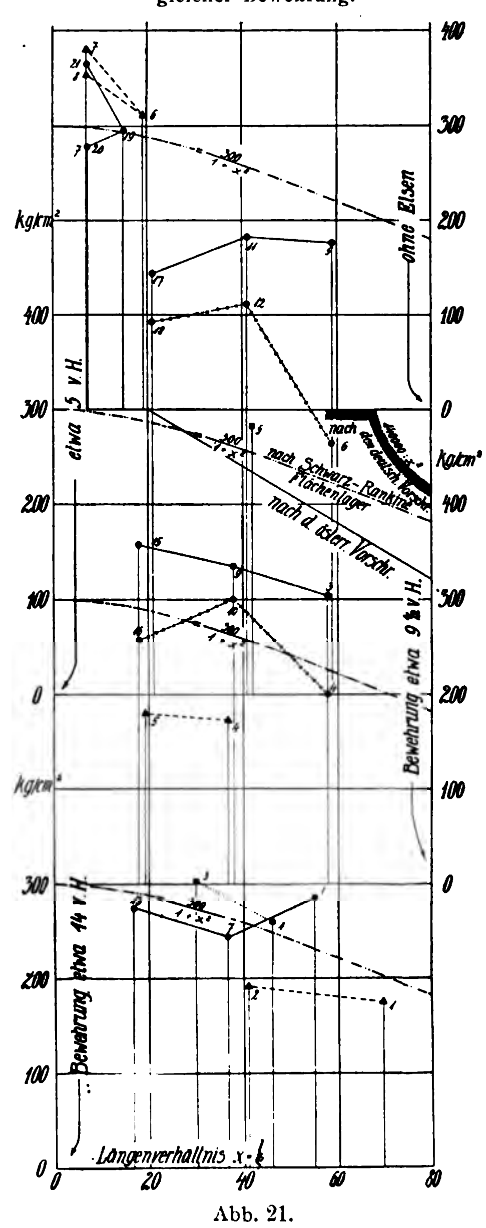


Abb. 21.

Zum Vergleich der so erhaltenen Linienzüge sind die bisher üblichen Abminderungskurven eingetragen worden, ausgehend von 300 kg/cm². Es ist dies die von Schreiber dieses aufgestellte Schwarz-Rankinesche Gleichung $\frac{300}{1+x^2}$, ferner die derselben nachgebildete geradlinige Form der österreichischen Vorschrift mit einem stärkeren Gefälle, die eine Abminderung von $\alpha = (1{,}12 - 0{,}006\,x)$ verlangt, endlich die deutsche Vorschrift, deren Einfachheit nicht genug zu loben wäre, wenn man nicht auch hier versucht hätte, eine Euler-Gleichung für Spitzenlager (!) unterzubringen, so wenig dies gerechtfertigt ist und für praktische Verhältnisse in Betracht kommt.

Wenn man den Verlauf der einzelnen Linienzüge betrachtet und sie mit den vorgeschriebenen Abminderungen in Vergleich zieht, so darf nicht übersehen werden, daß wir uns eines 15fachen Eisenquerschnitts bei der Darstellung bedient haben und daß es zum mindesten fraglich erscheint, ob dies gerechtfertigt ist oder nicht. Jedenfalls kann gesagt werden, daß auch eine andere Zahl bei gleichem Armierungsverhältnis an dem Verlauf, der hier einzig allein maßgebend ist, nichts ändert. Der Verlauf der einzelnen

Linienzüge zeigt uns, daß die vorgeschlagene Abminderung an und für sich vollständig gerechtfertigt ist. Wenn wir aber bedenken, wie geringfügig diese Abminderung ist und daß die Praxis die angeführte Grenze von $x = \frac{l}{\varrho} = 80$ nur in den seltensten Fällen erreichen wird und die vorgeschriebene Abminderung kleiner ist als die Unregelmäßigkeiten der Betondruckfestigkeit, so ist der Vorschlag als sehr weise zu begrüßen, der bei Säulenlängen bis $\frac{l}{a} = 18$ von einer Abminderung überhaupt absieht. Es ist dies jedenfalls eine wesentliche Erleichterung für die Praxis und entspricht einer grundlegenden Forderung, die bei keinem Gesetz außer acht gelassen werden sollte, der Einfachheit und Gemeinverständlichkeit.

Fremde Versuche mit Säulen.

Wir wollen nunmehr das bisher an eigenen Versuchen Dargelegte an den bisher ausgeführten fremden Versuchen überprüfen, und zwar an den Arbeiten von Bach, Considère bezw. der französischen Regierungskommission von Dr. Gessner mit einbetonierten Mannesmannsrohren, welch letzte Arbeit uns ein Bindeglied zu meinen einbetonierten Eisensäulen sein soll.

I. Säulenversuch von C. v. Bach.

Bezüglich der Versuche mit gewöhnlichen Eisenbetonsäulen[1]) beziehe ich mich auf das in der Einleitung Gesagte (Abb. 4 und 5). Die Resultate finden sich in folgender Tabelle II zusammengestellt vor. Die Betonfestigkeit ist mit 141 kg/cm² angegeben. Wie ersichtlich, läßt sich damit in dem eingeschlossenen Kern eine Betonfestigkeit bis 259 kg/cm² erzielen. Es ist dies etwa das 1,7fache, also nahezu dasselbe, was auch in meinen Versuchen nachgewiesen worden ist.

Tabelle IIIa.

Versuche von Bach mit Eisenbeton.

Nr.	Bügel f cm	F_b	F_e	$\frac{F_b}{F_e}$	h	i	x	Bruch-last t	auf Eisen kg/cm²	3100 − 8,1 x	Auf Beton kg/cm²
I	0	380,25	0	—	100	—	—	—	—	—	141
II	25	380,25	7,1	53,5	100	9	11,1	104,03	14 651,1	3010	217,5
III	2,5	380,25	7,1	53,5	100	9	11,1	109,43	15 412,7	3010	231,8
IV	6,25	380,25	7,1	53,5	100	9	11,1	126,87	17 869	3010	259
V	25	400	12,6	31,7	100	9	11,1	105,17	8 346,8	3010	168
VI	25	441	28,3	15,5	100	9	11,1	116,9	4 130,7	3010	74,2

[1]) Heft 29 der Mitteilungen über Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. — Berlin bei J. Springer.

Tabelle IIIb.

Versuche von Bach mit umschnürtem Beton.

Bauart des Körpers Abb.[1])	Bezeichnung	Spirale		Stäbe		F_b	F_e	$\frac{F_b}{F_e}$	h	i	x	Bruchlast t	auf Eisen der Längsstäbe kg/cm²	Flächenlager $3100 - 8{,}1\,x$	Auf Beton kg/cm²
		Ganghöhe mm	Stärke mm	Anzahl	Stärke mm										
1	I	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	133
2	II	38	5	4	7	510,7	1,54	331	100	12,4	8,06	98,83	64 175	3030,34	184,7
	III	37	7	4	7	502,7	1,54	326	100	12,3	8,13	101,3	65 778,9	3034,14	192,4
	IV	42	10	4	7	490,9	1,54	319	100	12,15	8,22	103,9	67 467	3033,42	202
3	V	38	5	8	11	510,7	7,6	672	100	12,2	8,19	140,63	18 504	3033,66	230
	VI	37	7	8	11	502,7	7,6	661	100	12,1	8,26	144,07	18 956	3033,1	256
	VII	43	10	8	11	490,9	7,6	646	100	11,95	8,36	152,23	20 030	3032,3	263
4	VIII	31	7	4	7	502,7	1,54	326	100	12,3	8,13	121,83	79 110	3034,14	233
	IX	40	10	4	7	490,9	1,54	319	100	12,15	8,22	105,83	68 720,7	3033,42	206
	X	41	12	4	7	483,1	1,54	314	100	12,05	8,3	112,97	73 746,7	3032,8	225
	XI	37	14	4	7	475,3	1,54	309	100	11,95	8,36	98,77	64 136	3032,3	197
5	XII_1	40	7	8	5	502,7	1,57	320	100	12,4	8,06	103,17	65 713	3030,34	195,7
	XII_2	40	10	8	7	490,9	3,08	159	100	12,15	8,22	102,73	33 353	3033,42	190,6
	XII_3	40	14	8	10	475,3	6,28	79	100	11,8	8,47	115,63	18 912,4	3031,4	194,6
6	XIII_1	80	7	8	7	502,7	3,08	163	100	12,3	8,13	101,93	33 094,1	3034,14	184
	XIII_2	80	10	8	10	490,9	6,28	78	100	12,0	8,33	112,5	18 791,4	3032,52	202
	XIII_3	80	14	8	12	475,3	9,05	53	100	11,7	8,55	113,53	12 544,7	3030,75	179,5
7	XIV_1	120	7	8	10	502,7	6,28	80	100	12,15	8,22	97,93	15 593,9	3033,42	157
	XIV_2	120	10	8	12	490,9	9,05	56	100	11,9	8,4	114,7	12 674	3032	172
	XIV_3	120	14	8	14	475,3	12,32	38	100	11,6	8,62	130,73	10 611,2	3030,18	199,5

[1]) Abb.-Nr. der Versuche Bachs siehe Beton u. Eisen 1905, S. 305 Tafel XXIV u. 1906, S. 14.

Wir wollen nun im Anschlusse hieran die Versuche Bachs mit umschnürtem Beton in den Kreis unserer Betrachtungen einbeziehen, um so sehen zu können, welche Wirkung auf diese Weise erzielt werden kann. Die Resultate dieser Rechnung finden sich in der Tabelle IIIb zusammengestellt vor. Die reine Betonsäule ergab in diesem Falle eine Druckfestigkeit von 133 kg/cm²; es ist daher in bezug auf Festigkeit nahezu derselbe Beton wie im vorigen Fall. Wesentliche Erhöhungen der Druckfestigkeit haben sich nur in den Fällen V bis VIII[1]) eingestellt, und zwar bis nahezu das Doppelte der reinen Druckfestigkeit, im Maximum 263 kg/cm². Es ist mir dabei vollständig klar, daß gerade diese Versuche mit einer gewissen Absicht nicht das Beste nachweisen, was mit dem umschnürten Beton erzielt werden kann. Sie sagen aber mit voller Deutlichkeit, daß die durch die Umschnürung hervorgerufene Festigkeit, sofern man nur die Bruchfestigkeit in Betracht zieht, nicht in dem Maße zunimmt, als man dies anzunehmen geneigt ist, und daß auch einfache weitentfernte Bügel ähnliches erzielen.

II. Die Versuche der französischen Regierunng.

Die Versuche Professor Guidis eignen sich leider nicht für diese Untersuchung. Wir sind also nur noch auf die Versuche angewiesen, die die französische Regierungskommission unter Intervention des Herrn Considère angestellt hat. Die diesbezüglichen Daten finden sich in den Tabellen IVa, b und c zusammengestellt vor. Es sind das zunächst Versuche mit gewöhnlich armiertem Beton, System Hennebique, wie in Tabelle IVa verzeichnet worden. Ihre Anordnung entspricht derjenigen der Gruppe III meiner Versuche, und ähneln sie derselben auch mit bezug auf die Ungleichmäßigkeit der erzielten Resultate, hierfür scheint mir übrigens auch dieselbe Ursache vorzuliegen, indem auch sie mit durchlochten Blechen nach System Hennebique ausgeführt worden sind. Hinzu kommt jedoch noch der bereits eingangs erwähnte Umstand bezüglich der Hohllagerung der Eisen bei der Druckplatte. Die näheren Einzelheiten finden sich in dem Regierungsberichte der Commission du Ciment armé, Paris bei Dunot 1907 veröffentlicht vor[2]). Aus demselben geht hervor, daß dieselben in Abständen von 50 cm (also nicht viel mehr wie die kleinste Abmessung der Säule) mit durchlochten Blechen 70/3 mm versehen waren. Die nächste Horizontalverbindung war 25 cm von der Druckfläche entfernt. Diese Anordnung darf wohl als eine der schlechtesten Anordnungen am Säulenfuß bezeichnet werden, und gibt eine Durchsicht der Bruchfiguren regelmäßig eine Zerstörung des Säulenendes an. Es sind das Versuche mit schlechten Säulenfüßen, aber nicht mit Eisenbetonsäulen. Aber noch mehr als das: auch die Säulen selbst können vom heutigen Standpunkt aus kaum als Eisenbeton bezeichnet werden, da sie mit den bereits hinreichend

[1]) Mit diesen hat sich Considère ausdrücklich für befriedigt erklärt (sieh „B. u. E." 1906, S. 14).

[2]) Sieh auch die deutsche Uebersetzung von Oberingenieur Sor des Buches „Der umschnürte Beton", herausgegeben von Wayss u. Freytag und Ed. Ast u. Co.

Tabelle IVa.

Versuche der französischen Regierungskommission mit Eisenbetonsäulen.

Nr.	F_b	F_e	%	$\overline{F_b}$	%	$\frac{\overline{F_b}}{F_e}$	i	x	Bruchlast t	Auf kg/cm² F_e	3100 − 8,1 x	Auf kg/cm² $\overline{F_b}$
1	1600	63,6	3,97	1260	5,4	18,52	15,5	32,2	401	6 305	2839	187
2	1600	32,2	2,01	1274,5	2,5	40	16,25	30,7	374,2	11 621	2851	219
3	1600	16,7	1,04	1281,6	1,3	76,9	16,7	29,9	401	24 012	2858	275
4	1600	8,04	0,5	1267,4	0,63	158,7	17	29,4	401	49 875	2862	295,6
5	1600	4,52	0,28	1274,5	0,35	285,7	17,2	29	402,2	88 982	2862	301,4
1	625	24,63	3,94	432,6	5,6	17,85	10,4	48	145,7	5 915	2711	179,4
2	625	3,14	0,5	400	0,8	125	10	50	166,7	53 088	2695	403

Tabelle IVb.

Versuche der französischen Regierungskommission mit Säulen aus Beton, Eisenbeton und umschnürtem Beton.

Nr.	F_b	$\overline{F_b}$	Querarmatur				Längsarmatur			$\frac{\overline{F_b}}{F_e}$	i	x	Bruchlast t	Auf kg/cm² F_e	3100 − 8,1 x	Auf kg/cm² $\overline{F_b}$	Bruchlast t	Auf kg/cm² F_e	Auf kg/cm² F_b
			Querschnitt	Abstand vorhanden	Abstand theoret.	%	Querschnitt	F_e	%										
1	400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,8	17,2	36,4	—	—	91	60,11	—	150,2
2	400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,8	17,2	38,9	—	—	97,2	66,57	—	166,4
3	400	256	40/3	33	6,2	1	4 R.-E. 18	10,18	4	25	7,1	14,1	48,77	4791	2986	72,2	93,0	9136	246
4	400	256	40/3	33	6,2	1	4 R.-E. 18	10,18	4	25	7,1	14,1	50,47	4958	2986	78,9	94,7	9315	253,2
5	402	232	R.-E. 6	2,0	5,5	3,54	6 R.-E. 9	3,82	1,8	61	8,1	12,3	102,07	26720	3000	388	132,69	34735	520,0
6	402	232	R.-E. 6	2,0	5,5	3,54	6 R.-E. 9	3,82	1,8	61	8,1	12,3	108,88	28503	3000	418	127,02	33251	496
								gegossen									gestampft		

gekennzeichneten schlaffen Flacheisen versehen, noch dazu horizontal gegossen wurden. Zu diesbezüglichen Vergleichen gibt die Tabelle IVb Anlaß. Dort hat man in richtiger Erkenntnis des begangenen Fehlers die Eisen bis zur Druckplatte durchgeführt und die letzte Horizontalverbindung im halben Abstande vor der Druckplatte angeordnet. Der Bruch trat auch in diesem Falle ausnahmslos in der Säulenmitte ein. Die Serie wurde zweimal erprobt, einmal unter Wiederholung des vorigen Vorganges, jedoch stehend hergestellt, durch Gußbeton ohne Stampfen, und das andere Mal mittels Stampfbeton, 300 kg Zement auf 400 Liter Sand und 800 Liter Schotter, kleiner als 25 mm (entspricht 1 m^3 Beton), und 11,2 vH. bezw. 8,2 vH. Wasser, bezogen auf das Trockengewicht der übrigen Materialien. Zwei Versuche gestatten, jeweilig den Unterschied der Aufbewahrung an der Luft oder im Wasser zu beurteilen. Ein Blick auf die Resultate der gegossenen Säulen wirkt geradezu deprimierend. Ihre Säulenfestigkeit beträgt in diesem Falle etwa 94 kg/cm^2. Die gewöhnliche Armatur bringt jedoch nur 76 kg/cm^2 zustande, während die Umschnürung 403 kg/cm^2 erzielt, das ist also fast das 6fache. Ein Vergleich muß jedoch den Umstand berücksichtigen, daß die Umschnürung im halben, die schlaffen Bleche jedoch im fünffachen Abstande angeordnet waren, wie ihn die Theorie ergibt. Die Verhältnisse ändern sich sofort selbst bei dieser Sachlage, wenn die Säulen durch Einstampfen hergestellt werden, wodurch nicht nur die Qualität des Betons eine Verbesserung, sondern auch die horizontale Verbindung eine Anfangsspannung erhält, die sie in die Lage versetzt, sofort mitzuwirken. Es ist dann Beton allein 158 kg/cm^2, gewöhnlicher Eisenbeton 250 kg/cm^2, umschnürter Beton 507 kg/cm^2. Wir können also annehmen, daß durch das Stampfen die schlaffen Verbindungen so weit angezogen wurden, daß sie ihre Wirkung im guten Sinne zeigten und nicht bloß durch eine Querschnittsverminderung wie im vorigen Falle bei Talbot u. a. Einen noch besseren Vergleich gestattet die Tabelle IVc der dritten Versuchsserie. In diesem Falle sind zwei Betonsorten zu je zwei vollständig gleichen Serien angewendet worden. Es wurden einmal 350 kg, das andere Mal 500 kg Zement auf 400 Liter Sand und 800 Liter Schotter angewendet. Das Wasser betrug 8,3 bezw. 9 vH., kann also als nahezu gleich gelten. Die Säulen wurden stehend gestampft, die Eisen bis 7 mm von der Druckfläche hinaufgeführt. Ich schreibe diesem Umstande und im Zusammenhange damit, daß die erste horizontale Verbindung beim umschnürten Beton unmittelbar unter der Druckfläche, bei gewöhnlichem Eisenbeton jedoch sich im Abstande von 16,5 cm befand, die größte Schuld bei dem Ausfalle zu. Wir finden auch hier wieder bei den mit Nr. 1 bezeichneten Säulen aus Eisenbeton in dem Originalbericht (sieh S. 287) überall Brüche am Auflager verzeichnet vor. Die Resultate zeigen, daß der Beton allein eine Säulenfestigkeit von 242,5 und 198 bezw. 184,5 und 146,9 kg/cm^2 zeigt. Diese Zahlen bringen nur die Unsicherheit zum Ausdruck, die bei größeren Längen von Beton unvermeidlich ist. Bei gewöhn-

Tabelle

Versuche der französischen Regierungskommission mit

Nr.	F_b	$\overline{F_b}$	Querarmatur				Längsarmatur				$\frac{F_b}{F_e}$
			Querschnitt	Abstand vorhanden	Abstand theoret.	%	Querschnitt	F_e	%		
0	332	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	332	254,4	40/3	33	12	1,12	8 R.-E. 15	14,14	7	8,12	14,28
2	332	254,4	R.-E. 6	1	6	5,4	6 R.-E. 10	4,71	1,8	7,2	55,55
3	332	254,4	R.-E. 6	1,4	6	4,54	6 R.-E. 10	4,71	1,8	6,3	55,55
4	332	254,4	R.-E. 8	2,5	6	4,5	6 R.-E. 10	4,71	1,8	6,3	55,55
5	332	254,4	R.-E. 6	1,9	5,3	3,35	6 R.-E. 9	3,82	1,5	4,9	66,66
6	332	254,4	R.-E. 6	2,4	4,6	2,7	6 R.-E. 8	3,01	1,2	3,9	83,33
7	332	254,4	R.-E. 6	3,0	4,0	2,13	6 R.-E. 7	2,31	0,9	3	111,1
0	332	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	332	201	35/3	33	13,5	1	8 R.-E. 9	4,02	2	3	50,0
2	332	254,4	R.-E. 6	4,5	9,3	1,42	6 R.-E. 8	3,01	1,2	2,6	83,33
3	332	254,4	R.-E. 5	3,0	9,3	1,47	6 R.-E. 8	3,01	1,2	2,7	83,33

350 kg auf 1 m³ Beton.

lichem Eisenbeton finden wir bei 2 m Länge 334, bei 4 m Länge 311,9 kg/cm², bezw. bei dem besseren Beton bei 2 m Länge 272,6, bei 4 m Länge 300,4 kg/cm².

Der umschnürte Beton, der, wie gesagt, diesen Fehler am Auflager nicht hat, zeigt durchschnittlich 400 bis 500 kg/cm². Eine Ausnahme bilden nur die Fälle — es sind die letzten drei Versuche —, wo die Art der Horizontalverbände sich in der Anordnung einander nähert. Wie ersichtlich, ist dort im Versuch Nr. 1 die Knotenpunktentfernung nur das Doppelte und bei den umschnürten Säulen Nr. 2 und 3 nur die Hälfte bis ein Drittel der theoretischen Ziffern. Die betreffenden Resultate nähern sich sofort in auffälliger Weise (311,9, 272, 397 und 300,9, 320, 328).

Versuche mit Mannesmannröhren.

Herr Dr. Gessner, Maschinenkommissar der k. k. Staatsbahn, hat sich der dankenswerten Aufgabe unterzogen, dieses wichtige Walzprofil auf seine Brauchbarkeit zu Säulenkonstruktionen zu untersuchen, und finden sich leider bis jetzt nur die Versuche mit reinen Eisensäulen veröffentlicht vor.[1]) Derselbe hatte die Güte, mir auch die an derselben Stelle in der Technischen Hochschule in Wien gewonnenen Resultate mit einbetonierten Eisensäulen

[1]) Die Knickfestigkeit von Mannesmannstahlrohrsäulen. Von Dr. Ing. A. Gessner, Selbstverlag. Wien. Nordbahnhof.

IVc.
Säulen aus Beton, Eisenbeton und umschnürtem Beton.

ϱ	l	x	Bruchlast t	Auf Eisen kg/cm²	3100 — 8,1 x	Auf Beton kg/cm²	Bruchlast t	Auf Eisen kg/cm²	Auf Beton kg/cm²
—	2,0	—	80,5	—	—	242,5	61,2	—	184,5
6,35	2,0	31,4	107,7	7 616,6	2846	334	95,3	6 739,7	272,6
8,5	2,0	23,5	170,1	36 114,6	2909	597	156,5	33 227	545,6
8,5	2,0	23,5	164,4	34 904	2909	575,8	152	32 271,7	528,5
8,5	2,0	23,5	142,9	30 339	2909	493,8	146,3	31 061,5	506,7
8,55	2,3	26,9	146,3	38 298	2882	531	136	35 602	490,8
8,6	2,6	30,2	127,6	42 392	2855	477	112,3	37 309	413,4
8,65	3,0	34,6	99,8	43 203	2820	363	98,7	42 727	359
—	4,0	—	65,8	—	—	198	48,7	—	146,9
6,65	4,0	60,1	73,2	18 209	2613	311,9	70,9	17 636	300,4
8,6	4,0	46,5	101,5	33 721	2723	372	88,5	29 402	320
8,6	4,0	46,5	95,3	33 721	2723	347	90,7	30 193	328
			350 kg auf 1 m³ Beton.				500 kg auf 1 m³ Beton		

zur Verfügung zu stellen, deren Veröffentlichung demnächst in Aussicht steht. Dieselben finden sich gemeinsam mit den ersteren in Tabelle V vor.

Parallelversuche mit dem 1 bis 3 Monate alten Beton liegen nicht vor, sondern nur eine Normenprobe mit Zement, die 184,5 nach sieben und 270 kg/cm nach 28 Tagen Erhärtung ergeben hat. Dieselbe läßt sich natürlich hier nicht in Vergleich setzen, sondern dürfen obige Zahlen der lezten Rubrik annähernd die Würfelfestigkeit des verwendeten Betons darstellen.

Das besonders gute Stahlmaterial erlaubt in diesem Fall nicht, mit der mehrerwähnten Tetmajerschen Formel zu rechnen. Dr. Gessner hat vielmehr für dasselbe als Mittelwert die Gleichung $3350 - 4{,}3 \times x$ bis $x = 82$ ermittelt. Wir haben uns jedoch in der Folge dieser Formel nicht bedient, da wir die Bruchfestigkeit der reinen Eisensäulen nicht erst berechnen müssen, sondern eine direkte Ermittlung aus den Versuchen Dr. Gessners mit leeren Eisenröhren dieser Art vorliegt.

Diese Versuche werden hauptsächlich die interessieren, die in einer geschlossenen Eisenröhre das Ideal einer Umschnürung sehen. Nach dieser Anschauung müßten solche Säulen ganz enorme Betondruckfestigkeiten liefern. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, auch dann nicht, wenn man in Betracht zieht, daß der im Verhältnis 1 : 3 gemischte Beton von unerfahrenen Händen im Laboratorium hergestellt und ein-

Tabelle V.

Versuche von Mannesmannsäulen (Abb. 22).

Nr.	F_b	Querschnitt		F_e	$\frac{F_e}{F_b}$	h	i	x	Bruchlast		Auf kg/cm² Beton
		Durchm.	Fleischst.						t Eisen allein	t einbetoniert	
1	78,5	10,8	0,4	13,1	6	5,2	200	38	49,5	55	68,3
2	78,5	10,8	0,4	13,1	6	5,2	300	58	42	49	90
3	78,5	10,8	0,4	13,1	6	5,2	400	77	39	44,5	70
4	160,6	12,5	0,45	20,8	8	7,3	200	26	66	90	150
5	160,6	12,5	0,45	20,8	8	7,3	400	55	63	79	100
6	160,6	12,5	0,45	20,8	8	7,3	600	82	59	68	55
7	292,6	20,3	0,5	29,5	10	9,4	200	21	103	164	112
8	292,6	20,3	0,5	29,5	10	9,4	400	43	100	141	138
9	292,6	20,3	0,5	29,5	10	9,4	600	64	95	132	125

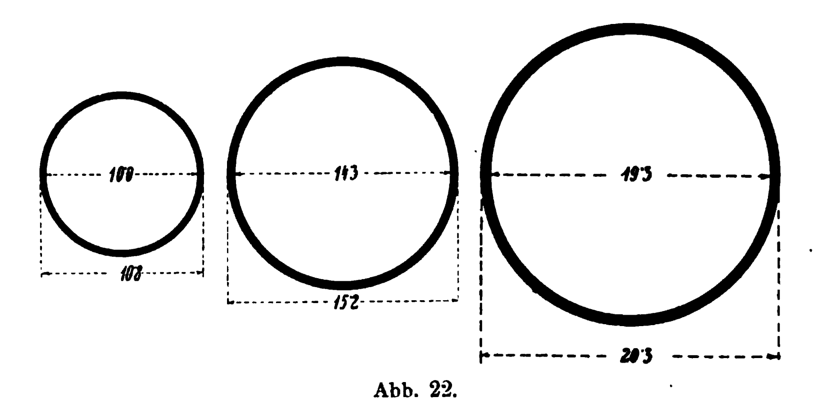


Abb. 22.

gestampft wurde. So wertvoll das Material an und für sich ist, so liegt seine Bedeutung in der vorliegenden Form mehr in negativer Hinsicht. Es zeigt, daß auch in einer geschlossenen Röhre die anderweitig mit ähnlichen Prozentsätzen der Armatur von Walzeisen gewonnenen Resultate auch auf Röhren Geltung haben, und daß auch hier die Umschnürung des Betons keinerlei Wunderwirkung ausübt, vielmehr über das Maß nicht wesentlich gesteigert werden kann, das sich uns bei einer guten sonstigen Armierung ergibt.

Meine Versuche mit einbetonierten Eisensäulen.

Des Gedankenganges, der mich zur Vornahme von Versuchen mit Eisensäulen führte, habe ich bereits eingangs Erwähnung getan. Die diesbezüglichen Resultate finden sich in „Beton u. Eisen“ 1908, Heft III bis VI niedergelegt vor. Meiner Absicht, Parallelversuche mit einbetonierten Eisensäulen zu machen, stellten sich die doppelten Kosten einer solchen Eisenmenge hindernd

in den Weg. Bei meinen Vorversuchen[1]) habe ich die Eisensäulen augenfällig gebrochen. Ich fand aber bald heraus, daß dies nur dann einen Zweck hat, wenn man hiervon ein Lichtbild machen will. Die Tragfähigkeit der Säule kann in diesem letzten Stadium einige Zeit hindurch, trotz der zunehmenden Exzentrizität, für Vergleichszwecke als gleichbleibend gelten. Ich versuchte also schon bei der Säule 2 der Gruppe A[2]) den Versuch abzubrechen, sobald die Zeiger der Durchbiegungsmesser eine fortschreitende und nicht mehr aufzuhaltende Durchbiegung erkennen ließen und glaube es durch einige Übung bei den späteren Versuchen so weit gebracht zu haben, daß in den meisten Fällen die bleibende Durchbiegung der Säule auf ein Minimum reduziert blieb. Ich habe nun durch neuerliche Steigerungen bis nahezu zu derselben Bruchlast erhoben, z. B. bei der Säule 4 der Gruppe A bis 90 t, daß die Säule auch in diesem gebogenen Zustande noch nahezu dieselbe Tragfähigkeit besitzt. Diese Ausbiegungen sind dermaßen klein, daß es nichts Außergewöhnliches sein dürfte, ähnliche Verbiegungen auch bei neugelieferten Säulen vorzufinden. Jedenfalls bestand die Unmöglichkeit, sie mit dem Auge herauszufinden oder durch Geradebiegen zu verbessern. Der Zustand in den einzelnen Fällen ist aus den aufgenommenen Biegungsdiagrammen ersichtlich, aus welchen wohl hervorgeht, daß die Säule die eingeschlagene Richtung bei der Neubelastung fortgesetzt hat, also was bis zu dem gewissen Grade selbstverständlich ist, beim zweiten Versuche wohl etwas schlechter war als eine neugelieferte Säule. Auf Grund dieser Erwägung entschloß ich mich, dieselben Säulen im einbetonierten Zustande einer nochmaligen Probe zu unterziehen und glaube, mit diesem sparsamen Vorgang der Bruchlastbestimmung keinen groben Verstoß gegen die Wissenschaft begangen zu haben, da der Fehler auf der Seite der Sicherheit liegt. Es ist nur geltend zu machen, daß bei dieser in den Tabellen durchgeführten Subtraktion der Bruchlast der beiden Säulen zur Ermittlung der Wirkung des Betons die Druckfestigkeit desselben etwas zu kurz kommen dürfte.

Die hierbei verwendeten Materialien wurden von dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule in Wien geprüft und sei das diesbezügliche Zeugnis hier ausführlich wiedergegeben, da der verwendete Achauer Portlandzement dieselbe Marke ist, wie bei den älteren Versuchen.

Portlandzement.

1. Farbe: günlichgrau.
2. Glühverlust: 1,394 vH.
3. Raumgewichte:
   a) Maschinell lose eingefüllt: 1,225 kg/l; maschinell eingerüttelt: 1,978 kg/l; b) Spezifisches Gewicht: 3,158.
4. Mahlfeinheit.

Die maschinellen Siebversuche ergaben folgende Siebrückstände: Über dem Normalsieb von 900 Maschen für 1 cm^2 0,9 vH. Zwischen den Normalsieben von 900 und 4900 Maschen

[1]) „Beton u. Eisen“ 1907, S. 101.
[2]) „Beton u. Eisen“ 1907, S. 172.

für 1 cm² 19,9 vH. Also insgesamt über 900 Maschen für 1 cm² 0,9 vH., über 4900 Maschen für 1 cm² 20,8 vH.

5. Bindezeit und Temperaturerhöhung.

Lufttemperatur: 18° C. Luftfeuchtigkeit: 41 vH. Wassermenge für Normalkonsistenz: 27,5 vH. Erhärtungsbeginn nach: 4 Stunden 20 Minuten. Bindezeit: 11 Stunden 30 Minuten. Temperaturerhöhung: 2,2° C.

6. Raumbeständigkeitsverhältnisse.

Kuchenprobe, Wasserlagerung, nach 28 Tagen bestanden. Kuchenprobe, Luftlagerung, nach 28 Tagen bestanden. Darrprobe: bestanden.

7. Festigkeitsverhältnisse.

Mörtel (1 Teil Zement + 3 Teile Normalsand). Wasserzusatz 7,2 vH. Erhärtungsdauer: 7 Tage Wasserlagerung. Zugfestigkeit: 20,05 kg/cm². Druckfestigkeit: 316,25 kg/cm². Erhärtungsdauer: 28 Tage Wasserlagerung. Zugfestigkeit: 25,36 kg/cm². Druckfestigkeit: 432,65 kg/cm².

Sand.

Der uns übersandte Sand wurde normengemäfs gesiebt, wobei sich nachfolgende Resultate ergaben: Durch ein Sieb von 900 Maschen für 1 cm² fielen 24,9 vH. Auf einem Siebe von 7 mm Maschenweite blieben 12,7 vH. Gewicht des Sandes 1,710 g.

Wien, am 28. Februar 1908.

Mechanisch-Technisches Laboratorium der K. K. Technischen Hochschule.

Der Versuchsausführende: Dr. J. Remzeder. Der Vorstand: Kirsch.

Darstellung der Versuchsresultate in Beton-Eisen.

Ich habe auch hier die Versuche in mehrere Gruppen zusammengefaßt, um die Übersichtlichkeit zu erleichtern. Es sind im Ganzen drei, eigentlich vier Versuchsgruppen ausgeführt, die ich mit Beibehaltung ihrer ursprünglichen Bezeichnung bei den Eisensäulen mit B, A, C und D benennen will. Dieselben haben annähernd einen gleichen Eisenquerschnitt mit einem in der Reihenfolge zunehmenden Betonquerschnitt.

Die Gruppe B besteht aus zwei ⊔-Eisen Nr. 14 (Abb. 23), die Anordnung der Eisen ist in Abb. 24 dargestellt. Der einbetonierte Querschnitt beträgt 91 cm², also etwa das 2,2fache des Eisenquerschnitts (45 vH.). Die Resultate der Eisensäule und der betonierten Säulen finden sich in der folgenden Tabelle VI B und in der Abb. 37 am Schlusse dargestellt.

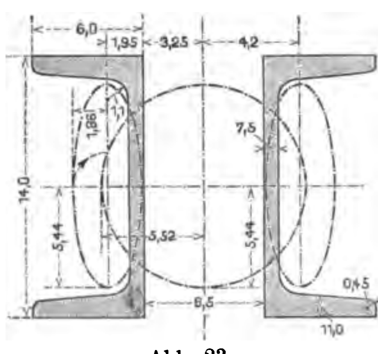


Abb. 23.

Von den Versuchen Nr. III und IV, die dort zur Erklärung des Zusammenwirkens benutzt wurden, zeigt die Abb. 1 ein Lichtbild. In diesem Falle scheint der Umstand einer besonders hohen Ausnutzung der Eisenfestigkeit dem Zusammenarbeiten aber nicht günstig, und der Beton kommt bei diesen zwei Fällen am wenigsten zur Geltung. Am besten geschieht das in Säule I (Abb. 25), wo sich aber die Wirkung immerhin nur auf eine Ergänzung bis zu der vom Eisen allein zu leistenden Ziffer erstreckt

(sieh auch Abb. 35). Die Bruchbilder 1 und 2 von Säule III und IV sowie Abb. 25 von Säule V zeigen das Zusammenwirken beider Stoffe deutlich. Die übrigen ergaben einen Überschuß über die reine Eisenfestigkeit, entsprechend etwa der Würfelfestigkeit des Betons. Die Abb. 26 gibt eine Übersicht über die Durchbiegungen der Säulen bis zur jeweiligen Bruchlast. In der Darstellung ist die Durchbiegung der Eisensäule punktiert gegeben und als Fortsetzung der einbetonierte Versuch voll ausgezogen. Sie gibt der Säule I das beste Zeugnis in bezug auf Zentrierung, der Säule VI das schlechteste, weil die bleibende Durchbiegung fast gar nicht zurückging.

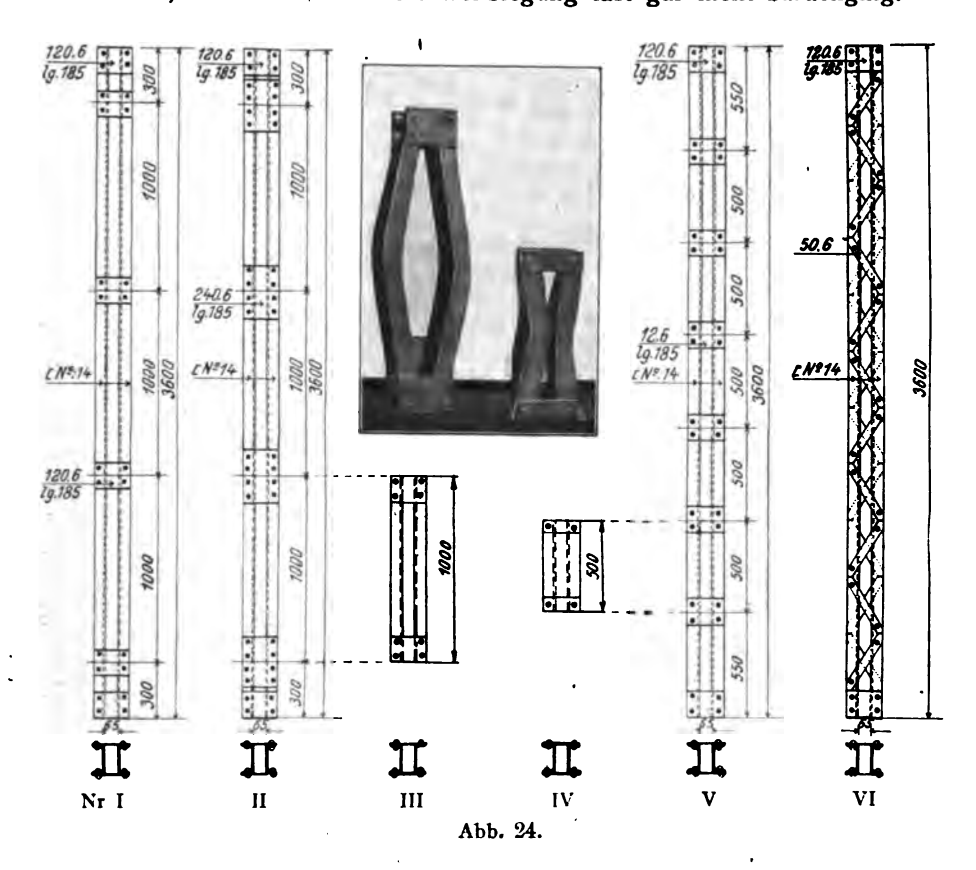


Abb. 24.

Die Versuche III und IV zeigen, daß in diesem Falle nur eine geringe Zusammenwirkung besteht, da der Betonwürfel bei Ausknicken des Eisens in seiner ganzen Länge der ganzen Unterstützung verlustig geht. Wir sehen also in allen normalen Fällen, d. i. II, V und VI einen nahezu gleichen, dem kleinen Betonquerschnitt entsprechenden, demgemäß nicht sehr großen Zuschuß an Säulenfestigkeit.

Die Gruppe A besteht aus zwei I-Trägern Nr. 14 (Abb. 27). Die Anordnung der Eisen ist aus Abb. 28 ersichtlich. Der einbetonierte Querschnitt beträgt 202,6 cm², also etwa das 5,4fache des Eisenquerschnitts (18,4 vH.). Die Resultate beider Serien finden sich in der folgenden Tabelle VI A und

Tabelle VI.

Versuche mit einbetonierten Eisensäulen.

Gruppe B, bestehend aus zwei **U**-Eisen Nr. 14.

Nr.	h	F_e	$\overline{F_b}$	%	$\overline{n}$	$\overline{F_i}$	Bruchlast in t (einbetoniert)	kg/cm²	i_e	x_e	Bruchlast Eisen in t	Differenz D	$\frac{D}{F_b}$	Würfelfestigkeit kg/cm²	Anmerkungen
I	360	41,2	91	45,3	2,2	709	100,0	141	5,52	65,2	80	20	220	153,3	Versuche in Wien, 8 Wochen alt.
II	360	41,2	91	45,3	2,2	709	95,0	134	5,52	65,2	85	10	110	137,5	
III	50	41,2	91	45,3	2,2	709	126,4	178	5,52	19,2	120,3	6,1	67	219,0[1]	
IV	100	41,2	91	45,3	2,2	709	126,7	178	5,52	9,6	114,7	12,0	132	— [2]	
V	360	41,2	91	45,3	2,2	709	109,3	154	5,52	65,2	100	9,3	102	161,1	
VI	360	41,2	91	45,3	2,2	709	111,3	157	5,52	65,2	100	11,3	124	166,8	
Gruppe A, bestehend aus zwei **I**-Eisen Nr. 14.															
I'	211,7	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	161,5	212	5,67	37,3	74	87,5	431,8	368,0	Versuche in Stuttgart, 6 Jahre alt.
II'	361,6	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	147,0	193	5,67	63,7	44	103	508,3	368,0	Versuche in Stuttgart, 6 Jahre alt.
II	360	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	118,0	155	5,67	63,7	44	74	365,2	76,3	Versuche in Wien, 4 Wochen alt.
III	360	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	148,8	195	5,67	63,5	77	71,8	354	208,5	Versuche in Wien, 8 Wochen alt.
IV	360	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	144,3	189	5,67	63,5	97	47,3	233	168,0	Versuche in Wien, 8 Wochen alt.
V	360	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	145,0	191	5,67	63,5	108	37	182	207,5	Versuche in Wien, 8 Wochen alt.
VI	540	37,2	202,6	18,4	5,44	760,6	134,5	177	5,67	95,2	95	39,5	195	193,6	Versuche in Wien, 8 Wochen alt.
Gruppe C, bestehend aus vier **L**-Eisen 60 · 60.															
I'	211,2	27,4	372,6	7,35	13,6	783,6	165,5	211	8,5	24,84	79,4	86,1	231	368,0	Versuche in Stuttgart, 6 Jahre alt.
I	210	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Versuche in Wien, die erst Ende Mai abgeführt werden und worüber in „Beton u. Eisen“ berichtet werden wird.
II	260	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
III	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
IV	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
Gruppe D, bestehend aus 4 **T**-Eisen.															
I'	104,1	37,1	329	11,3	8,84	885,5	158,6	—	5,68	18,3	109,5	49,1	471	368,0[3]	Versuche in Stuttgart, 5 Jahre alt.

Anmerkung: Versuche mit einer gleich langen Säule ergaben bei [1]) 57,5, bei [2]) 160, bei [3]) 310 kg/cm².

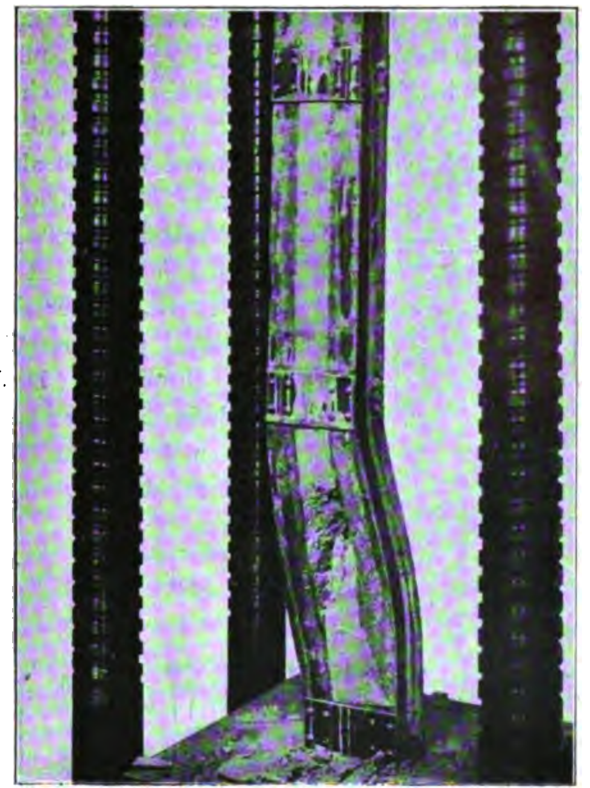


Abb. 25

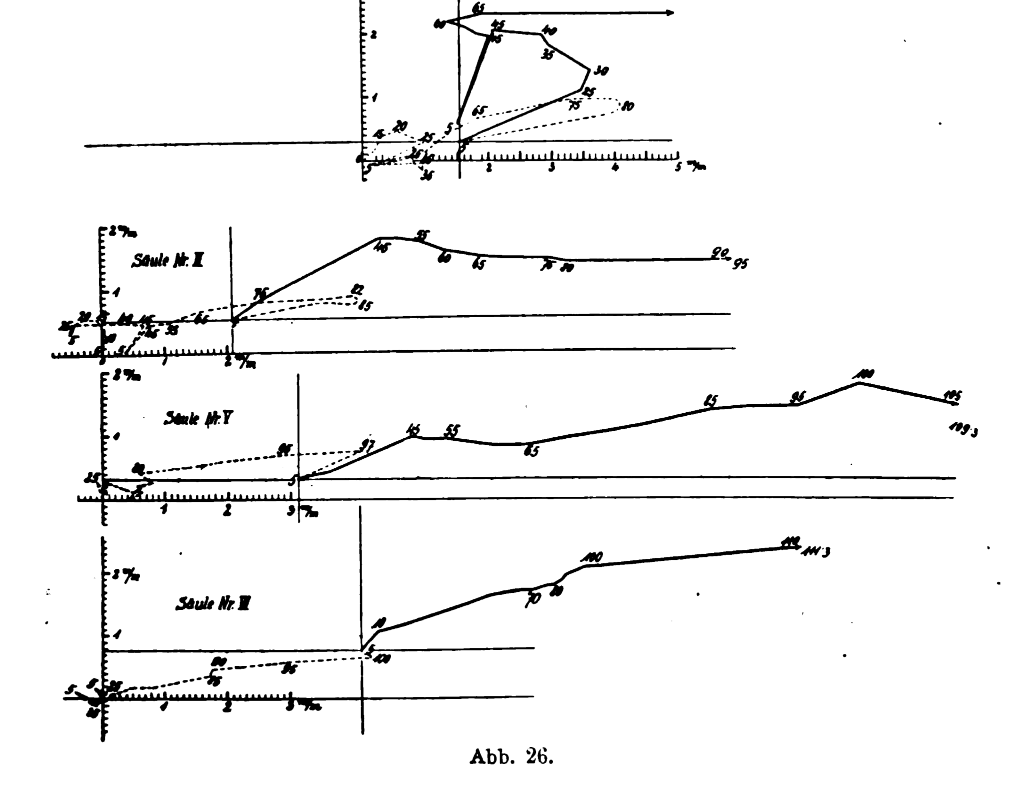
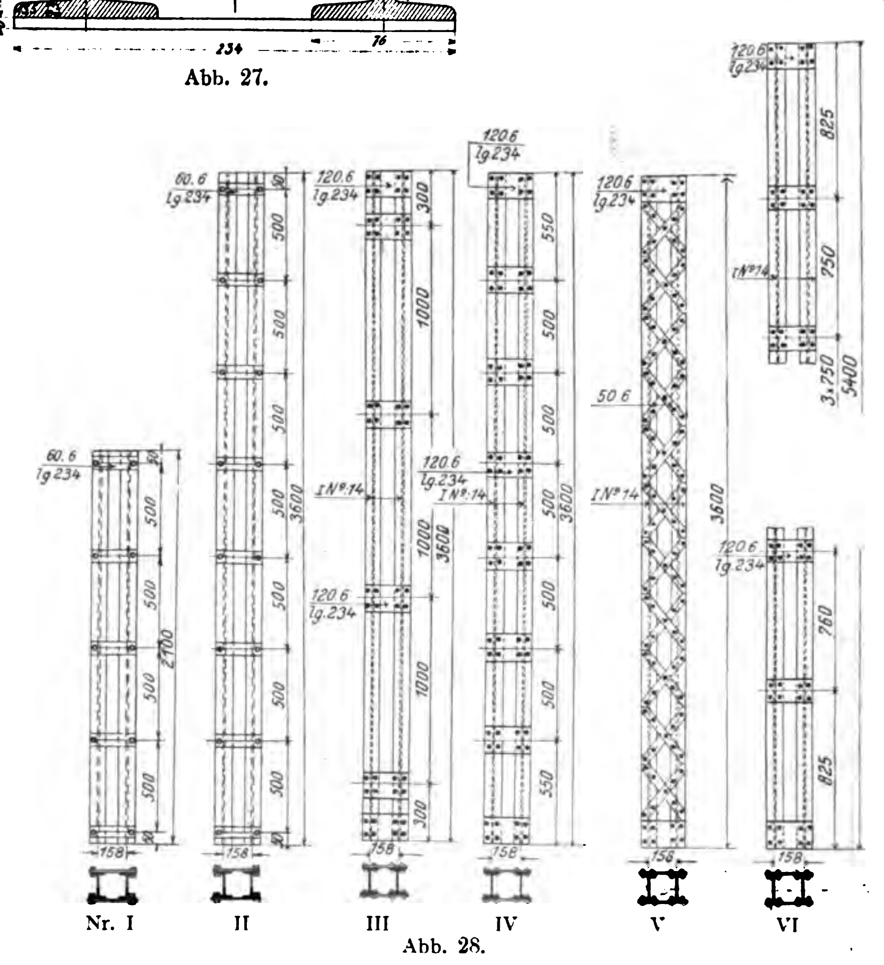


Abb. 26.

in der Abb. 37 am Schlusse dargestellt. Die Versuche I_1 und II_1 (Abb. 29) sind die von Bach in Stuttgart geprüften 6 Jahre alten Säulen von nahezu gleicher Anordnung, die bereits auch in der Tabelle II nach Tafel VII vorkommen und hier nur zu Vergleichszwecken wiederholt sind. Der Versuch II ist ein Wiener Vorversuch von mir, der nur 4 Wochen alt war. Geprüft wurden die Säulen III bis VI, fast 8 Wochen alt, mit Beton 1 : 3.

Der Beton ist in allen diesen Fällen viel besser durch das Eisen gehalten und umschlossen als bei der Gruppe B. Deshalb zeigt er auch in den doch so verschiedenen Fällen der Säulen II, III, IV und V nahezu dasselbe Resultat für die

Abb. 27.



Nr. I II III IV V VI

Abb. 28.

Gesamtlast der Säule. Dasselbe kann auch als Beweis gelten, daß es in so einem Falle nicht mehr nötig ist, mit der Querverbindung bis auf die Hälfte des theoretisch vorgeschriebenen herabzugehen, daß vielmehr diese

Entfernung, ja selbst eine größere genügt, um, wie die Säule III zeigt, nicht nur die mangelhafte Verbindung wettzumachen, d. i. der Unterschied von 80 t bei III auf 97 t bei IV, sondern daß auch beide eine gleichmäßige, dem Betonquerschnitt entsprechende Erhöhung zeigen.

Über die jeweiligen Betonfestigkeiten geben die beigedruckten Würfelfestigkeiten Aufschluß. Die Würfel von 20 cm Seite wurden gleichzeitig mit den Säulen hergestellt. Einen strikten Vergleich gestatten nur die Säulen IV, V und VI, wo auch die Eisensäule allein tadellos gewirkt hat, und da sehen wir wieder das Auftreten der Würfelfestigkeit mit hinreichender Gleichmäßigkeit nachgewiesen. Abb. 30 ist das Bruchbild der Säule VI und Abb. 31 von Säule V, wo die Nieten abgeschert wurden. Abb. 32 gibt ebenso wie 28 eine Übersicht der Durchbiegungen der Säulen, und zwar zunächst der Eisensäule allein und dann der betonierten Säule.

Die Gruppe C besteht aus vier Winkeleisen (Abb. 33). Die Anordnung der Eisen ist aus Abb. 34 ersichtlich. Der einbetonierte Querschnitt beträgt bei I 31,6 cm², bei den übrigen Versuchen 27,4 cm², d. i. etwa das 10,6 fache des Eisenquerschnitts (7,35 vH.).

Diese Versuche sind wegen des Internationalen Architektenkongresses auf den 23. Mai d. J. verschoben worden, und wird über sie besonders berichtet werden. Vorläufig liegt nur der ältere Versuch aus Stuttgart vor. In Abb. 33a und 35 ist ersichtlich gemacht, wie sich der Trägheitsradius in so einem Fall ändert, je nachdem man das Eisen allein oder auch den Beton mit $n = 15$ mit in Rechnung zieht. Ich habe, um diese Schrift endlich abzuschließen, diese Feinheit nicht weiter verfolgt, deren Bedeutung beim Bruch nicht recht zur Geltung kommt.

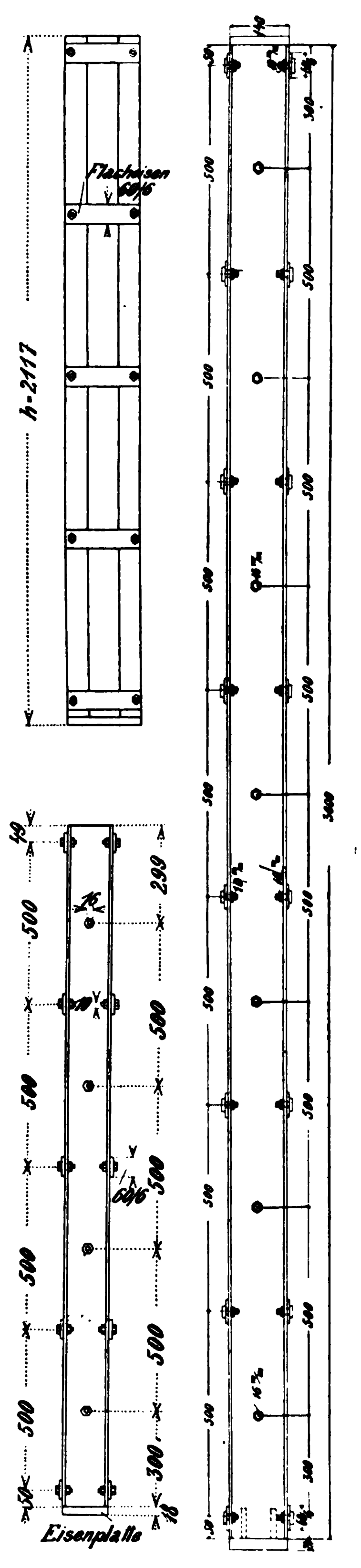


Abb. 29.



Abb. 30.

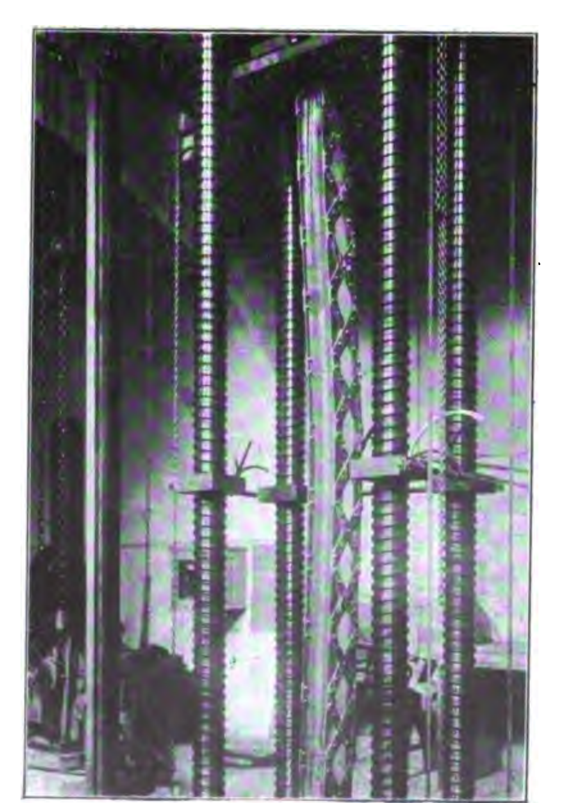


Abb. 31.

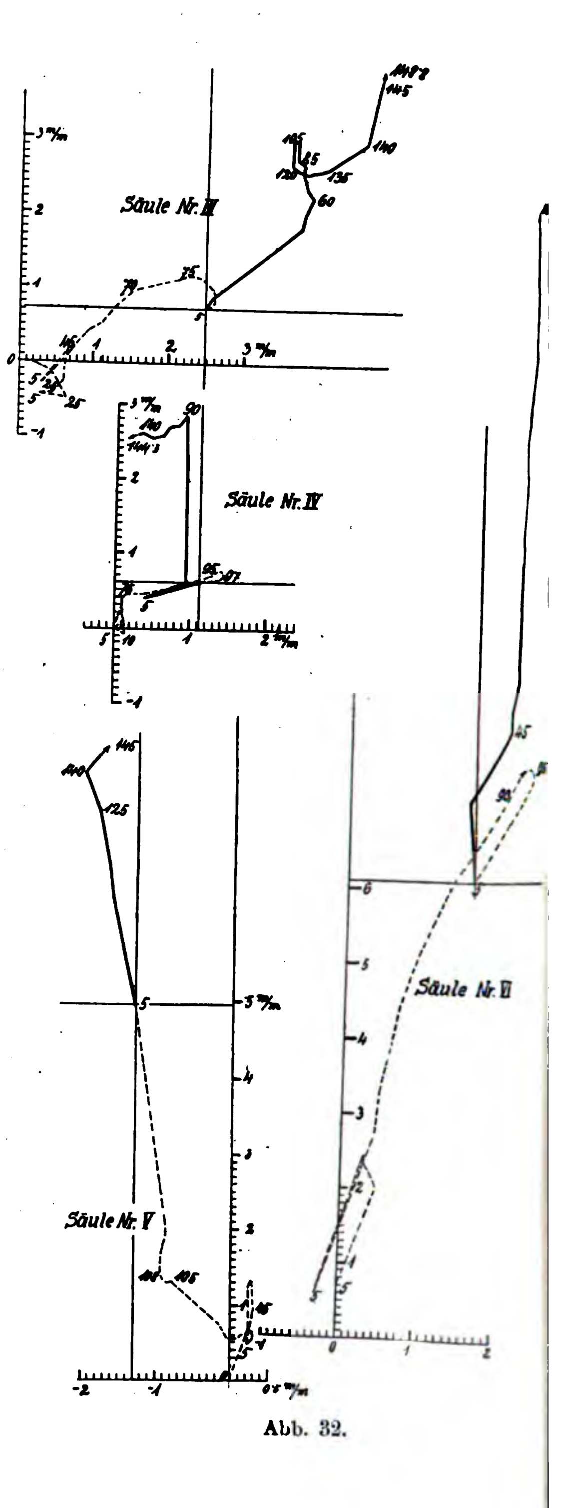


Abb. 32.

Die Gruppe D besteht aus vier T-Eisen (Abb. 36). Es liegt von derselben nur ein Versuch aus der in Stuttgart hergestellten Serie vor. Die

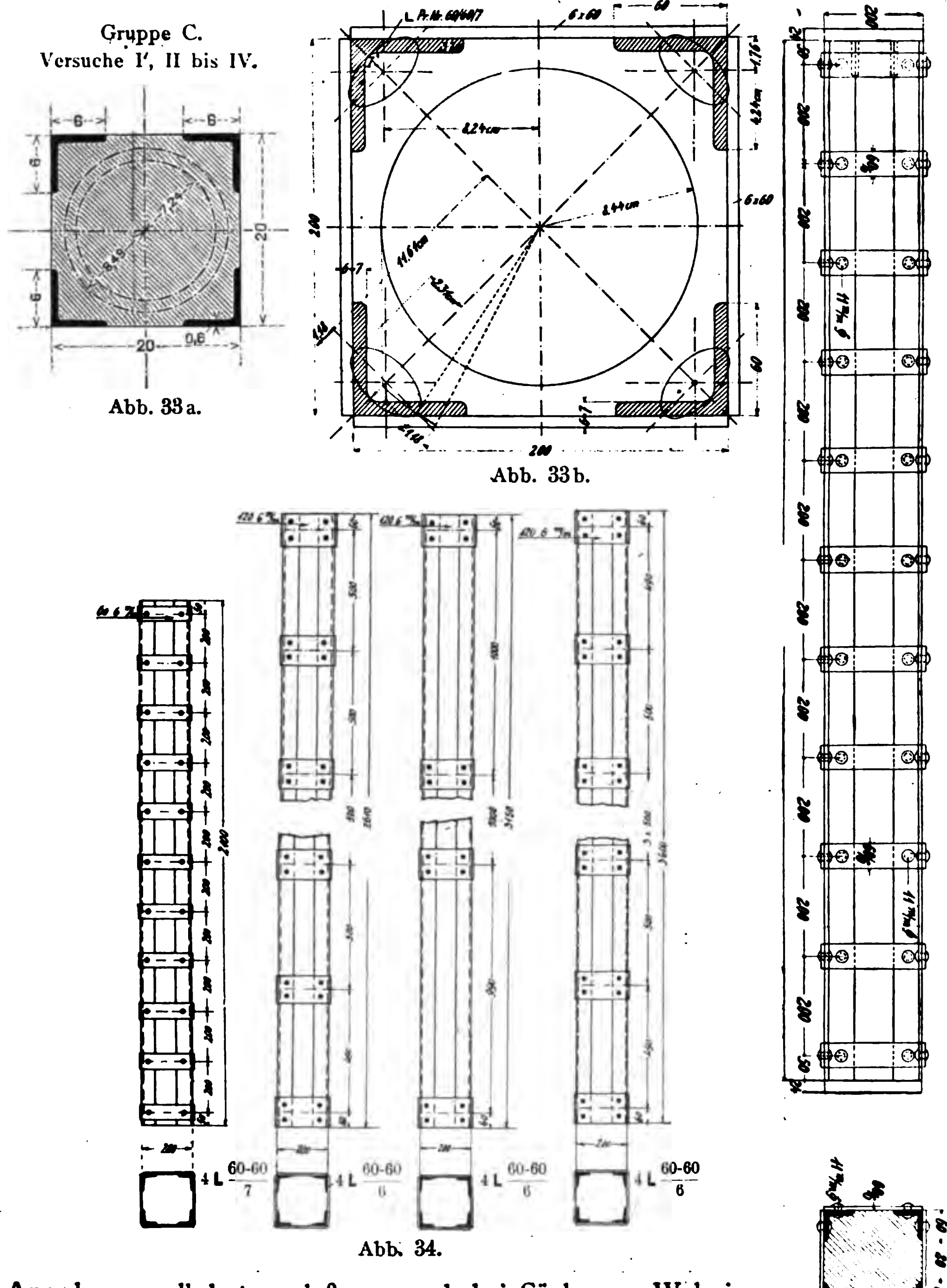


Abb. 33a.

Abb. 33b.

Abb. 34.

Abb. 35.

Anordnung soll dartun, daß man auch bei Säulen aus Walzeisenprofilen das gewünschte Ziel durch Verbindungen übereck erreichen kann, daß es also nicht nötig ist, den rechnungsmäßig einbezogenen Kern durch Bügel abzugrenzen. Da die Rechnung keinen auffallenden Abfall an Betonfestigkeit ergibt, so scheint dies anzudeuten,

daß auch in diesem Fall die kreuzweise angeordneten Bügel denselben Dienst tun wie die umlaufend angeordneten. In Abb. 37 findet sich das gesamte in den Tabellen VI gegebene Versuchsmaterial zusammengestellt vor. Wir ersehen daraus z. B., daß der einbetonierten Säule C_I nach den deutschen Vorschriften 27,4 × 875 = 24 t (nach den österreichischen Vorschriften sogar nur 27,4 × 812) zusteht, während sie eine Bruchfestigkeit von 165,5 t besitzt, das ist also eine siebenfache Sicherheit!! Dieselbe Säule hat, wenn man die Eisen nicht einbetoniert, nur eine 2,8fache Sicherheit. Es scheint begründet, daß die Verdreifachung der Sicherheit zu einer entsprechenden Erhöhung der zulässigen Lasten berechtigt.

Gruppe D.

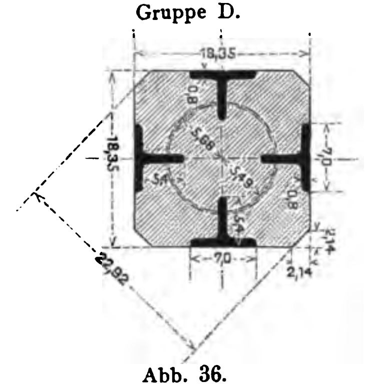


Abb. 36.

Zulässige Belastungen von Eisenbetonsäulen.

Wenn wir aus den nachgewiesenen Bruchfestigkeiten die zulässigen Spannungen bestimmen wollen und uns hierbei anstatt der bisher gebrauchten Tetmajerschen Gleichung $(3100 - 8{,}1\,x)$ der Schwarz-Rankineschen Formel bedienen, weil dieselbe uns als Ausdruck der Mindestfestigkeit für die Praxis besser dienlich erscheint (sieh Abb. 37), während die Tetmajersche Gleichung sich als das arithmetische Mittel von tadellosen Laboratoriumsversuchen darstellt, so gelangen wir zu dem folgenden: Diese Schwarz-Rankinesche Gleichung für die Bruchlast von Eisensäulen mit Flächenlager lautet:

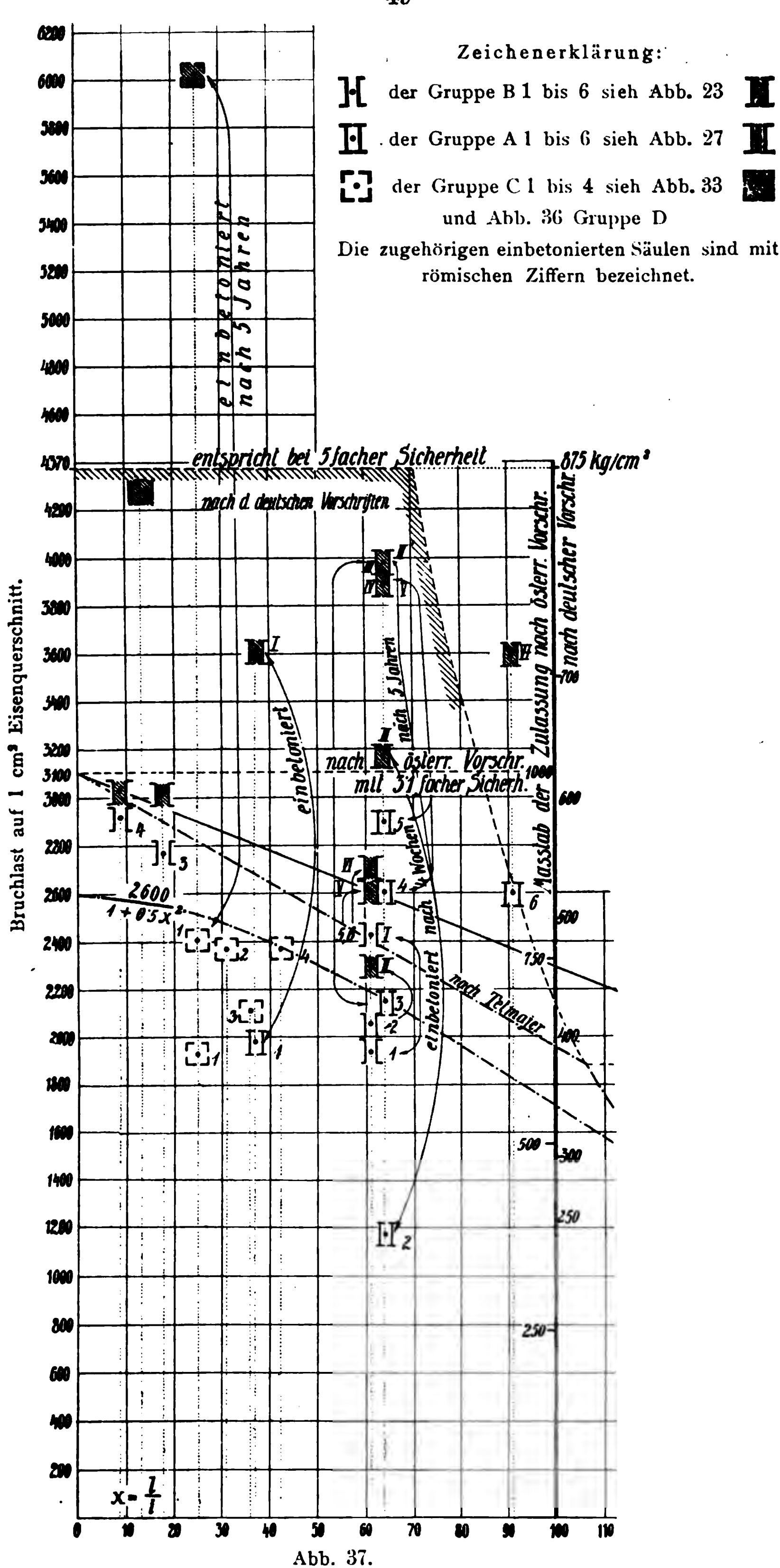
$$\sigma_e = \frac{2600}{1 + 0{,}5\,x^2} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Demnach wäre die Bruchlast einer einbetonierten Eisensäule

$$P_0 = \frac{2600}{1 + 0{,}5\,x^2} \cdot F_e + \sigma_b F_b, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wobei es unterlassen wurde, die Abminderung auf den Betonkern auszudehnen, was natürlich nicht einwandfrei ist. In dieser Gleichung bedeutet σ_b die Würfelfestigkeit des Betons nach wenigstens einem Jahre, d. i. das erzielbare Maximum. Hieraus ergibt sich die zulässige Belastung einer derartigen Säule mit

$$P = \frac{800}{1 + 0{,}5\,x^2}\, F_e + \frac{\sigma_b}{3{,}25} \cdot F_b. \quad \ldots \ldots \quad (7)$$



Zeichenerklärung:
der Gruppe B 1 bis 6 sieh Abb. 23
der Gruppe A 1 bis 6 sieh Abb. 27
der Gruppe C 1 bis 4 sieh Abb. 33
und Abb. 36 Gruppe D
Die zugehörigen einbetonierten Säulen sind mit römischen Ziffern bezeichnet.
Bruchlast auf 1 cm² Eisenquerschnitt.
einbetoniert nach 5 Jahren
entspricht bei 5facher Sicherheit
875 kg/cm²
nach d. deutschen Vorschriften
nach 5 Jahren
einbetoniert
nach österr. Vorschr. mit 3,1 facher Sicherh.
nach ¼ Wochen
einbetoniert
nach Tetmajer
Masstab der Zulassung nach österr. Vorschr.
nach deutscher Vorschr.
2600
1 + 0,5 x²
x = l/i
6200
6000
5800
5600
5400
5200
5000
4800
4600
4370
4200
4000
3800
3600
3400
3200
3100
3000
2800
2600
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110

Abb. 37.

Da man zu Säulen immer besten Beton nimmt, so lautet im Falle einer Würfelfestigkeit von 325 kg/cm² die Gleichung

$$P = \frac{800}{1 + 0{,}5\,x^2} \cdot F_e + 100\,\overline{F_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder, wenn wir von der Abminderung auf Knickung vorläufig ganz absehen, so ist als reine zulässige Druckfestigkeit des Querschnitts zu setzen

$$P = 800\,F_e + 100\,\overline{F_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vergleichen wir diese Gleichungen, die der Ausdruck dessen sind, wie der Beton überall dort beansprucht werden wird, wenn man ihn, wie das heute geschieht, statisch gar nicht in Betracht zieht, mit jener Gleichung, wie man sie beim Eisenbeton vorgeschrieben findet, so ist dort z. B.

$$P = 450 \cdot F_e + 30\,F_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Wollen wir diese beiden Gleichungen vergleichen, so müssen wir sie auf denselben Betonquerschnitt beziehen.

Nehmen wir z. B. an

$$F_b = 1{,}25\,\overline{F_b},$$

was natürlich nur bei größeren Säulenquerschnitten als den untersuchten richtig ist. Bei denen macht die Betonhülle prozentual noch mehr aus. Es ist dann Gleichung 9 umgeformt

$$P = 800\,F_e + 80\,F_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und wäre zu vergleichen

$$\frac{P}{F_e} = 800\left(1 + \frac{Z}{10}\right) \text{ bezw. } = 450\left(1 + \frac{Z}{15}\right) \quad (12 \text{ u. } 13)$$

wobei

$$Z = \frac{F_b}{F_e}$$

das Querschnittsverhältnis darstellt. Diese Gleichungen finden sich in der umstehenden Abb. 38 dargestellt und zeigen an, in welchem Maße man diese Säulen mehr belasten kann als bisher. Um dies besser zu verdeutlichen, ist die Linie der Erhöhung von 100 und 200 vH. mit Bezug auf die alte Formel 13 eingetragen worden. Die Erhöhung beträgt durchschnittlich 150 vH.

Es liegt in der Natur der Sache, daß diese Erhöhung um so größer ist, je mehr Beton zur Hilfe herangezogen wird. Ja, wenn man bedenkt, daß, wie früher erwähnt, bei diesen geringen Prozenten eine Erhöhung bis auf das Doppelte der Druckfestigkeit möglich ist, so wird man diesen Vorschlag allein für zu gering ansehen müssen, und zur Gleichung

$$\frac{P}{F_e} = 800\left(1 + \frac{Z}{5}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

gelangen. Ich habe diese weitgehenden Forderungen, die sich aus dem Dargelegten logisch ergeben, aufgestellt, ohne daß ich jedoch erwarte, daß dieselben so, wie sie sind, in die Praxis zu übersetzen wären. Ich weiß nur aus Erfahrung, daß man in solchen Fällen gut tut, das Doppelte von dem

zu fordern, was man erreichen will. Es würde vorläufig genügen, wenn ein bescheidener Zuschlag, wie er heute bei Beton üblich ist, Platz griffe, etwa die Hälfte wie bei Gleichung 11

$$\sigma_e = \frac{P}{F_e} = 800\, F_e + 40\, F_b; \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

oder

$$= 800\, F_e + 50\, \overline{F_b}; \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

entsprechend

$$\frac{P}{F_e} = 800\left(1 + \frac{Z}{16}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Diese Gleichung findet sich in Abb. 38 nicht eingetragen vor. Es ist jedoch ersichtlich, daß diese Formel gegen die zugrunde gelegte Festigkeit von

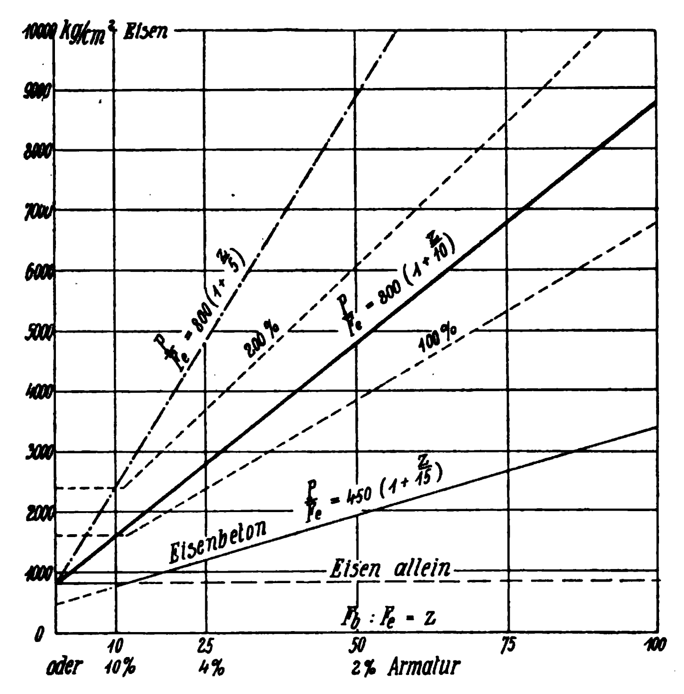


Abb. 38. Darstellung der Gleichungen 12, 13 und 14.

325 kg/cm² eine fast siebenfache Sicherheit aufweist. Es sei bemerkt, daß bei dieser Formel das Spannungsverhältnis von Eisen und Beton 16 ist, also dasselbe, das man heute bei zulässigen Lasten voraussetzt. Es würde sich also nur darum handeln, die betreffenden Kreise von dem Gedanken loszulösen, daß sie es mit einer Betonsäule zu tun haben, bei welcher die Eisenspannungen durch den Beton begrenzt werden, daß vielmehr die Eisenbetonsäule eine Eisensäule ist, deren Festigkeit durch den Beton um einen Betrag erhöht wird, entsprechend der Druckfestigkeit des eingeschlossenen Betonkerns.

Anwendungen der Resultate auf verwandte Gebiete.

Es ist naheliegend, daß sich die gewonnenen Resultate in erster Linie auf Säulen des Hochbaues beziehen, doch finden sie natürlich auch sinngemäße Anwendung bei allen auf Druck beanspruchten Baugliedern, als da sind: Druckgurte von Trägern, Druckglieder an Fachwerkbrücken und schließlich Bogenbrücken. Wir werden also in allen diesen Fällen, wo wir den Druckquerschnitt im Beton allein für unzureichend ansehen, eine Anordnung treffen, die einen von Eisen umschlossenen Betonkern schafft und das Eisen in der Richtung in den Beton hinein verankert, nach welcher es auszuweichen in der Lage ist. Dasselbe gilt in umgekehrtem Sinne, wenn es sich um Verstärkung eines gedrückten Eisenquerschnitts handelt.

a) Träger.

Die in den obigen Zeilen ausgesprochene Erkenntnis ist eigentlich in der Praxis bereits vorhanden, nur ist das Bewußtsein der Notwendigkeit von Druckbügeln nicht allgemein genug. Die Vorschriften sagen diesbezüglich herzlich wenig, und so habe ich in der Praxis häufig genug Ausführungen angetroffen, wo solche gar nicht oder in unzureichendem Maße vorhanden waren. Im Versuchswege wäre zu ermitteln, ob auch hier die außerhalb des Betonkerns gelegene Schicht als statisch wertlos zu behandeln wäre wie bei der Säule, wobei natürlich die Frage entscheidend ist, ob wir unsere Abmessungen auch hier auf die Verhältnisse beim Bruch beziehen oder nicht. Die Sache ist von besonderer Bedeutung, weil auf diese Weise gleichzeitig die nutzbare Höhe des Trägers herabgesetzt wird. Ich habe die Frage der Obergurtarmierung in meiner Dissertation[1]), natürlich ohne Kenntnis dieser hier dargelegten Umstände, behandelt, da dieselbe in der Zeit geschrieben ist, wo ich vergeblich auf die Abführung der hier veröffentlichten Versuche gewartet habe.

Meine dort zusammengestellten Untersuchungen der Druckwirkung des Betons beim Balken bis zum Bruch[2]) haben ergeben, daß während derselben eine solche Änderung in der Druckverteilung eintritt, daß die gewöhnliche Berechnung eine scheinbare Erhöhung der Druckfestigkeit des Betons bis nahezu auf das Doppelte ergibt. Der Druckgurt wirkt ähnlich wie ein auf reinen Druck belastetes Konstruktionsglied eines Fachwerks. Unter diesen Umständen ist zu erwarten, daß die Resultate bei Druck auf Biegung hier sowohl wie im Bogen ähnliche sein werden als wie die bei der Säule ermittelten.

Wir beschränken uns hier, auf die in Abb. 1 der erwähnten Dissertation[3]) gegebene Darstellung hinzuweisen, die zeigt, daß durch eine Druckarmatur

---

[1]) Berechnung beiderseits armierter Balken. Wien 1903. Preis 5 Mark.

[2]) Sieh „B. u. E." 1903, S. 171 und später.

[3]) Auch in „B. u. E." 1903, S. 182 abgedruckt.

bei höheren Prozentsätzen eine bedeutende Erhöhung der Tragfähigkeit der Balken möglich wäre, wenn es gelingt, sich der Mitarbeit der Druckarmatur bis zum Bruch zu versichern. Da ich aus den dort angeführten Versuchen eine solche nicht entnehmen konnte, so habe ich empfohlen, überall dort, wo man der Mitwirkung des Eisens bis zum Bruch hinauf nicht sicher ist, dieselbe als nur am Zuggurt armiert zu berechnen. Für die Durchführbarkeit der Sache selbst konnte ich damals nur einen einzigen Versuch ins Treffen führen, den bezeichnenderweise Coignet in Asnières bei Paris 1897 gemacht hat, der aber bis heute keinen Forscher auf diesem Gebiete zur Wiederholung veranlaßt hat.

Die wissenschaftliche Erforschung der Frage ist nicht nur bei jenen Balken von Wichtigkeit, die nicht über die nötige Konstruktionshöhe oder Breite zur Ausbildung des Druckgurtes verfügen, sondern auch bei kontinuierlichen und bei eingespannten Trägern, wo die schmale Rippe die Rolle des Druckgurtes zu übernehmen geeignet sein muß. Die Umgrenzung des Betonkerns geschieht in so einem Falle einerseits durch die Druckeisen, anderseits durch die neutrale Achse, und es handelt sich nur darum, ob und inwieweit man der Mitwirkung der seitlich rechts und links liegenden Betonfasern der Platte sicher sein kann.

b) Druckglieder bei Fachwerkbrücken.

Soweit dieselben Eisenbeton betreffen, bedarf das Gesagte keiner Ergänzung. Interessant ist aber der Umstand, daß uns auch der Eisenbrückenbau reichlich Gelegenheit zu Anwendungen gibt. Ich denke dabei zunächst an jene Druckglieder reiner Eisenbrücken, die sich am Auflager selbst oder in dessen Nähe befinden, so zwar, daß ein vermehrtes Eigengewicht nur günstig für die Gesamtkonstruktion in Betracht kommt. Eine Ausbetonierung der Vertikalen und des Druckgurtes bei Halbparallelträgern würde den Eisenquerschnitt vermindern und die Verbindung desselben vereinfachen, den Anstrich sowie seine Erneuerung ersparen.

Es sei bei diesem Anlasse ein aktuelles Beispiel besprochen: das Druckglied $A9$ bei der Quebecbrücke, das den Anlaß zum Einsturz dieses Riesenbauwerks gegeben haben soll und das nach der Meinung der amerikanischen Ingenieure in der vorhandenen Form nicht verbesserungsfähig war. Ich möchte demgegenüber bemerken, daß es ein einfaches Mittel hierfür gegeben hat, d. i. die Einbetonierung, und daß es wahrscheinlich genügt hätte, dieselbe auf den Mittelteil des Druckgliedes zu beschränken. Das Druckglied hätte 5038 cm² Eisen, der Betonkern hätte 14 892 cm² betragen müssen. Z wäre nahezu 3, also ähnliche Verhältnisse wie bei den Versuchen in den Gruppen A und B mit einem auch sonst ähnlichen Querschnitt. Damit wäre die Tragfähigkeit des Eisens nach der oben angegebenen Formel 12 auf

$$\frac{P}{F_e} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{Z}{10}\right) = 1300 \text{ kg/cm}^2$$

gesteigert, den Theodor Cooper im vorliegenden Falle wirklich verwendet hat und dem die Säule nicht gewachsen war, weil sie nur, wie zwei Modellversuche[1]) zeigen, an der als theoretisch richtig angesehenen Entfernung Horizontalverbindungen hatte. Anstatt der erwiesenermaßen erreichbaren Bruchziffer von 2760 kg/cm² ergab ein Modellversuch im genauen Maßstab von ein Drittel durch Professor W. H. Burr, im Auftrage der Untersuchungskommission ausgeführt, nur 1624. Wenn wir diese Zahlen mit $x = 42$ in die Abb. 38 eintragen, so bestätigt das nur die von mir in dieser Angelegenheit gemachten Eisenversuche. Der Beton hätte in diesem Falle ebenso wie in mehreren hier gezeigten Versuchen die mangelhafte Verbindung ersetzt und die Druckfestigkeit erhöht. Während diese Art der Einführung des Betons in den Eisenträgerbrückenbau noch der Einführung harrt, ist er beim Bogen bereits eine Tatsache.

c) Bogenbrücken.

Das Anwendungsgebiet der hier gemachten Versuche muß auch hier zur besseren Besprechung in das des eigentlichen Eisenbetons und des Beton-Eisens, worunter ich eine einbetonierte Eisenkonstruktion verstehe, geschieden werden. Beim Eisenbetonbau hat man den Armaturen der Bogen bisher eine recht nebensächliche Rolle zugewiesen. Einzelne Konstrukteure sind sogar so weit gegangen, bei den tragenden Bogen auf die Einlage von Eisen ganz zu verzichten. Es ist das nur die logische Folge dieser statischen Auffassung und durchaus ökonomisch, wenn man nicht die Meinung vertritt, daß so schlanke Mauerwerkskonstruktionen ohne Eisen überhaupt nicht gemacht werden sollten. In fachlicher Hinsicht ist es auch gar nicht empfehlenswert, die beiden Netze als Verstärkung der Druckfläche anzusehen, sofern sie — wie ja allgemein — keine Druckbügel enthalten. In idealer Weise besorgt dies sowie die Armierung und Umgrenzung eines Beton-Bogenquerschnitts die Anordnung des Eisens im sogenannten Melanbogen, unter welchem Namen ich alle ähnlichen Konstruktionen dieser Art zusammenfasse, die besonders in Nordamerika auf Grund des Patents von Professor Melan und des Verfassers weitgehende Anwendungen gefunden haben. Der dabei in Frage kommende Querschnitt ist durch meine Versuche, Gruppe A, bestehend aus einbetonierten I-Trägern, statisch gekennzeichnet, nur daß in diesem Falle zur Verminderung der Eisenmenge die Abstände der I- oder genieteten Träger größer angenommen werden und auch die Querverbindung, insbesondere in früheren Ausführungen, keine so sorgfältige gewesen ist. Schon in meinen letzten Arbeiten in New-York habe ich versucht, Eisen im Steg zu sparen und dafür die Querverbindungen der einzelnen Profile zu einem Gesamtquerschnitt auszubilden. Doch besteht auch in dieser

[1]) Sich diesbezüglich Engineering News, S. 455 und Engineering Record, S. 530.

Hinsicht kein Maßstab für die zu wählenden Abmessungen, der erst im Versuchswege zu ermitteln wäre.

Schließlich möchte ich noch auf eine Kombination ähnlicher, aber ganz besonderer Art aufmerksam machen, wo der Ingenieur Harrel de la Noé mit dieser Materialzusammenstellung ein Bauwerk von ganz außerordentlicher Kühnheit geschaffen hat.[1]) Derselbe hat in seiner Berechnung wegen Nr. 10 eine Eiseninanspruchnahme von 200 kg/cm² und eine Betoninanspruchnahme von 20 kg/cm² zugrunde gelegt. Wenn er trotz alledem eine Ökonomie erzielen konnte, die aufsehenerregend wirkt und es ihm ermöglicht hat, mit geringen Mitteln in weltfernen Gegenden monumentale Bauwerke von 70 bis 100 m Spannweite aufzuführen, so muß uns dies einen Maßstab geben für die ökonomische Bedeutung, die der Formel 16 $P = 800\,F_e + 50\,\overline{F_b}$ innewohnt, und die eine weitere Ersparnis auf ein Viertel bedeutet. Wenn wir dem Eisenquerschnitt einen 50fachen Betonquerschnitt hinzufügen, so bedeutet dies eine Erhöhung der zulässigen Inanspruchnahme des Eisens von 800 kg/cm² auf 3300 kg/cm², oder mit anderen Worten, man wäre dann in der Lage, diese Glieder mit dem vierten Teil der Eisenmenge, wie bisher, herzustellen.

Schlußfolgerungen.

Die hier dargelegten Versuche haben nach Ansicht des Verfassers den vollständigen Nachweis geliefert, daß die einbetonierte Eisensäule (Beton-Eisensäule) ebenso wie das, was wir als Eisenbeton bezeichnen, statisch als Eisensäulen anzusehen sind, sofern die einzelnen Eisenquerschnitte mit der hinreichenden Zahl von richtig angebrachten Querverbindungen versehen sind, und daß diese Festigkeit durch die Festigkeit der zwischen den einzelnen Knotenpunkten angeordneten Betonprismen entsprechend dem vom Eisen umschlossenen Kernquerschnitt vermehrt wird.

Das in den Versuchen behandelte Gebiet ist zu umfangreich, um auch in weiteren Einzelheiten einheitlich abgeschlossen zu werden. Auch sind die Versuche mit gewöhnlichem Eisenbeton sowie das zum Vergleich herangezogene Material mit umschnürtem Beton zu wenig umfangreich, um mit der nötigen Schärfe eine Abgrenzung vorzunehmen und jene Anordnung der Eisen festzulegen, die eine wesentliche Erhöhung der Druckfestigkeit zur Folge hat. Wir müssen uns begnügen, festzustellen, daß bei den in der Gruppe I und auch sonst vereinzelt gemachten Versuchen eine solche Erhöhung von etwa 70 vH. eingetreten ist. Es handelt sich dabei um Versuche mit Rundeisen, wobei der Betonkern ($\overline{F_b}$) vom 20fachen bis zum 100fachen

[1]) Sieh Handbuch für Eisenbetonbau, Band III, 3. Kapitel: Der Beton bei Eisenbrücken von Oberingenieur Colberg.

1 bis 5 vH. Eisen) betragen hat und angespannte Rundeisenbügel, die übereck in der 2- bis 3fach größeren Entfernung angeordnet waren, als sie die Theorie bei reinen Eisensäulen ergibt. Diese Erhöhung hat sich überall dort nicht eingestellt, wo es unterlassen wurde (Hennebique Flacheisen der Gruppe II) oder unmöglich war (Beton-Eisen) die Bügel beim Betonieren anzuspannen. Die Versuche haben also die Notwendigkeit ergeben, den Betonkern zu rammen, daß die Horizontalverbindungen angespannt werden, wenn man auf ihre Wirksamkeit rechnen soll.

Wenn wir von obigem außerordentlichen Ergebnis absehen, so ist doch ganz allgemein auch unter den ungünstigsten Verhältnissen neben der Knickfestigkeit des Eisens der ganzen Säule die einfache Würfelfestigkeit des Betons zwischen den einzelnen Knotenpunkten als Summenwirkung in der Bruchlast zum Ausdruck gekommen.

Verglichen mit eisernen Druckgliedern wird das Gewicht solcher Säulen selbstredend ein größeres sein als wie das reiner Eisensäulen, wie folgender Vergleich uns lehrt, der zwischen einer Eisensäule vom Querschnitt F_e und einer solchen in Beton-Eisen von der gleichen Tragfähigkeit gemacht wurde, ausgehend von der Formel

$$\frac{P}{F_e} = 800\,F_e + 50\,F_b.$$

Es ergibt sich hieraus bei einem Betonquerschnitt $F_b = 50\,F_e$ die Möglichkeit, den Eisenquerschnitt auf $^1/_4$ zu reduzieren. In diesem Falle beträgt das Gewicht für 1 lfd. m bei der Eisensäule 0,78 F_e, bei der Säule aus Beton-Eisen

$$\frac{0{,}78\,F_e}{4} + \frac{50 \times 0{,}2}{4}\,F_b = 2{,}7\,F_e,$$

also etwa das 4fache wie vorher.

Dagegen stellen sich aber die Kosten wie folgt, wobei wir von den Folgen herrührend aus einer Zunahme des Gewichtes absehen wollen, da dies mit bezug auf die Gesamtlast gewöhnlich bedeutungslos ist. Nehmen wir z. B. die Kosten für 1 kg Eisen mit 0,2 Mark, die Kosten für 1 m³ Beton mit 20 Mark an, so erhalten wir bei einer Eisensäule die Kosten für 1 lfd. m $0{,}2\,F_e \cdot 0{,}78 = 0{,}16\,F_e$, bei Beton-Eisen: $\frac{0{,}2\,F_e}{4} \cdot 0{,}78 + \frac{20}{10\,000} \cdot \frac{50\,F_e}{4} = 0{,}065\,F_e$, also etwa $^1/_3$ des Preises einer Eisensäule. Diese ökonomischen Vorteile sind von einer Tragweite, der sich niemand entziehen wird, selbst wenn er aus Vorsicht an den gegebenen Formeln noch so weitgehende Abschläge vornimmt. Der Nachweis, daß Beton-Eisensäulen ebenso wie Eisenbeton wirken, gibt uns die Möglichkeit, an Hand dieser Armaturen Gebäude in der Weise auszuführen, daß die Säulen zunächst nur aus selbsttragenden Eisen, wie in

Gruppe C oder D, hergestellt werden. Man wird dann erst später, nachdem die Decken bereits fertig sind oder gleichzeitig mit ihnen, dieselben einbetonieren und so ihre Tragfähigkeit auf das nötige Maß ergänzen. Die auf diese Weise erzeugte Anfangsspannung im Eisen ist nur vorteilhaft. Dies öffnet dem Eisenbau, d. h. dem Gebrauch selbsttragender Walzform zur Säulenbewehrung, ein neues Anwendungsgebiet, wobei Hand in Hand damit auch an eine ähnliche Deckenbewehrung, wie z. B. System Pohlman u. a., aus Walzprofilen gedacht werden kann.

Indem ich diese Versuche der Praxis zur Beurteilung unterbreite, bin ich überzeugt, daß sie sich dieselben, sofern sie Anhaltspunkte für eine gute und ökonomische Säulenkonstruktion enthalten, gewiß zunutze machen wird. Ich hoffe auch zugleich, daß die allerwärts im Gang befindlichen Versuche uns Gelegenheit geben werden, dieselben in Bälde auf ihre Richtigkeit zu prüfen und die großen Lücken auszufüllen, wie sie die vorliegende Arbeit aufgedeckt hat und übriglassen mußte, da wir uns erst derselben durch die fortschreitende Erkenntnis voll bewußt geworden sind. Ich kann nur die Umstände bedauern, die es mir unmöglich gemacht haben, diese Versuche schon vor sechs Jahren abzuschließen, und ist es mir eine höchst zweifelhafte Befriedigung, hoffen zu dürfen, daß auch nach so langer Zeit der Zweck meiner Arbeit, einen für das Fach wichtigen Beitrag zu liefern, nicht ganz verhindert werden konnte.

BUCHDRUCKEREI GEBRÜDER ERNST
BERLIN SW68.

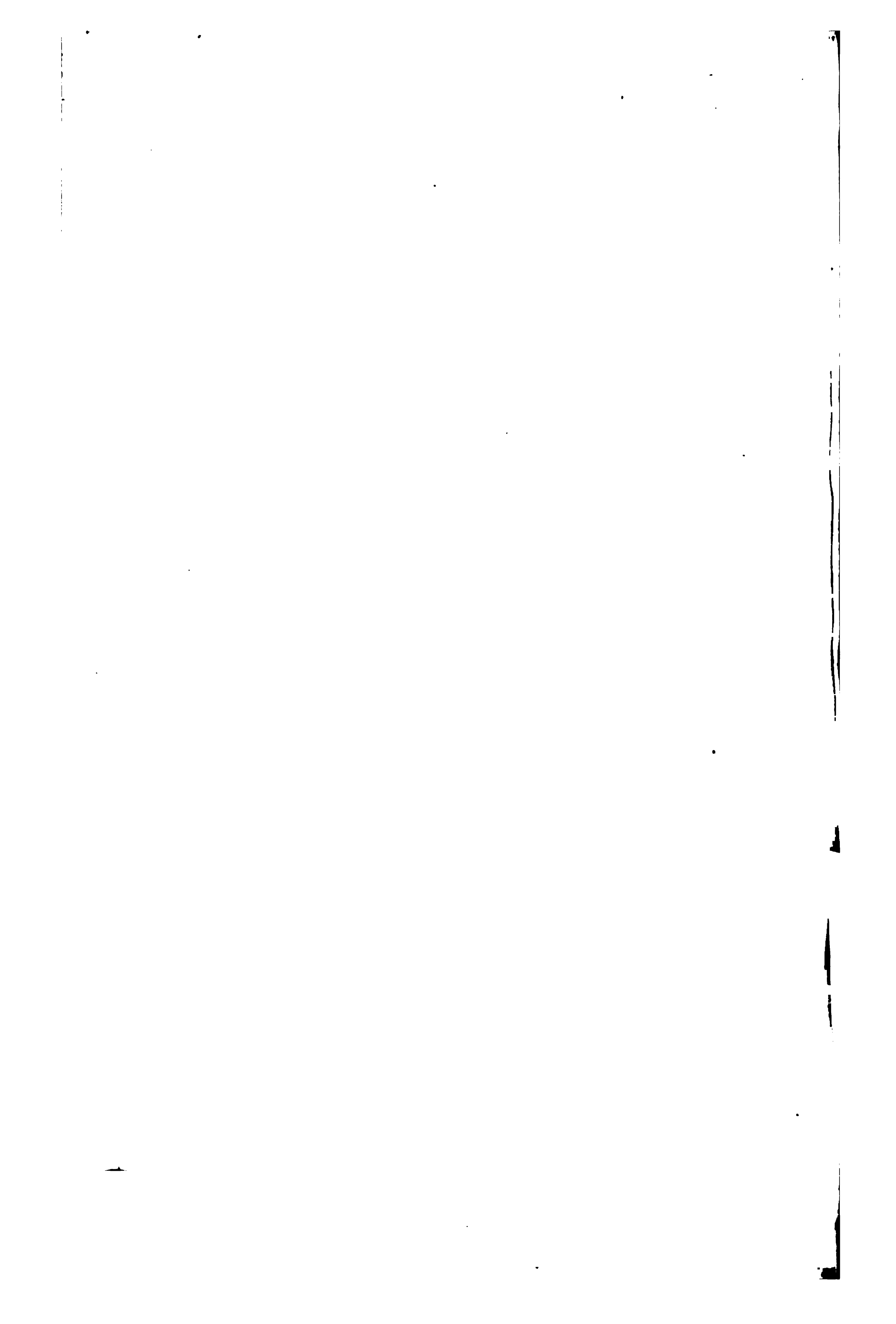
Tafel I.

Dieselben sind: { stehend — liegend hergestellt. / ungerade — gerade Zahlen.

Eisen-einlagen		Gesamte Ausbiegung in der Mitte der Säule in Richtung a mm	b mm	Belastung, unter der die ersten Risse beobachtet wurden kg	Höchst-Belastung P_{max} kg	Tag der Prüfung in Stuttgart
undeisen	100	— 0,05	0,0	125 000	132 000	7. 6. 07
= 28 mm	100	— 0,1	0,0			
= ~ 130 mm	100	— 0,1	0,0			
gel aus 5,4 mm-	100	— 0,1	0,0			
Draht	100	— 0,05	0,1			
	1					
undeisen	1					
= 28 mm	1					
= ~ 130 mm	1					
	00	0,0	— 0,05	128 000	132 000	7. 6. 07

I (Fortsetzung).

—	Federung der Längeneinheit auf 1 kg Pressung $\alpha =$	Beginn der Rißbildung kg	kg/cm²	Höchst-Belastung kg	kg/cm²	Tag der Prüfung in Stuttgart
14	$\frac{1}{379\,400}$	142 800	433	148 000	449	29. 6. 06
36						
55						
89						
34						



Tafel III.

Beginn der Rißbildung		Höchst-Belastung		Tag der Prüfunp in Stuttgart
kg	kg/cm²	kg	kg/cm²	
—	—	97 300	294	3. 7. 06
		90 900	278	3. 7. 06
		120 600	367	3. 7. 06

Flacheisen		0,2—188,4

Beginn der Rißbildung		Höchst-Belastung		Tag der Prüfung in Stuttgart
kg	kg/cm²	kg	kg/cm²	
—	—	106 400	310	2. 7. 06
		123 200	380	4. 7. 06
—		115 400	355	4. 7. 06

ıachträglich hergestellt worden sind.

—	—	107 700	320	15. 7. 07
—	—	133 500	380	15. 7. 07

Z

For

Tafel VI.

auf 1 m³ Sand und Schotter).
Mai 1901.

Bezeichnung: □

	Gesamte Ausbiegung in der Mitte der Säule in Richtung		Belastung, unter der die ersten Risse beobachtet wurden	Höchst-Belastung P_{max}	Tag der Prüfung in Stuttgart
	a mm	*b* mm	kg	kg	
00	+0,2	+0,1	96 000	98 000	31. 5. 07
00	+0,2	+0,25			
00	+0,2	+0,4			

0,1—170,4	15,03	0,98	14,05		
0,1—204,5	18,93	1,42	17,51	$\frac{1}{351\,600}$	

…eren Betonsäule nachträglich hergestellt wurden.

—	—	—	—	—	96 000	315	15. 7. 07
—	—	—	—	—	79 200	260	15. 7. 07

FORSCHERARBEITEN AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

BERECHNUNG DER GEKREUZT ARMIERTEN EISENBETON-PLATTE UND DEREN AUFNAHMETRÄGER



HEFT IX

PREIS 3,60 MARK

VON

Dr.-Ing. JOH. BAPT. BOSCH
STÄDT. BAUAMTMANN.

VERLAG von WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

Berechnung

der

gekreuzt armierten Eisenbetonplatte und deren Aufnahmeträger

unter Berücksichtigung der Kraftwirkungen nach zwei Richtungen

von

Dr.-Ing. JOH. BAPT. BOSCH

städt. Bauamtmann in München.

Mit 32 Textabbildungen.

BERLIN 1908

Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

„Erwartet nicht zu viel, damit wir immer steigen,
Und doch nur euch gebührt zu richten, uns zu schweigen."

Vorwort.

Der I. Abschnitt vorliegender Arbeit ist bereits im Jahre 1905 in Heft VII der Zeitschrift „Beton u. Eisen" erschienen. Die Veranlassung hierzu gab die große Verschiedenheit in der Berechnung von Eisenbetonplatten und deren Unterzügen bei den meiner Behörde (Baupolizeibehörde München) zur Prüfung vorgelegten Elaboraten. Ohne Zweifel sind wir bei unseren Berechnungen der Eisenbetonkonstruktionen noch nicht auf dem völlig richtigen Wege, da es noch nicht gelungen ist, die die Festigkeit ganz wesentlich beeinflussende Art Monolität dieser Konstruktionen zu berücksichtigen. Während durch die verschiedenen Eisenbetonvorschriften, so vor allem durch die preußische vom 16. April 1904, die Aufsuchung der inneren Spannungen nahezu einheitlich festgelegt ist, wird in der Aufstellung des Platten- und Trägermomentes nach den verschiedensten Formeln versucht, der Tatsache nahe zu kommen. Daß hierbei zumeist weit über die zulässigen Grenzen hinausgegangen, oft aber auch viel zu günstig gerechnet wird, dürfte wohl keinem besser bekannt sein, als dem mit der Prüfung betrauten Baupolizeibeamten. Der in einer Reihe von Beispielen angestellte Vergleich sowie ein Vorschlag des Herrn Professor Dietz, München haben mir die Überzeugung gebracht, daß die von Herrn Professor v. Bach aufgestellte Formel in der von Herrn Professor Föppl gegebenen Fassung nach dem Diagonalquerschnitt der Platte als Bruchquerschnitt ein für die Eisenbetonplatte gut brauchbares, dazu den goldenen Mittelweg einschlagendes Resultat ergibt. Zahlreiche Ausführungen in München und anderwärts, deren Berechnungen mit dieser Formel erfolgten, haben sich sehr gut bewährt und liefern den Beweis der Richtigkeit der erwähnten Auffassung. Ich habe es daher in dem I. Abschnitt unternommen, diese Formel so zu gestalten, daß sie einerseits für den Eisenbetonbau bequem anwendbar erscheint, anderseits einen guten Vergleich mit anderen Rechnungsresultaten zuläßt. Die Veröffentlichung dieses I. Abschnittes hat in den Kreisen der Konstrukteure gute Aufnahme gefunden. Dieser Umstand sowohl wie vor allem die ständigen Klagen in Konstrukteurkreisen über die noch bestehende Lücke in der Momentfestsetzung von Eisenbetonträgern unter Berücksichtigung der Wirkungen nach mehreren Richtungen haben mich ermutigt, auch hierfür eine der Tatsache möglichst nahekommende Lösung zu versuchen. Ich

bringe diese den weiteren Abschnitten der Arbeit. Es ist nach der Ableitung klar, daß auch die hier aufgestellten Formeln für die Träger wie für die Bach-Föpplsche Formel für die Platte Anspruch auf eine durchaus statische Richtigkeit und streng wissenschaftlichen Wert nicht machen können. Sie dürften aber neben der Einfachheit in der Anwendung anderen Formeln gegenüber den Vorteil besitzen, daß sie nicht rein empirische, sondern auf Grund der Festigkeitslehre und entsprechend der Wirkung der Eisenbetonkonstruktionen aufgebaute Formeln darstellen. Eine Reihe von Bauten, die sich nach den Probebelastungen gut bewährt haben, wie die Eisenbetondecken im Rathaus München und die umfangreichen Eisenbetonbauten des großen Erweiterungsbaues der Königl. Ludwig-Maximilians-Universität München, sind mit ihnen berechnet.

So übergebe ich die Arbeit der Öffentlichkeit und glaube, solange nicht durch Versuche eine richtige einwandfreie Rechnungsart für den Eisenbetonbau gefunden ist, hierdurch den Eisenbetonkonstrukteuren und meinen Kollegen bei den Baupolizeibehörden einen guten Dienst zu erweisen. Ich bitte um eine wohlwollende Aufnahme.

München, September 1908.

Dr.-Ing. J. B. **Bosch,**
städt. Bauamtmann, München.

Literatur-Verzeichnis.

Dr. F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit. Berlin 1878
Dr.-Ing. *C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit.* 5 Aufl. Berlin 1905
Dr. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. III. Bd. *Festigkeitslehre.*
Dr.-Ing. *F. B. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre.*
E. Mörsch, Der Betoneisenbau, seine Anwendung und Theorie.
Christophe, „Le Béton armé“ 1902.
Zeitschrift Beton u. Eisen. I. und IV. Jahrgang.
Beton-Kalender 1906 u. 1907. Berlin, W. Ernst u. Sohn.
Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten vom 16. April 1904.
Vorläufige Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Eisenbetonbauten aufgestellt vom Ausschuß des Verbandes Deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und des Deutschen Betonvereins.
Grundsätze für statische Berechnungen, Eisenbetonbauten und Ersatzbaustoffe, herausgegeben vom Rate zu Dresden (Baupolizeiamt) 1907.
Deutsche Bauzeitung 1904, 1905, 1906, 1907.
Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch.
Gutachten des Herrn Professor Dietz über das Malzsilogebäude der Löwenbrauerei München.
Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover. Jahrgang 1889. Heft VIII.

I. Abschnitt.

Die Eisenbetonplatte.

Über die Bestimmung der Plattenstärke und des Eisenquerschnitts bei gegebenen zulässigen Beanspruchungen von Beton und Eisen, oder umgekehrt die Auffindung der Beanspruchungen bei gegebenen Dimensionen enthalten „Die Leitsätze für die statische Berechnung und das Rechnungsverfahren" in den preußischen Eisenbetonvorschriften vom 16. April 1904 genügende Anhaltspunkte und besteht schon große Einheit. Nicht so ist es indes mit der Bestimmung des Momentes der Platte. Die übliche Art ist bekanntlich die, nach einer der beiden Plattenrichtungen — gewöhnlich der schmäleren — einen Streifen von etwa 1 m Breite anzunehmen und diesen wie einen Träger der Rechnung zu unterwerfen, also das Moment mit den Formeln $\frac{ql^2}{8}$, $\frac{ql^2}{10}$, $\frac{ql^2}{12}$, $\frac{ql^2}{24}$ usw. zu suchen, je nachdem die Platte als frei aufliegend, als teilweise oder ganz eingespannt angenommen wird. Es ist klar, daß durch die Nichtberücksichtigung des übrigen Plattenteiles, durch die Annahme von nur einer der beiden Richtungen das Endergebnis ganz wesentlich beeinflußt wird; man wird häufig vor die Frage gestellt, wie berücksichtigt man die Wirkung nach den beiden Richtungen? Es sind ja einige Formeln, mit denen diese Berücksichtigung angestrebt wird, im Gebrauch, so namentlich die aus der Grashofschen Plattentheorie abgeleitete, sogen. Christophsche Formel

$$M = + \alpha \cdot \frac{a^4 b^2}{a^4 + b^4} p \text{ bezw. } \alpha \cdot \frac{a^2 b^4}{a^4 + b^4} p,$$

wobei $\alpha = \frac{1}{8} - \frac{1}{24}$, je nach der Einspannung der Platten; doch ist erwiesenermaßen gerade diese letztere Formel für Eisenbeton, als ein nicht homogenes Material, nicht gut brauchbar, und die Berechnung gestaltet sich auch zu kompliziert. Die Frage ist eben eine noch nicht gelöste. Professor v. Bach ist mit der Erforschung der Beanspruchung von ringsum aufgelagerten bezw. gleichartig eingespannten Platten schon seit langem beschäftigt und

gelangte schließlich selbst für den einfachsten Belastungsfall (gleichmäßig verteilte Belastung) nur zu Näherungsregeln und dies für Platten aus einheitlichem Baustoff; einem genialen Grashof ist es nicht gelungen, ein für die Praxis gut verwendbares Endergebnis zu erzielen. Man sollte indes doch wenigstens das benutzen, was uns diese und andere Autoritäten geliefert haben und sollte von den gleichwertigen Arbeiten die einfachste wählen. — Bei der Berechnung der Zellenböden des Malzsilogebäudes der Löwenbrauerei München wurde die Frage einigermaßen ausgetragen durch den Hinweis, den Professor Dietz, München in einem Gutachten machte. Die dort angewandte und seitdem wiederholt verwendete Rechnungsart werde hier vorgeführt, um Anregungen zur Verbesserung und Erweiterung zu geben. Es muß nämlich von vornherein bemerkt werden, daß sie nicht als einwandfrei hingestellt werden will. Ihre Anwendung ist vor allem bei der eingespannten, gekreuzt armierten Platte, bei welcher ausgesprochene Wirkungen nach den beiden Richtungen hin vorhanden sind, am Platze; aber auch für die einfach armierte Platte kann sie — falls noch außerdem die Einspannstelle etwa mit der Formel $\frac{ql^2}{12}$ untersucht wird — benutzt werden, da auch hier durch die innige Verbindung von Eisen und Beton Wirkung nach beiden Richtungen hin gegeben sein muß. Aus diesem Grunde verdient diese Rechnungsart bei beiden Armierungsarten, vor allem aber bei der gekreuzt armierten Platte, den Vorzug vor den anderen, mit denen sie — wie überhaupt mit allen Eisenbetonberechnungen — gemein hat, daß sie nur Anspruch auf eine Schätzung machen kann.

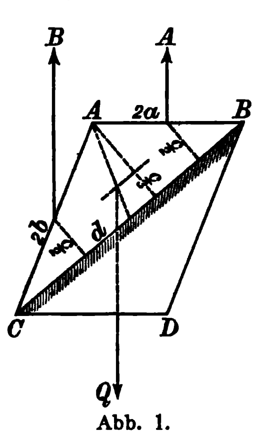


Abb. 1.

Für gewöhnlich kann die Eisenbetonplatte — infolge ihrer gleichzeitigen Ausführung mit Träger und Pfeiler — namentlich für die inneren Deckenfelder als an den Seiten teilweise eingespannt oder wenigstens an den Ecken eingeklemmt gelten. Es werde nun nach Bach u. Föppl (Band III, 2. Aufl., S. 308) der gefährliche Bruchquerschnitt in der Diagonalrichtung angenommen (Abb. 1), und es seien die unbekannten Reaktionen A und B, die als in der Mitte der Einspannstellen angreifend vorausgesetzt werden können.

Es gilt alsdann

$$M' = A \cdot \frac{c}{2} + B \cdot \frac{c}{2} - Q \cdot \frac{c}{3} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

q sei die gleichmäßig verteilte Last für die Flächeneinheit, daher

$$Q = \frac{2a \cdot 2b}{2} q = 2a \cdot b \cdot q \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

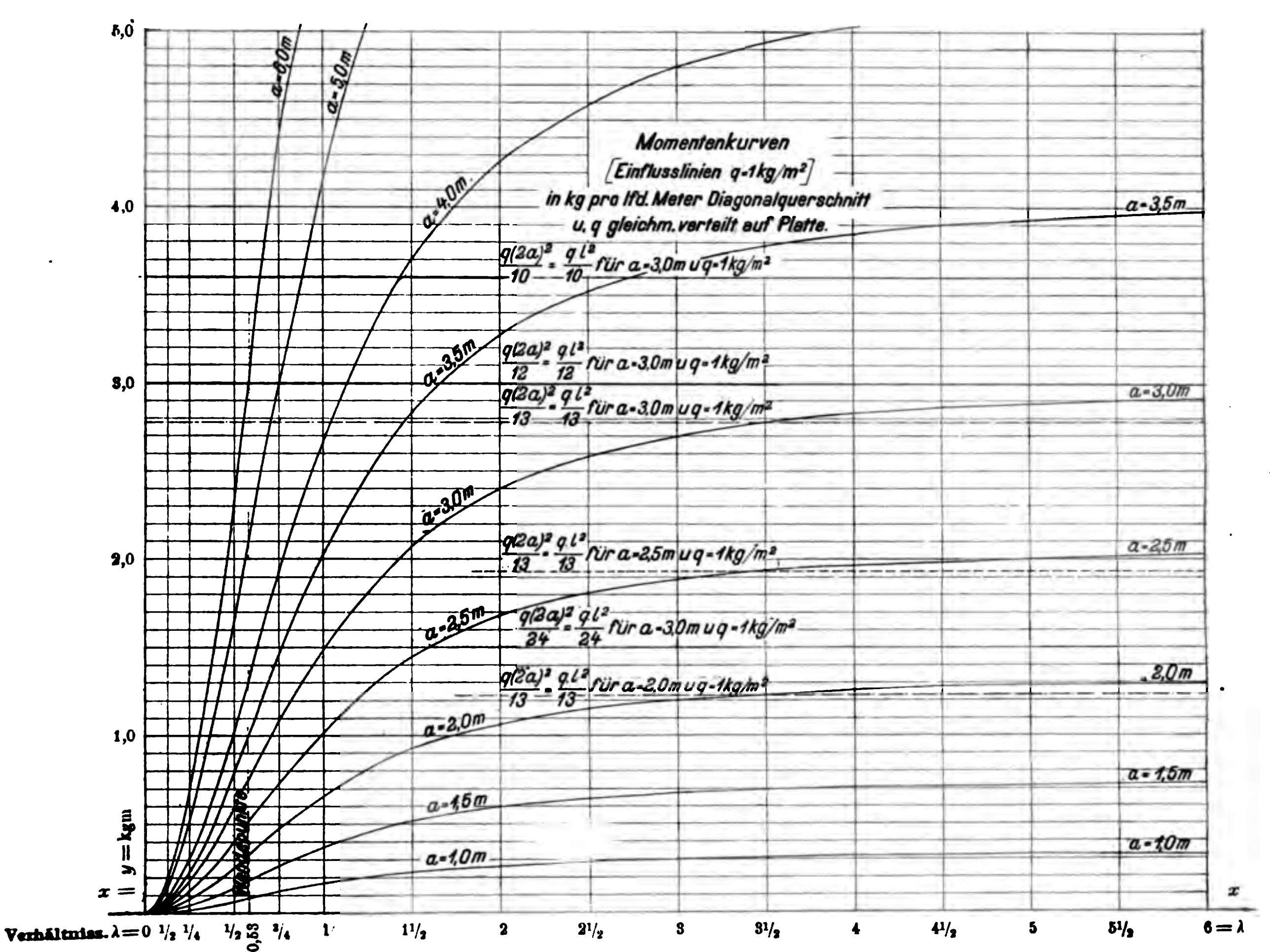
Es muß sein

$$A + B = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b \cdot q = 2a \cdot b \cdot q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

daher

$$M' = (A + B)\frac{c}{2} - 2a \cdot b \cdot q \cdot \frac{c}{3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\, \boldsymbol{a \cdot b \cdot c \cdot q} \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Formel 4 stellt nun die v. Bachsche Plattenformel dar, wobei der Koeffizient $\varphi = 1{,}0$ (s. unten).



für eine Last $q = n$ kg/m² sind die Kurvenwerte mit n zu multiplizieren.

Abb. 2.

Sie trägt den Wirkungen nach beiden Richtungen hin Rechnung. Sie werde zum Vergleich mit den anderen Formeln und leichterer Anwendung umgeformt.

Es ist

$$c = \frac{2 \cdot a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

daher

$$M' = \frac{2}{3} \frac{a^2 \cdot b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wird nun das Verhältnis $\frac{b}{a} = \lambda$ eingeführt und das Moment für die Längeneinheit des Diagonalquerschnitts $d \left(= \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}\right)$ aufgestellt, so ist dieses

$$M = \frac{1}{3} \frac{a^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Infolge der gleichmäßigen Verteilung des Momentes über die Länge der Diagonale stellt — analog der Bachschen Näherungstheorie für die kreisförmige Platte — M einen „Durchschnittswert" dar.

Es wird für $q = 1$ (Einflußlinien der Momente):

$$M = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} = a^2 f_{(\lambda)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das Moment ist somit als eine Funktion von dem Verhältnis $\frac{b}{a}$ gefunden.

Werden nun unter Annahme verschiedener Werte von a als Konstante und λ als Veränderliche die Funktionswerte in einem Koordinatensystem aufgetragen, so entstehen die Kurven, wie sie Abb. 2 zeigt, die als Momenteneinflußlinien bezeichnet werden können, da die Werte für eine Last $q = 1$ gelten und für eine Last $q = n$ Einheiten lediglich mit n zu multiplizieren sind. Will indes die Berechnung analytisch (mit Interpolation) durchgeführt werden, so seien hier die verschiedenen Werte von M zusammengestellt:

$a=1$		$a=1^1/_2$		$a=2$		$a=2^1/_2$		$a=3$		$a=3^1/_2$		$a=4$		$a=5$		$a=6$		Bemerkungen
λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	λ	M	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$^1/_4$	0,02	$^1/_4$	0,047	$^1/_4$	0,08	$^1/_4$	0,123	$^1/_4$	0,18	$^1/_4$	0,240	$^1/_4$	0,31	$^1/_4$	0,50	$^1/_4$	0,70	
$^1/_2$	0,06	$^1/_2$	0,150	$^1/_2$	0,26	$^1/_2$	0,417	$^1/_2$	0,60	$^1/_2$	0,816	$^1/_2$	1,06	$^1/_2$	1,66	$^1/_2$	2,40	
$^3/_4$	0,12	$^3/_4$	0,270	$^3/_4$	0,480	$^3/_4$	0,750	$^3/_4$	1,09	$^3/_4$	1,470	$^3/_4$	1,92	$^3/_4$	3,00	$^3/_4$	4,30	
1	0,166	1	0,375	1	0,664	1	1,042	1	1,494	1	2,042	1	2,656	1	4,15	1	5,98	
$1^1/_2$	0,230	$1^1/_2$	0,520	$1^1/_2$	0,923	$1^1/_2$	1,440	$1^1/_2$	2,070	$1^1/_2$	2,830	$1^1/_2$	3,700	$1^1/_2$	5,77	$1^1/_2$	8,30	
2	0,266	2	0,600	2	1,066	2	1,666	2	2,394	2	3,266	2	4,256	2	6,65	2	9,58	
3	0,300	3	0,675	3	1,200	3	1,875	3	2,700	3	3,675	3	4,800	3	7,50	3	10,80	
4	0,314	4	0,706	4	1,256	4	1,960	4	2,826	4	3,843	4	5,025	4	7,85	4	11,30	Für diese Werte von λ empfiehlt sich die Anwendung der Formel nicht mehr (s. unten).
5	0,320	5	0,721	5	1,280	5	2,00	5	2,880	5	3,926	5	5,120	5	8,00	5	11,52	
6	0,324	6	0,730	6	1,296	6	2,03	6	2,916	6	3,973	6	5,184	6	8,10	6	11,66	
8	0,328	8	0,738	8	1,312	8	2,05	8	2,952	8	4,020	8	5,248	8	8,20	8	11,81	
10	0,330	10	0,742	10	1,320	10	2,06	10	2,970	10	4,042	10	5,280	10	8,25	10	11,88	

Zur näheren Betrachtung der Kurve und zu einem Vergleich mit den üblichen Berechnungsformeln werde zunächst gesucht:

$$\frac{dM}{d\lambda} = \frac{2}{3}\,a^2 \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und

$$\frac{d^2M}{d\lambda^2} = \frac{2}{3}\,a^2 \cdot \frac{(1-2x^2-3x^4)}{(1+x^2)^4} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Für $\lambda = 0$ folgt aus Gleichung 8 ... $M = 0$, d. h. die Kurve geht durch den 0-Punkt des Koordinatensystems; hierbei ist $\frac{dM}{d\lambda} = 0$, d. h. die Kurve tangiert im 0-Punkt die x-Achse.

Für alle Werte von λ (positiv) bleibt $\frac{dM}{d\lambda}$ positiv, d. h. die Kurve zeigt ständig Wachsen; da für $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}} =$ etwa 0,58 der Zählerausdruck von $\frac{d^2M}{d\lambda^2} \cdots 1 - 2x^2 - 3x^4 = 0$ wird, der Nenner aber positiv, also größer als 0 ist, so ist bei $\lambda = 0{,}58$ ein Wendepunkt gegeben. Für alle Werte von $\lambda < 0{,}58$ wird der Ausdruck $M \cdot \frac{d^2M}{d\lambda^2}$ positiv, d. h. bis dorthin zeigt die Kurve eine beschleunigte Zunahme (Anwachsen); von dem Wert $\lambda = 0{,}58$ ab wird aber der angeführte Ausdruck negativ, d. h. von dort ab ist eine verzögernde Zunahme der Kurve gegeben, oder bis $\lambda = 0{,}58$ weist die Kurve ihre konvexe Seite der x-Achse zu und für Werte von $\lambda > 0{,}58$ ihre konkave Seite. Von $\lambda =$ etwa 3 bis $3^1/_2$ ab werden die Kurven — wie die Abbildung zeigt — mehr und mehr mit der x-Achse gleichgerichtet und können von hier ab ersetzt werden durch eine Parallele zu der x-Achse, d. h. von $\lambda = 3$ bis $3^1/_2$ ab nähert sich der Funktionswert der Trägerformel $\frac{ql^2}{a}$, wobei a etwa bei 13 gelegen ist. Hiermit ist ein Vergleich mit den üblichen Trägerformeln gegeben; denn es zeigt sich, daß die Formeln $\frac{ql^2}{8}$, $\frac{ql^2}{10}$ und auch noch $\frac{ql^2}{12}$ ungünstigere Resultate geben als die vorliegende Rechnungsart, daß aber die Formeln $\frac{ql^2}{24}$, $\frac{ql^2}{36}$ usw. von bestimmten Verhältniswerten λ ab viel zu günstige Ergebnisse aufweisen. Die Rechnungsart hält also den goldenen Mittelweg ein. Wenn man ferner bedenkt, welch ungünstige Annahmen bei der Weiterrechnung gemacht werden, daß man im Beton jedweden Zug ausschließt, daß Dehnungen und Spannungen proportional den Abständen von der Neutralachse genommen werden, zumeist also das Hooksche Gesetz statt des v. Bachschen Potenzgesetzes zugrunde gelegt wird, daß man — wie es die innige Verbindung der Eisenbetontragelemente eigentlich fordert — nicht mit dem Kleinstwert der Formänderungsarbeit rechnet

$$\left(\int_0^l \frac{Mx}{E\Theta}\,\frac{\partial Mx}{\partial X}\,dx + \sum \frac{Ss\,\partial S}{EF \cdot \partial X}\,dx\right),$$

was, wie sich bei dem Malzsilo der Löwenbrauerei gezeigt hat, für verschiedene Konstruktionsteile von höchst ungünstigem Einfluß ist, so wird man sich sagen müssen, daß es nicht nötig ist, von den verschiedenen gleichberechtigten Formeln zur Auffindung des Momentes jene zu nehmen, die die größten Werte ergeben.

Wie oben schon angedeutet, stellt die der Betrachtung unterzogene Bachsche Formel

$$M' = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot c \cdot q$$

einen Sonderfall dar. Allgemein lautet die Formel:

$$M' = \varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot q.$$

Bach setzt für $\varphi = 0{,}75$ bezw. 1,12 für die Grenzfälle: Platte völlig eingespannt bezw. vollkommen frei aufliegend. Für $\varphi = 1$, wie gewählt, kann die Platte in einem Zustand „teilweiser" Einspannung angenommen werden. Dies entspricht der gewöhnlichen Annahme in der Praxis. Sollte sich indes die Platte mehr dem Zustand der freien Auflagerung bezw. der vollen Einspannung nähern, so sind die nach obigem Verfahren gefundenen Werte mit 1,12 bezw. 0,75 zu multiplizieren. — Wenn die Langseite erheblich größer ist als die Schmalseite, also λ einen hohen Wert annimmt, so verschwindet die Wirkung nach der Langseite fast vollständig. Dies ist in dem II. Abschnitt nachgewiesen und entspricht auch den Bachschen Versuchen mit derartigen Platten, wobei sich die Risse mehr parallel der Langseite als nach der Diagonale ergeben haben. Für derartige Platten empfiehlt sich daher die Anwendung obiger Formel nicht mehr, sondern eine einfache Schnittführung nach der Schmalrichtung und Betrachtung des geschnittenen Streifens als Träger.

Beispiel: Eine Platte von 4 m Breite und 6 m Länge habe eine Nutzlast von 800 kg/m² zu tragen; wie stark muß die Platte sein und welcher Eisenquerschnitt für 1 lfd. m ist erforderlich, wenn im Beton ein Druck von 40 kg/cm² und im Eisen ein Zug von 1000 kg/cm² zugelassen wird?

Lösung:

$$2a = 4 \text{ m} \ldots \quad a = 2 \text{ m} \qquad \lambda = \frac{3}{2} = 1^1/_2,$$
$$2b = 6 \text{ m} \ldots \quad b = 3 \text{ m}$$

aus Abb. 2 wird (für 1 kg) entnommen:

$$M = 0{,}923 \text{ kgm},$$

demnach für $\underset{\text{(Nutzl.)}}{800} + \underset{\text{(Eigengew.)}}{400} = 1200$ kg:

$$M = 0{,}923 \cdot 1200 = 1108 \text{ kgm} = 110\,800 \text{ kgcm},$$

aus Abb. 3 — die die nach der üblichen Rechnungsweise und unter Zugrundelegung eines Wertes $m = 1$ sich ergebenden Werte der Plattenstärke

und des Eisenquerschnitts für 1 lfd. m entnehmen läßt — folgert für $M = 1{,}108$ tm

eine Plattenstärke $\delta =$ etwa 14 cm und

ein Eisenquerschnitt $F_e =$ etwa 10 cm².

Dieser Eisenquerschnitt wäre nun für 1 lfd. m Diagonale anzunehmen; er kann aber auch ohne großen Einfluß für 1 lfd. m Platte nach der einen oder der anderen Richtung, oder am besten verteilt nach den beiden

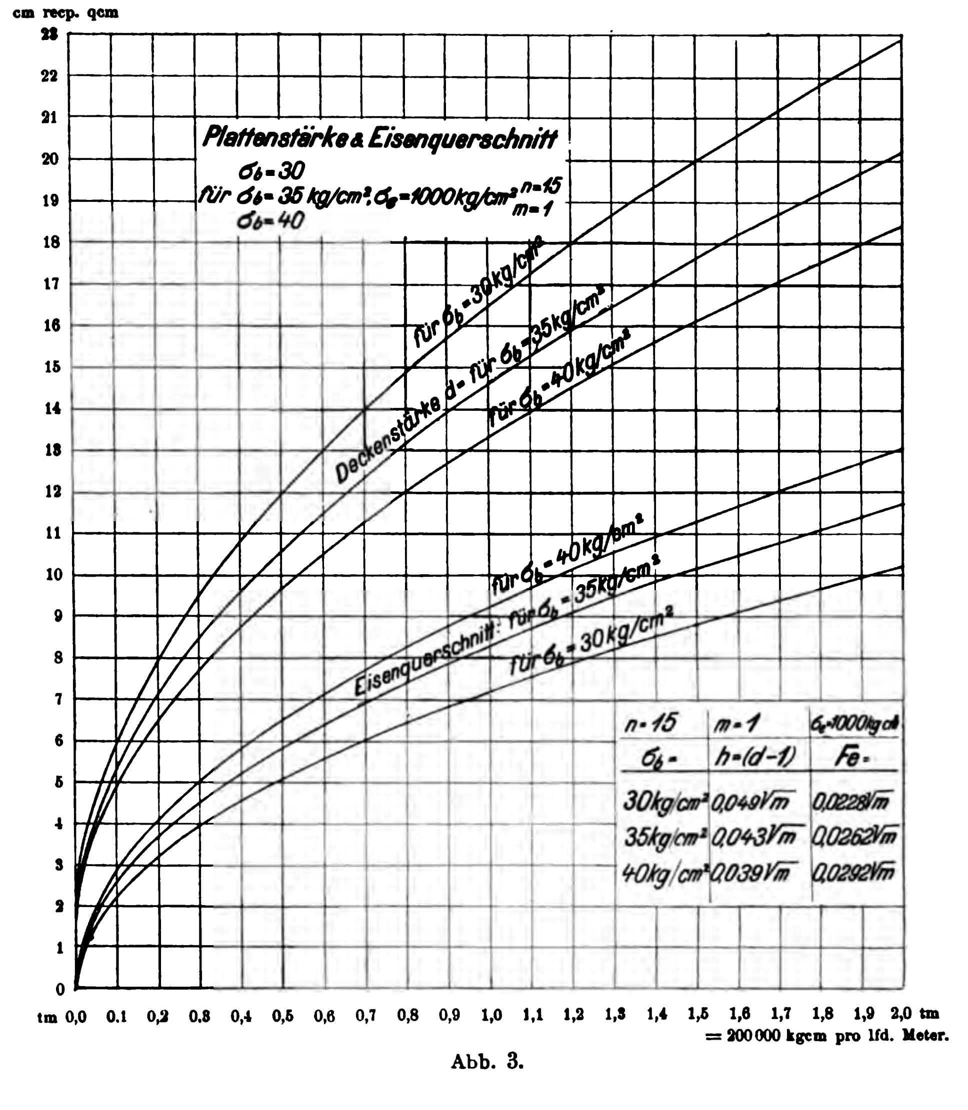


Abb. 3.

Richtungen hin genommen werden, denn wenn auch dann auf 1 lfd. m Diagonalquerschnitt etwas weniger kommt, so wird dies dadurch wieder ausgeglichen, daß in der Diagonale das Eisen schräg geschnitten wird, also eine größere Schnittfläche aufweist.

Untersucht werde noch der Übergangsquerschnitt am Träger. Hier wäre das Moment zu suchen mittels der Formel

$$\frac{q l^2}{12} = \frac{1200 \cdot 16}{12} = 1600 \text{ mkg} = 1{,}6 \text{ tm},$$

aus Abb. 3 wäre hier $\delta = 16{,}7$ cm und

$F_e = 11{,}6 \text{ cm}^2$.

Es würde also eine Eiseneinlage, bestehend aus 10 Stück Rundeisen mit 12 mm Durchmesser, genügen, und empfiehlt es sich, den Übergang zum Träger voutenförmig auszubilden.

Schubspannung

$$\tau = \frac{1{,}5 \cdot V}{b \cdot h} = \frac{1{,}5 \cdot 2400}{100 \cdot 15 \cdot 7} = \text{etwa } 2{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

also zulässig.

Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Plattenstärke und gegebenem Eisenquerschnitt die im Beton und Eisen herrschenden Spannungen zu finden, läßt sich ebenso leicht lösen.

II. Abschnitt.

Die Auflagerkräfte der Platte.

1. Rechnungsgang im allgemeinen.

Wird ein größerer Raum von einer Eisenbetonplatte überspannt, so wird diese von einer Reihe Längs- und Querträger aufgenommen, die ihrerseits wiederum in der Regel durch Säulen unterstützt werden. Durch diese Träger wird die Decke in eine Anzahl Felder geteilt. Legen wir unseren weiteren Betrachtungen ein derartiges mittleres Feld zugrunde. Die Eisenbetonplatte sei gekreuzt armiert.

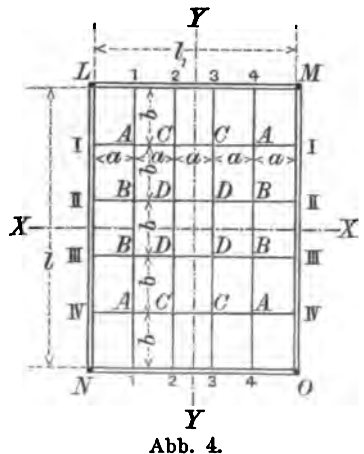


Abb. 4.

Als Längsträger (Abb. 4) treten die Träger LN und OM, als Querträger die Träger LM und NO auf. Wir sind bereits im I. Abschnitt davon ausgegangen, daß nach der Annahme von Föppl und v. Bach an der Abnahme der von der Platte $LMNO$ aufzunehmenden Last die 4 Träger beteiligt sind. Es erscheint daher die übliche Berechnungsweise, nach welcher ein in der Richtung der schmäleren Plattenseite geführter Schnitt (etwa 1 m breit) als Träger zugrunde gelegt wird, der die Last auf die Längsträger überträgt, so daß die Querträger nur die Aufgabe der Verspannung

zu übernehmen haben, zu ungünstig für die Längsträger und zu günstig für die Querträger. Welcher Teil der Last kommt nun den Längsträgern und welcher den Querträgern zu?

Diese Aufgabe zu lösen wird versagen, solange nicht durch eine Reihe von maßgebenden Versuchen, namentlich über die Durchbiegung von Eisenbetonkörpern, die nötigen Grundlagen gegeben sind. Es kann daher nur unser Streben sein, bis dahin ein Resultat hierfür ausfindig zu machen, das dem tatsächlichen Zustande möglichst nahe kommt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns die Platte in eine Reihe gleicher Längs- und Querstreifen zerlegt, die die Lasten auf die Längs- und Querträger übertragen. Es wird hierdurch die Platte gleichsam in ein Netz von sich überkreuzenden Trägern I—I, II—II, III—III, IV—IV der Richtung $x\,x$ und 1—1, 2—2, 3—3 und 4—4 der anderen Richtung $y\,y$ aufgelöst. Bei Annahme von je 5 Streifen nach jeder Richtung treten je 4 Träger der x- und y-Richtung auf. Es werde gleichmäßige Belastung der Eisenbetondecke vorausgesetzt und zwar p kg/m² Platte. Es hat jeder Trägerkreuzpunkt eine Last aufzunehmen $= Q = a \cdot b \cdot p$. Hiervon trifft ein Anteil je auf einen Träger der x- und ein solcher je auf einen Träger der y-Richtung. Es kann nach den Bachschen Versuchen angenommen werden, daß die zu den Mittellinien $x\,x$ und $y\,y$ der Platte symmetrisch liegenden Kreuzpunkte gleiche Durchbiegung aufweisen, d. h. daß dort die Anteile an der Last die gleichen sind; es erhält somit der Träger I—I wie der Träger IV—IV in den Kreuzpunkten die unbekannten Lasten A und C; der Träger II—II und III—III die unbekannten Lasten B und D. Die entsprechenden Träger der y-Richtung haben sodann die Lasten $(Q—A)$, $(Q—B)$, $(Q—C)$ und $(Q—D)$ aufzunehmen.

Um die Unbekannten A, B, C und D zu finden, kann nun verschieden vorgegangen werden. In den Kreuzpunkten müssen die Durchbiegungen der hier sich treffenden Träger der einen und der anderen Richtung die gleichen sein. Dieser Umstand könnte benutzt werden und ist der nächstliegende; es sind allerdings über die Durchbiegungen von Eisenbetonträgern infolge Mangels an Versuchen und namentlich auch durch den Ausschluß von Zugspannungen im Beton sichere theoretische Grundlagen bezw. Aufstellungen noch nicht gegeben; es sollen daher diese Unbekannten in einfacherer und allgemeinerer Weise gefunden werden und zwar durch direkte Anwendung des Satzes von Castigliano, daß den Größen A, B, C und D diejenigen Werte beigelegt werden müssen, die die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ in der Platte oder in dem im Gleichgewichtszustand befindlichen Netze (System) von an den einzelnen Kreuz(Knoten-)punkten sich gegenseitig stützenden Trägern zu einem Minimum machen.

Sind die Unbekannten A, B, C, D gefunden, so können hieraus die Beanspruchungen der die Platte tragenden Längs- und Querträger abgeleitet werden. Diese sind sodann in einer für die Praxis leicht verwendbaren

Form als Funktionen der gleichmäßig verteilten Last p und der Längs- und Querabmessungen l und l_1 $\left(\text{bezw. der Länge } l \text{ und des Verhältnisses } \lambda = \frac{l}{l_1}\right)$ auszudrücken.

Es ist klar, daß infolge der verschiedenen Annahmen, der Zugrundelegung einer endlichen Anzahl von Streifen (hier 5), der Nichtberücksichtigung ihres gegenseitigen Zusammenhanges sowie der Annahme kontinuierlich wirkender Träger mit unnachgiebigen statt nachgiebigen Stützen das Endresultat nicht einwandfrei erscheint, immerhin wird es aber der Tatsache näher kommen, als die bisherigen Rechnungsvorgänge und dem Eisenbetonkonstrukteur eine wichtige, längst erwünschte Handhabe bieten.

2. Rechnungsgang im besonderen.

A. Platte als frei aufliegend angenommen.

I. Formänderungsarbeit in Richtung x—x (Abb. 5).

1. $\dfrac{d\mathfrak{A}}{dA}$.

Es werde zunächst die geringe, gleichmäßig verteilte Last $^1/_2 Q$ der Hälften der äußeren Felder vernachlässigt — da auf die Bestimmung der Unbekannten A, B, C und D ohne merklichen Einfluß. — Sie werde erst bei Aufsuchung der Auflagerkräfte auf die Unterzüge in Rechnung gebracht.

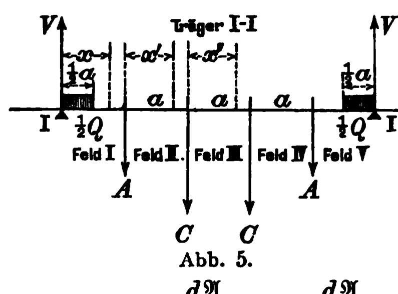


Abb. 5.

$$V = A + C.$$

Für das gesamte Trägersystem ist zu bilden

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA} = 0; \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dB} = 0; \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dC} = 0 \text{ und } \frac{d\mathfrak{A}}{dD} = 0,$$

wobei $\mathfrak{A}$ die gesamte Formänderungsarbeit bedeutet. Es sind die Anteile hiervon von jedem einzelnen Träger zu bilden und diese zu summieren.

Allgemein ist

$$\mathfrak{A} = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,E\Theta} + \int_0^l \frac{R^2\,dx}{2\,E\,F} + \int_0^l \varepsilon\,t\,R\,dx + \beta \int_0^l \frac{Z^2\,dx}{2\,G \cdot F}$$

wobei

M das Moment,
R die Achsialkraft,
E den Elastizitätsmodul,
Θ das Trägheitsmoment,
F den Querschnitt,
ε den Ausdehnungskoeffizienten,
t die Temperaturänderung,
β einen von der Gestalt des Querschnitts abhängigen Koeffizienten (für das Rechteck $^6/_5$).
Z die die Schubspannungen erzeugende Schnittkraft
und G den Gleitmodul

bedeutet.

Da wir es hier mit reiner Biegung zu tun haben, ist $R=0$. Der Einfluß der Temperaturänderung und der Schubspannungen ist ein minimaler und werde daher vernachlässigt. Es verschwinden daher sämtliche Glieder mit Ausnahme des ersten.

$$\mathfrak{A}=\int_0^l \frac{M^2\,dx}{2\,E\,\Theta}.$$

Für die vorliegenden Träger sind E und Θ gleich, sie treten demnach als Konstante auf und es ist

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA}=\frac{1}{E\Theta}\int_0^l \frac{M\,\delta M}{\delta A}\,dx=0 \text{ oder } \int_0^l \frac{M\,\delta M}{d\,A}\,dx=0$$

Ebenso ist

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB}=\int_0^l \frac{M\,\delta M}{\delta B}\,dx=0 \text{ usw.}$$

Es sind daher für jeden Träger die Ausdrücke vorstehender Form zu bilden.

Feld 1 des Trägers I—I (Abb. 5):

$$M x=V x=(A+C)\,x$$

$$\frac{\delta\,M x}{\delta A}=x$$

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{\delta M x}{\delta A} M x\,dx=\int_0^a (A+C)x^2\,dx=\frac{1}{3}\,A a^3+\frac{1}{3}\,C a^3 \quad . \quad (1)$$

Feld 2 des Trägers I—I:

$$Mx'=V\,(a+x')-A x'=A a+C a+C x'$$

$$\frac{\delta M x'}{\delta A}=a$$

$$\int_{x'=0}^{x'=a} \frac{\delta M' x}{\delta A}\,M' x dx=\int_0^a (A a^2+C a^2+C x' a)\,dx=A a^3+C a^3+\frac{C a^3}{2}$$

$$=A a^3+\frac{3}{2}\,C a^3 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Feld 3 des Trägers I—I:

$$Mx''=V\,(2a+x'')-A\,(a+x'')-Cx''=A a+2 a C$$

$$\frac{\delta M x''}{\delta A}=a$$

$$\int_{x''=0}^{x''=a} \frac{\delta M x''}{\delta A}\,M x'' dx=\int_0^a (A a^2+2 a^2 C)\,dx=A a^3+2 a^3 C \quad . \quad (3)$$

Für Feld 4 = für Feld 2 $=A a^3+\frac{3}{2}\,C a^3$ . . . . (4)

„ Feld 5 = „ Feld 1 $=\frac{1}{3}\,A a^3+\frac{1}{3}\,C a^3$. . . . . (5)

Der Anteil des Trägers I—I an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ ist daher $=$ Σ-Ausdrücke 1, 2, 3, 4, 5

$$= \frac{11}{3} Aa^3 + \frac{17}{3} Ca^3.$$

Die Träger II—II und III—III haben keinen Einfluß auf $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$.

Der Träger IV—IV hat den gleichen Anteil wie Träger I—I

$$= \frac{11}{3} Aa^3 + \frac{17}{3} Ca^3.$$

Es ist daher der Gesamtanteil $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ in der Richtung xx

$$= \frac{22}{3} Aa^3 + \frac{34}{3} Ca^3 \quad \text{. . . . . (I)}$$

2. $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$.

Nach derselben Ableitung wie vorher für die in Betracht kommenden Träger II—II und III—III (für A tritt B ein, „ C „ D „) findet sich Gesamtanteil von $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$ in Richtung x—x . $= \frac{22}{3} Ba^3 + \frac{34}{3} Da^3$ . . . . (II)

3. $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$.

In Betracht kommen die Träger I—I und IV—IV.

1. Feld:

$$Mx = Vx = (A + C)\,x$$

$$\frac{\partial Mx}{\delta C} = x$$

$$\int_0^a (A + C)\,x^2 dx = \frac{1}{3} Aa^3 + \frac{1}{3} Ca^3 \quad \text{. . . . . (1)}$$

2. Feld:

Nach oben ist: $Mx' = Aa + C(a + x')$

$$\frac{\delta Mx'}{\delta C} = (a + x')$$

$$\int_{x'=0}^{x'=a} \frac{\delta Mx'}{\delta C} Mx' dx = \int_0^a [Aa + C(a + x')]\,(a + x')\,dx$$

$$= \frac{3}{2} Aa^3 + \frac{7}{3} Ca^3 \quad \text{. . . . . (2)}$$

3. Feld:

Nach oben ist: $Mx'' = Aa + 2aC$

$$\frac{\delta Mx''}{\delta C} = 2a$$

$$\int_0^a \frac{\delta Mx''}{\delta C} Mx'' dx = \int_0^a (Aa + 2aC)\,2a\,dx = 2Aa^3 + 4Ca^3 \quad . \quad (3)$$

4. Feld = 2. Feld . . $\frac{3}{2} Aa^3 + \frac{7}{3} Ca^3$ . . . . (4)

5. Feld = 1. Feld . . $\frac{1}{3} Aa^3 + \frac{1}{3} Ca^3$ . . . . (5)

Anteil des Trägers I—I an $\frac{d\mathfrak{A}}{dC} = \Sigma\, 1, 2, 3, 4, 5 = \underline{\frac{17}{3} Aa^3 + \frac{28}{3} Ca^3}.$

" " " IV—IV = dem des Trägers I—I $= \underline{\frac{17}{3} Aa^3 + \frac{28}{3} Ca^3}.$

Daher Gesamtanteil von $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$ in Richtung x—x

$$\underline{= \frac{34}{3} Aa^3 + \frac{56}{3} Ca^3} \quad \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

4. $\frac{d\mathfrak{A}}{dD}$.

Denselben Anteil wie $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$ hat $\frac{d\mathfrak{A}}{dD}$ in Richtung x—x, wenn statt A—B, statt C—D gesetzt wird

$$\underline{= \frac{34}{3} Ba^3 + \frac{56}{3} Da^3} \quad \ldots \ldots \quad \text{(IV)}$$

Zusammenfassung nach Richtung x—x:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA} = \frac{22}{3} Aa^3 + \frac{34}{3} Ca^3 \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB} = \frac{22}{3} Ba^3 + \frac{34}{3} Da^3 \quad \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC} = \frac{34}{3} Aa^3 + \frac{56}{3} Ca^3 \quad \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD} = \frac{34}{3} Ba^3 + \frac{56}{3} Da^3 \quad \ldots \ldots \quad \text{(IV)}$$

II. Formänderungsarbeit in Richtung y—y (Abb. 6).

1. $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$.

Träger 1—1:

$V_1 = Q - A + Q - B = 2Q - A - B.$

Feld 1:

$$Mx = (Q - A + Q - B)\,x$$
$$= 2\,Qx - Ax - Bx$$
$$\frac{\delta Mx}{\delta A} = -\,x$$

Abb. 6.

$$\int_0^b \frac{\delta Mx}{\delta A} Mx\,dx = \int_0^b (-\,2\,Qx^2 + Ax^2 + Bx^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} Ab^3 + \frac{1}{3} Bb^3 - \frac{2}{3} Qb^3 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Feld 2:

$$Mx' = (2Q - A - B)(b + x') - (Q - A)x' = 2Qb - Ab - Bb + Qx' - Bx'$$

$$\frac{\delta Mx'}{\delta A} = -b$$

$$\int_0^b \frac{\delta Mx'}{\delta A} Mx'\,dx = \int_0^b -2Q\cdot b^2 + Ab^2 + Bb^2 - Qx'b + Bx'b$$

$$= Ab^3 + \frac{3}{2}Bb^3 - \frac{5}{2}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Feld 3:

$$Mx'' = (2Q - A - B)(2b + x'') - (Q - A)(b + x'') - (Q - B)x''$$
$$= 3Qb - Ab - 2Bb$$

$$\frac{\delta Mx''}{\delta A} = -b$$

$$\int_0^b \frac{\delta Mx''}{\delta A} Mx''\,dx = \int_0^b (-3Qb^2 + Ab^2 + 2Bb^2)\,dx$$

$$= Ab^3 + 2Bb^3 - 3Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Feld 4 = Feld 2

$$= Ab^3 + \frac{3}{2}Bb^3 - \frac{5}{2}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Feld 5 = Feld 1

$$= \frac{1}{3}Ab^3 + \frac{1}{3}Bb^3 - \frac{2}{3}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Der Anteil des Trägers 1—1 an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ ist daher Σ 1, 2, 3, 4, 5

$$= \frac{11}{3}Ab^3 + \frac{17}{3}Bb^3 - \frac{28}{3}Qb^3.$$

Träger 2—2 und 3—3 haben keine Anteile, Träger 4—4 hat den gleichen Anteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ wie Träger 1—1

$$= \frac{11}{3}Ab^3 + \frac{17}{3}Bb^3 - \frac{28}{3}Qb^3.$$

Es ist daher der Gesamtanteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ in Richtung $y—y$

$$= \frac{22}{3}Ab^3 + \frac{34}{3}Bb^3 - \frac{56}{3}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (I')$$

2. $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$.

Da die Träger 2—2 und 3—3 ausscheiden, die Anteile der Träger 1—1 und 4—4 einander gleich sind, so braucht nur jener vom Träger 1—1 berechnet und verdoppelt werden.

Feld 1:

Nach oben ist $Mx = 2\,Qx - Ax - Bx.$

$$\frac{\delta Mx}{\delta B} = -x$$

$$\int_0^b \frac{\delta Mx}{\delta B} Mx\,dx = \int_0^b (-2\,Qx^2 + Ax^2 + Bx^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} Ab^3 + \frac{1}{3} Bb^3 - \frac{2}{3} Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Feld 2:

Nach oben ist $Mx' = 2\,Qb - Ab - Bb + Qx' - Bx'$

$$\frac{\delta Mx'}{\delta B} = -(b + x')$$

$$\int_0^b \frac{\delta Mx'}{\delta B} Mx'\,dx = \int_0^b (2\,Qb - Ab - Bb + Qx' - Bx')\,(-b - x')\,dx$$

$$= \frac{3}{2} Ab^3 + \frac{7}{3} Bb^3 - \frac{23}{6} Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Feld 3:

Nach oben ist $Mx'' = 3\,Qb - Ab - 2\,Bb.$

$$\frac{\delta Mx''}{\delta B} = -2b$$

$$\int_0^b \frac{\delta Mx''}{\delta B} Mx''\,dx = \int_0^b (-6\,Qb^2 + 2\,Ab^2 + 4\,Bb^2)\,dx$$

$$= 2\,Ab^3 + 4\,Bb^3 - 6\,Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{Feld } 4 = \text{Feld } 2 = \frac{3}{2} Ab^3 + \frac{7}{3} Bb^3 - \frac{23}{6} Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\text{Feld } 5 = \text{Feld } 1 = \frac{1}{3} Ab^3 + \frac{1}{3} Bb^3 - \frac{2}{3} Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Daher Gesamtanteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$ in Richtung $y—y = 2\,(\Sigma\, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$= 2\left(\frac{17}{3} Ab^3 + \frac{28}{3} Bb^3 - \frac{45}{3} Qb^3\right) = \underline{\frac{34}{3} Ab^3 + \frac{56}{3} Bb^3 - 30\,Qb^3} \quad (\text{II}')$$

3. $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$.

Der Anteil läßt sich aus I′ ableiten, wenn statt $A-C$, statt $B—D$ eingesetzt wird:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC} = \underline{\frac{22}{3} Cb^3 + \frac{34}{3} Db^3 - \frac{56}{3} Qb^3} \quad \ldots\ldots \quad (\text{III}')$$

4. $\frac{d\mathfrak{A}}{dD}$.

Der Anteil läßt sich aus II' ableiten, wenn für $A-C$, für $B-D$ eingesetzt wird:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD} = \frac{34}{3} Cb^3 + \frac{56}{3} Db^3 - 30\, Qb^3 \quad \ldots \quad \text{(IV')}$$

Zusammenfassung nach Richtung $y-y$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA} = \frac{22}{3} Ab^3 + \frac{34}{3} Bb^3 - \frac{56}{3} Qb^3 \quad \ldots \quad \text{(I')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB} = \frac{34}{3} Ab^3 + \frac{56}{3} Bb^3 - 30 Qb^3 \quad \ldots \quad \text{(II')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC} = \frac{22}{3} Cb^3 + \frac{34}{3} Db^3 - \frac{56}{3} Qb^3 \quad \ldots \quad \text{(III')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD} = \frac{34}{3} Cb^3 + \frac{56}{3} Db^3 - 30 Qb^3 \quad \ldots \quad \text{(IV')}$$

III. Gesamtformänderungsarbeit nach beiden Richtungen.

Die Summen dieser einzelnen Ausdrücke I + I', II + II', III + III' und IV + IV' stellen die Gesamtformänderungsarbeiten dar.

Da die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte der Platte bezw. der einzelnen Träger = 0 gesetzt wird, so muß sein:

$$\text{I} + \text{I}' = 0 \quad \ldots \quad (\alpha)$$

$$\text{II} + \text{II}' = 0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

$$\text{III} + \text{III}' = 0 \quad \ldots \quad (\gamma)$$

$$\text{IV} + \text{IV}' = 0 \quad \ldots \quad (\delta)$$

Wird gleichzeitig für $b = \lambda a$ gesetzt, so lauten diese 4 Gleichungen:

$$\frac{22}{3} A(1+\lambda^3) + \frac{34}{3} C + \frac{34}{3} B\lambda^3 - \frac{56}{3} Q\lambda^3 = 0 \quad \ldots \quad (\alpha)$$

$$\frac{34}{3} A\lambda^3 + B\left(\frac{22}{3} + \frac{56}{3}\lambda^3\right) + \frac{34}{3} D - 30 Q\lambda^3 = 0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

$$\frac{34}{3} A + C\left(\frac{56}{3} + \frac{22}{3}\lambda^3\right) + \frac{34}{3} D\lambda^3 - \frac{56}{3} Q\lambda^3 = 0 \quad \ldots \quad (\gamma)$$

$$\frac{34}{3} B + \frac{34}{3} C\lambda^3 + \frac{56}{3} D(1+\lambda^3) - 30 Q\lambda^3 = 0 \quad \ldots \quad (\delta)$$

Diese 4 Gleichungen genügen zur Bestimmung der 4 Unbekannten A, B, C und D.

IV. Werte der Unbekannten A, B, C, D und der durch sie erzeugten Auflagerdrücke auf die Längs- und Querträger für verschiedene Werte von λ.

Für $\lambda = 1$

gestalten sich die obigen Gleichungen zu:

$$44A + 34C + 34B - 56Q = 0 \quad \ldots \quad (\alpha)$$

$$34A + 78B + 34D - 90Q = 0 \quad \ldots \quad (\beta)$$

$$34A + 78C + 34D - 56Q = 0 \quad \ldots \quad (\gamma)$$

$$34A + 34C + 112D - 90Q = 0 \quad \ldots \quad (\delta)$$

Hieraus ergibt sich:

$$A = 0{,}503\,Q$$
$$B = 0{,}716\,Q$$
$$C = 0{,}280\,Q$$
$$D = 0{,}501\,Q.$$

Der Unterzug von der längeren Seite l kann daher als durch die Einzellasten beansprucht gedacht werden:

I (von Träger I—I herrührend) $= \frac{1}{2}Q + A + C$
$= (0{,}5 + 0{,}503 + 0{,}280)\,Q = 1{,}283\,Q$

II (von Träger II—II herrührend) $= \frac{1}{2}Q + B + D$
$= (0{,}5 + 0{,}716\,Q + 0{,}501)\,Q = 1{,}717\,Q$

III (von Träger III—III herrührend) $= \frac{1}{2}Q + B + D$
$= 1{,}717\,Q$

IV (von Träger IV—IV herrührend) $= \frac{1}{2}Q + A + C$
$= 1{,}283\,Q$

Der Anteil $\frac{1}{2}Q$ rührt von den Lasten der bei der Zerlegung in einzelne Streifen übrig gebliebenen Randstreifen von der Seite $\frac{a}{2}$ her.

In Abb. 7 ist die entsprechende Belastungsfläche aufgetragen. Hierbei sind die Endpunkte der Kräfte geradlinig verbunden, was tatsächlich nicht zutrifft (namentlich gegen die Auflagerpunkte LN zu). Die den Polygonen umschriebenen Kurven erscheinen richtiger.

Belastungsflächen des Längsunterzuges für $\lambda = 1, 2, 4, 6$ bei gleichbleibendem l.

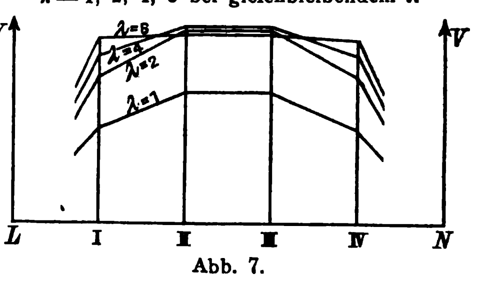


Abb. 7.

Für den Unterzug der kürzeren Seite l_1 sind maßgebend die Ergänzungen zu den Unbekannten A, B, C und D:

$$A' = Q - 0{,}503\,Q = 0{,}497\,Q$$
$$B' = Q - 0{,}716\,Q = 0{,}284\,Q$$
$$C' = Q - 0{,}280\,Q = 0{,}720\,Q$$
$$D' = Q - 0{,}501\,Q = 0{,}499\,Q.$$

Belastungsflächen des Querunterzuges für $\lambda = 1, 2, 4, 6$ bei gleichbleibendem l_1.

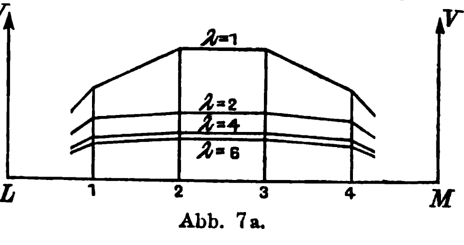


Abb. 7a.

Die den Träger beanspruchenden Einzellasten sind daher

1 (von Träger 1—1 herrührend)
$= \frac{1}{2}Q + A' + B'$
$= (0{,}5 + 0{,}497 + 0{,}284)\,Q$
$= 1{,}281\,Q$

2 (von Träger 2—2 herrührend) $= \frac{1}{2}Q + C' + D'$
$= (0{,}5 + 0{,}720 + 0{,}499)\,Q = 1{,}719\,Q$

$$3 \text{ (von Träger 3—3 herrührend)} = \frac{1}{2} Q + C' + D'$$
$$= (0{,}5 + 0{,}720 + 0{,}499)\, Q = 1{,}719\, Q$$

$$4 \text{ (von Träger 4—4 herrührend)} = \frac{1}{2} Q + A' + B'$$
$$= (0{,}5 + 0{,}497 + 0{,}284)\, Q = 1{,}281\, Q.$$

Die Beanspruchungen sind also, wie zu erwarten, die gleichen, da wir es mit einer quadratischen Platte zu tun haben.

Für die entsprechende Belastungsfläche kann somit gleichfalls Abb. 7 dienen.

Für $\lambda = 2$.

Es lauten die 4 Bestimmungsgleichungen:

$$198A + 34C + 272B - 448Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$
$$272A + 470B + 34D - 720Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$
$$34A + 232C + 272D - 448Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$
$$34B + 272C + 504D - 720Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Hieraus ergibt sich

$$A = 0{,}751Q;\quad B = 1{,}023Q;\quad C = 0{,}618Q \quad \text{und} \quad D = 1{,}026Q.$$

Es erscheint im ersten Augenblick überraschend, daß hierbei Werte auftreten, größer als Q, und doch ist bei der gemachten Annahme der Unverschieblichkeit bezw. des Gleichgewichts der Kreuzpunkte, die hierdurch für die zwei Trägersysteme gleichsam gegenseitige Stützpunkte wie bei kontinuierlichen Trägern darstellen, die Möglichkeit gegeben, daß ein Aufwärtswirken des einen oder anderen Stützpunktes in einer Richtung gegeben ist und daher ein Niederhalten durch den Träger der anderen Richtung mit einer die Größe Q überschreitenden Kraft nötig ist.

Unterzug der längeren Seite l:

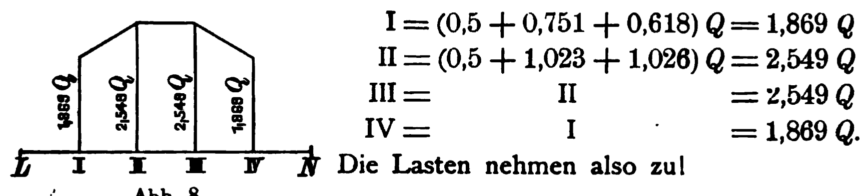


Abb. 8.

$$\text{I} = (0{,}5 + 0{,}751 + 0{,}618)\, Q = 1{,}869\, Q$$
$$\text{II} = (0{,}5 + 1{,}023 + 1{,}026)\, Q = 2{,}549\, Q$$
$$\text{III} = \quad \text{II} \quad = 2{,}549\, Q$$
$$\text{IV} = \quad \text{I} \quad = 1{,}869\, Q.$$

Die Lasten nehmen also zu!

Die Belastungsfläche ist in Abb. 8 aufgetragen und zum besseren Vergleich auch in Abb. 7 eingezeichnet (wobei angenommen ist, daß l unverändert ist bei veränderlichem l_1).

Unterzug der kürzeren Seite l_1:

$$A' = Q - 0{,}751\, Q = +\,0{,}249\, Q$$
$$B' = Q - 1{,}023\, Q = -\,0{,}023\, Q$$
$$C' = Q - 0{,}618\, Q = +\,0{,}382\, Q$$
$$D' = Q - 1{,}026\, Q = -\,0{,}026\, Q.$$

Daher:

$$1 = (0{,}5 + 0{,}249 \quad - 0{,}023)\,Q = 0{,}726\,Q$$
$$2 = (0{,}5 + 0{,}382\,Q - 0{,}026)\,Q = 0{,}856\,Q$$
$$3 = 2 \qquad = 0{,}856\,Q$$
$$4 = 1 \qquad = 0{,}726\,Q$$

Abb. 8a.

Die Lasten nehmen also ab!

Die entsprechende Belastungsfläche ist in Abb. 8a aufgetragen; außerdem ist sie auch in Abb. 7a zum besseren Vergleich eingezeichnet, wobei angenommen ist, daß l_1 unveränderlich, l veränderlich ist.

Für $\lambda = 4$.

Die entsprechenden Gleichungen lauten:

$$1430\,A + 34\,C + 2176\,B - 3584\,Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$
$$2176\,A + 3606\,C + 34\,D - 5760\,Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$
$$34\,A + 1464\,C + 2176\,D - 3584\,Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$
$$34\,B + 2176\,C + 3640\,D - 5760\,Q = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

Hieraus folgert

$$A = 0{,}900\,Q;\; B = 1{,}044\,Q;\; C = 0{,}810\,Q;\; D = 1{,}088\,Q.$$

Unterzug der längeren Seite l:

$$\mathrm{I} = (0{,}5 + 0{,}9 \quad + 0{,}810)\,Q = 2{,}210\,Q$$
$$\mathrm{II} = (0{,}5 + 1{,}044 + 1{,}088)\,Q = 2{,}632\,Q$$
$$\mathrm{III} = \quad \mathrm{II} \quad = 2{,}632\,Q$$
$$\mathrm{IV} = \quad \mathrm{I} \quad = 2{,}210\,Q.$$

Also wiederum eine Zunahme der Lasten, namentlich der mehr gegen die Auflager zu gelegenen.

Die Belastungsfläche ist wiederum in Abb. 9 dargestellt, außerdem auch in Abb. 7 eingetragen.

Unterzug der kürzeren Seite l_1:

$$A' = Q - 0{,}900\,Q = 0{,}100\,Q$$
$$B' = Q - 1{,}044\,Q = -\,0{,}044\,Q$$
$$C' = Q - 0{,}810\,Q = 0{,}190\,Q$$
$$D' = Q - 1{,}088\,Q = -\,0{,}088\,Q.$$

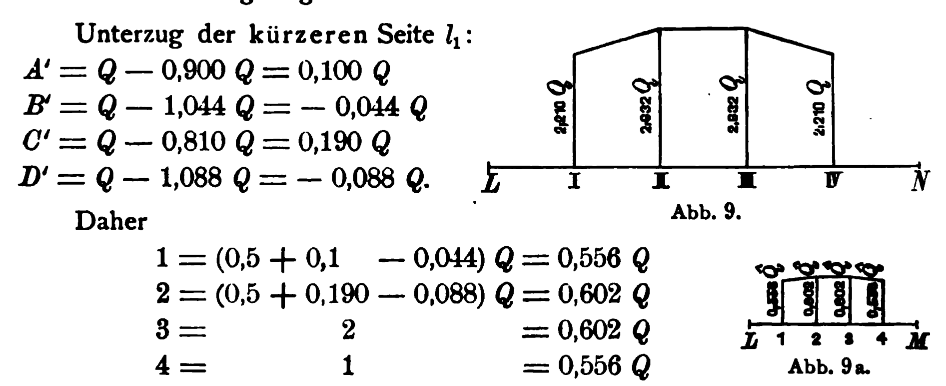


Abb. 9.

Daher

$$1 = (0{,}5 + 0{,}1 \quad - 0{,}044)\,Q = 0{,}556\,Q$$
$$2 = (0{,}5 + 0{,}190 - 0{,}088)\,Q = 0{,}602\,Q$$
$$3 = \quad 2 \quad = 0{,}602\,Q$$
$$4 = \quad 1 \quad = 0{,}556\,Q$$

Abb. 9a.

Also wiederum eine Abnahme.

Die Belastungsfläche zeigt Abb. 9a; außerdem ist sie in Abb. 7a zum Vergleich eingetragen. Sie zeigt sich bereits gegenüber jener des längeren Unterzuges so klein, daß sie vernachlässigt werden kann, d. h. daß nur der längere Unterzug als wirksam auftritt.

Für $\lambda = 6$.

Die 4 Bestimmungsgleichungen lauten:

$$4774\,A + 34\,C + 7\,344\,B - 12\,096\,Q = 0 \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$
$$7344\,A + 12\,118\,B + 34\,D - 19\,440\,Q = 0 \quad . \; . \; . \quad (\beta)$$
$$34\,A + 4\,808\,C + 7\,344\,D - 12\,096\,Q = 0 \quad . \; . \; . \quad (\gamma)$$
$$34\,B + 7\,344\,C + 12\,152\,D - 19\,440\,Q = 0 \quad . \; . \; . \quad (\delta)$$

Hieraus ergibt sich

$$A = 1{,}04\,Q;\; B = 0{,}964\,Q;\; C \doteq 0{,}902\,Q \text{ und } D = 1{,}05\,Q.$$

Unterzug der längeren Seite l:

$$\mathrm{I} = (0{,}5 + 1{,}04 + 0{,}902)\,Q = 2{,}442\,Q$$
$$\mathrm{II} = (0{,}5 + 0{,}964 + 1{,}05)\,Q = 2{,}514\,Q$$
$$\mathrm{III} = \mathrm{II} = 2{,}514\,Q$$
$$\mathrm{IV} = \mathrm{I} = 2{,}442\,Q.$$

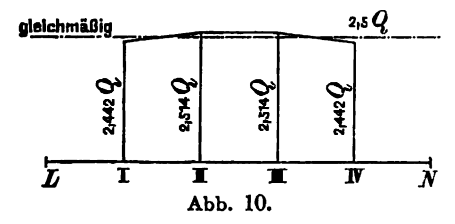


Abb. 10.

Die Lasten gegen das Auflager zu nehmen zu; sie werden mehr und mehr denen in der Mitte gleich; d. h. das Belastungsschema gleicht immer mehr dem der gleichmäßig verteilten Last.

Unterzug der kürzeren Seite l_1:

$$A' = Q - 1{,}04\;Q = -\,0{,}04\;Q$$
$$B' = Q - 0{,}964\,Q = +\,0{,}036\,Q$$
$$C' = Q - 0{,}902\,Q = +\,0{,}098\,Q$$
$$D' = Q - 1{,}059\,Q = -\,0{,}05\;Q.$$

Daher:

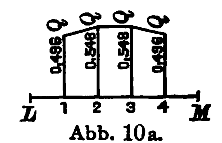


Abb. 10a.

$$1 = (0{,}5 - 0{,}04 + 0{,}036)\,Q = 0{,}496\,Q$$
$$2 = (0{,}5 + 0{,}098 - 0{,}05)\,Q = 0{,}548\,Q$$
$$3 = 2\;Q = 0{,}548\,Q$$
$$4 = 1\;Q = 0{,}496\,Q.$$

Also wiederum eine Abnahme.

V. Folgerungen aus dem Vergleiche der verschiedenen Belastungsflächen.

Der Vergleich der verschiedenen Belastungsflächen zeigt uns, daß für $\lambda = 1$, d. h. für quadratische Platten die Längs- und Querträger gleich beansprucht werden. Die Beanspruchung ist in der Mitte am größten und nimmt gegen die Auflager (Säulen usw.) zu entsprechend ab. Je größer λ wird, d. h. je größer die Langseite l der Schmalseite l_1 gegenüber ist, desto größer und gleichmäßiger wird die Inanspruchnahme der Längsträger gegenüber der der Querträger. Der Einfluß dieser kann daher bei langgestreckten Platten vollständig vernachlässigt werden; es ist hier vollauf berechtigt, die Berechnung nur der Längsträger vorzunehmen in der Weise, daß Schnitte lediglich parallel der Schmalseite geführt werden; die Einzel-

lasten sind in diesem Falle (bei 5 Schnitten) $= \frac{1}{2} 4\,Q + 0{,}5\,Q = \mathbf{2{,}5\,Q}$, also annähernd gleich den für $\lambda = 4, 6$ gefundenen Werten der Längsträger. Dieses Resultat entspricht auch den Bachschen Versuchen bei rechteckigen, langgestreckten Platten.

Solche Platten wirken wie Träger. Hierauf wurde bereits bei der Plattenberechnung im I. Abschnitt hingewiesen.

B. Platte als eingespannt angenommen.

Die Art des Überganges der Platte zur Auflagerstelle ist eine verschiedene. Eine lediglich in Mauern und Wänden eingreifende Platte ohne Unterzüge, oder auch die Außenfelder einer einen größeren Raum kassettenartig überspannenden Platte werden sich mehr dem Zustand der „freien Auflagerung“ nähern. Die Platten der Innenfelder (mit den Trägern in einem Zuge hergestellt) werden der „Einspannung“ näherkommen. Vollständige Einspannung ist aber auch hier nicht gegeben im Hinblick auf die Nachgiebigkeit der Unterzüge und das verschiedenartige Verhalten dieser der Platte gegenüber, je nachdem ungleich große oder ungleich stark belastete Felder zusammenstoßen, Schwindrisse usw. gegeben sind. Für gewöhnlich wird ein Zustand zwischen diesen beiden Grenzfällen der freien Auflagerung und der völligen Einspannung, also teilweise Einspannung gegeben sein.

Es soll nunmehr — wenn auch kurz — die Untersuchung für den Zustand der völligen Einspannung vorgenommen werden.

Wenn auch von vornherein schon erwartet werden kann, daß keine oder nur eine geringe Änderung auf unsere Resultate eintreten werde, da wir es ja lediglich mit der Bestimmung der Auflagerkräfte zu tun haben und diese bei einer gleichmäßigen Belastung ähnlich wie beim Träger von dem Zustand der Auflagerung — ob frei oder eingespannt — unabhängig sind, so erscheint dies doch — schon der Vollständigkeit wegen — nötig.

I. Formänderungsarbeit in Richtung x—x.

Es tritt hier bei den verschiedenen Trägern zu der Auflagerkraft V ($= A + C$ für Träger I—I) noch ein Einspannmoment hinzu

$M s$ ($= -\frac{2}{5}\,a\,(2\,A + 3\,C)$ für Träger I—I).

Dieses Moment Ms wird, wenn wiederum zunächst die geringe Last $^1/_2\,Q$ der Hälften der Außenfelder vernachlässigt wird, gefunden, wie folgt:

$\mathfrak{A}'$ bedeute die Formänderungsarbeit des eingespannten Trägers.

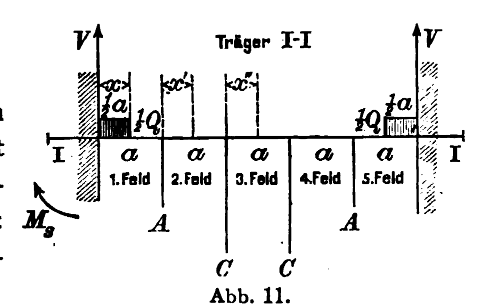


Abb. 11.

Es ist nach Castigliano

$$\frac{d\mathfrak{A}'}{d\,Ms} = 0 = 2\cdot\Bigg[\underbrace{\int_{x=0}^{x=a}\frac{\partial\,Mx}{\partial\,Ms}\,Mx\,dx}_{\text{I. Feld}} + \underbrace{\int_{x'=0\,(x=a)}^{x'=a\,(x=2a)}\frac{\partial\,M'x}{\partial\,Ms}\,M'x\,dx}_{\text{II. Feld}} + \underbrace{\int_{x''=0}^{x''=\frac{a}{2}}\frac{\partial\,Mx''}{\partial\,Ms}\,Mx''\,dx}_{\text{III. Feld}}\Bigg]$$

1. Feld:

$$Mx = Ms + Vx;\quad \frac{\partial Mx}{\partial Ms} = 1;\quad \int_{x=0}^{x=a}\frac{\partial Mx}{\partial Ms}\,Mx\,dx = \int_{x=0}^{x=a}(Ms + Vx)\,dx$$

$$= Ms\cdot a + \frac{Aa^2}{2} + \frac{Ca^2}{2}.$$

2. Feld:

$$Mx' = Ms + V\cdot(a + x') - Ax';\quad \frac{\partial Mx'}{\partial Ms} = 1;\quad \int_{x=a}^{x=2a}\frac{\partial Mx'}{\partial Ms}\,Mx'\,dx$$

$$= \int_{x=a\,(x'=0)}^{x=2a\,(x'=a)}[Ms + V\cdot(a + x') - Ax']\,dx = Ms\cdot a + Aa^2 + \frac{3}{2}\,Ca^2.$$

3. Feld:

$$Mx'' = Ms + V\cdot(2a + x'') - A\,(a + x'') - Cx'';\quad \frac{\partial Mx''}{\partial Ms} = 1$$

$$\int_{x''=0}^{x''=\frac{a}{2}}\frac{\partial Mx''}{\partial Ms}\,Mx''\,dx = \int_{x''=0}^{x''=\frac{a}{2}}[Ms + V\,(2a + x'') - A\,(a + x'') - Cx'']\,dx$$

$$= Ms\,\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,Aa^2 + Ca^2;$$

daher

$$\frac{d\mathfrak{A}'}{dMs} = 2\left(2\,Ms\cdot a + \frac{Aa^2}{2} + \frac{Ca^2}{2} + Ms\cdot a + Aa^2 + \frac{3}{2}\,Ca^2 + \frac{Msa}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,Aa^2 + Ca^2\right) = 5\,Msa + 2\,(2\,Aa^2 + 3\,Ca^2) = 0;$$

hieraus der oben angegebene Wert

$$Ms = -\frac{2}{5}\,a\,(2\,A + 3\,C).$$

Dieses Einspannmoment wird eine gegenseitige Verdrehung der Unterstützungsträger verursachen, zum Teil aber durch die Einmauerung der Träger oder die Säulen aufgehoben werden; auf die Biegungsbeanspruchung der Träger dürfte es aber ohne merklichen Einfluß bleiben.

Die weitere Untersuchung erfolgt analog der der frei aufliegenden Platte.

Feld 1 des Trägers I—I (s. Abb. 11):

$$Mx = Ms + Va = -\frac{2}{5}\,a\,(2\,a + 3\,C) + (A + C)\,x = \left(-\frac{4}{5}\,a + x\right)A$$

$$-\frac{6}{5}\,aC + Cx;$$

daher ist

$$\frac{\partial Mx}{\partial A} = x - \frac{4}{5}a$$

und

$$\int \frac{\partial Mx}{\partial A} \cdot Mx\,dx = \int_0^a A\left(-\frac{4}{5}a + x\right)^2 - C\left(\frac{6}{5}a + x\right)\left(x - \frac{4}{5}a\right)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{16}{25}Aa^2 - \frac{8}{5}axA + Ax^2 - \frac{6}{5}axC + x^2C + \frac{24}{25}a^2C - \frac{4}{5}Cxa\right)dx$$

$$= \frac{13}{75}Aa^3 + \frac{22}{75}Ca^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Feld 2 des Trägers I—I:

$$Mx' = Ms + V(a + x') - Ax' = -\frac{2}{5}a(2A + 3C)$$

$$+ (A + C)(a + x') - Ax' = \frac{1}{5}Aa - C\left(\frac{1}{5}a - x'\right),$$

daher

$$\frac{\partial Mx'}{\partial A} = \frac{1}{5}a$$

und

$$\int_{x=a}^{x=2a} \frac{\partial Mx'}{\partial A} \cdot Mx'dx = \int_{x=a}^{x=2a} \left[\frac{1}{25}Aa^2 - C\left(\frac{1}{5}a - x\right)\frac{1}{5}a\right]dx$$

$$= \frac{1}{25}Aa^3 + \frac{3}{50}a^3C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Feld 3 des Trägers I–I:

$$Mx'' = Ms + V(2a + x'') - A(a + x'') - Cx = -\frac{2}{5}a(2A + 3C)$$

$$+ (A + C)(2a + x'') - A(a + x'') - Cx'' = \frac{1}{5}Aa + \frac{4}{5}Ca$$

$$\frac{\partial Mx''}{\partial A} = \frac{1}{5}a$$

$$\int_{x=2a}^{x=3a} \frac{\partial Mx''}{\partial A} \cdot Mx''dx = \int_{x=2a}^{x=3a} \left(\frac{1}{25}Aa^2 + \frac{4}{25}Ca^2\right)dx = \frac{1}{25}Aa^3 + \frac{4}{25}Ca^3 \quad (3)$$

Feld 4 des Trägers I—I = Feld 2 des Trägers I—I, wegen der Symmetrie, daher

$$\int_{x=3a}^{x=4a} \frac{\partial Mx'''}{\partial A} Mx'''\,dx = \frac{1}{25}Aa^3 + \frac{3}{50}Ca^3 \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Feld 5 des Trägers I—I = Feld 1 des Trägers I—I, wegen der Symmetrie, daher

$$\int_{x=4a}^{x=5a} \frac{\partial Mx''''}{\partial A} Mx''''\,dx = \frac{13}{75}Aa^3 + \frac{22}{75}Ca^3 \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Der Anteil des Trägers I—I an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ ist daher $=\Sigma$-Ausdrücke (1, 2, 3, 4, 5)

$$= \frac{7}{15} Aa^3 + \frac{13}{15} Ca^3.$$

Die Träger II—II und III—III haben keinen Anteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$, da die Unbekannte A hier nicht vorkommt.

Träger IV—IV hat den gleichen Anteil wie Träger I—I

$$= \frac{7}{15} Aa^3 + \frac{13}{15} Ca^3.$$

Es ist daher der Gesamtanteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dA}$ in der Richtung x—x

$$= + \frac{14}{15} Aa^3 + \frac{26}{15} Ca^3 \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

II. $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$.

Die Träger I—I und IV—IV geben keinen Anteil hierzu, da bei ihnen die Unbekannte B nicht vorkommt.

Für Träger II—II und III—III wird nach derselben Ableitung wie oben gefunden:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB} = \frac{7}{15} Ba^3 + \frac{13}{15} Da^3 \quad \left(\begin{array}{l}\text{statt } A \text{ tritt die Unbekannte } B \\ \quad ,, \quad C \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad D\end{array} \text{ ein}\right),$$

daher wird der Gesamtanteil an $\frac{d\mathfrak{A}}{dB}$ in der Richtung x—x

$$= + \frac{14}{15} Ba^3 + \frac{26}{15} Da^3 \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

III. $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$.

Es scheiden wiederum aus die Träger II—II und III—III, da hier die Unbekannte C nicht vorhanden.

Träger I—I.

1. Feld:

$$Mx = \left(-\frac{4}{5}a + x\right) A + \left(x - \frac{6}{5}a\right) C$$

$$\frac{\delta Mx}{\delta C} = \left(x - \frac{6}{5}a\right)$$

und daher

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{\delta Mx}{\delta C} \cdot Mx\,dx = \int_{x=0}^{x=a} \left(-\frac{4}{5}a + x\right)\left(x - \frac{6}{5}a\right) A + \left(x - \frac{6}{5}a\right)^2 C$$

$$= \frac{22}{75} Aa^3 + \frac{43}{75} Ca^3 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

2. Feld:

$$Mx' = \frac{1}{5} Aa - C\left(\frac{1}{5} a - x'\right)$$

$$\frac{\delta Mx'}{\delta C} = \left(x' - \frac{1}{5} a\right)$$

und daher

$$\int\limits_{x=a}^{x=2a} \frac{\delta Mx'}{\delta C} Mx' dx = \int\limits_{x=a}^{x=2a} \left[\frac{1}{5} Aa\left(x' - \frac{1}{5} a\right) + C\left(x - \frac{1}{5} a\right)^2\right] dx$$

$$= \frac{5}{30} Aa^3 + \frac{13}{75} Ca^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

3. Feld:

$$Mx'' = \frac{1}{5} Aa + \frac{4}{5} Ca$$

$$\frac{\delta Mx''}{\delta C} = + \frac{4}{5} a$$

und daher

$$\int\limits_{x=2a}^{x=3a} \frac{\delta Mx''}{\delta C} Mx'' dx = \int\limits_{x=2a}^{x=3a} \left(\frac{4}{25} Aa^2 + \frac{16}{25} Ca^2\right) dx$$

$$= \frac{4}{25} Aa^3 + \frac{16}{25} Ca^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

4. Feld wie im 2. Feld:

$$\int\limits_{x=3a}^{x=4a} \frac{\delta Mx'''}{\delta C} Mx''' dx = \frac{3}{50} Aa^3 + \frac{13}{75} Ca^3 \quad \ldots \quad (4)$$

5. Feld wie im 1. Feld:

$$\int\limits_{x=4a}^{x=5a} \frac{\delta Mx''''}{\delta C} Mx'''' dx = \frac{22}{75} Aa^3 + \frac{43}{75} Ca^3 \quad \ldots \quad (5)$$

Daher wird der Anteil des Trägers I—I an $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$ in Richtung $x—x$

$$= \Sigma\text{-Ausdrücke } (1, 2, 3, 4, 5) = \underline{\frac{13}{15} Aa^3 + \frac{32}{15} Ca^3.}$$

Denselben Anteil hat der Träger IV—IV und daher:

Der Gesamtanteil $\frac{d\mathfrak{A}}{dC}$ in der Richtung $x—x$

$$\underline{= \frac{26}{15} Aa^3 + \frac{64}{15} Ca^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

IV. $\frac{d\mathfrak{A}}{dD}$.

Dieser Anteil in Richtung $x—x$ läßt sich aus III ableiten, es braucht nur für A die Unbekannte B und für C die Unbekannte D gesetzt werden.

Daher $\dfrac{d\mathfrak{A}}{dD}$ in Richtung $x-x$

$$=\frac{26}{15}Ba^3+\frac{64}{15}Da^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Zusammenfassung nach Richtung $x-x$:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA}=\frac{14}{15}Aa^3+\frac{26}{15}Ca^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB}=\frac{14}{15}Ba^3+\frac{26}{15}Da^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC}=\frac{26}{15}Aa^3+\frac{64}{15}Ca^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD}=\frac{26}{15}Ba^3+\frac{64}{15}Da^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

II. Formänderungsarbeit in Richtung $y-y$ (Abb. 12).

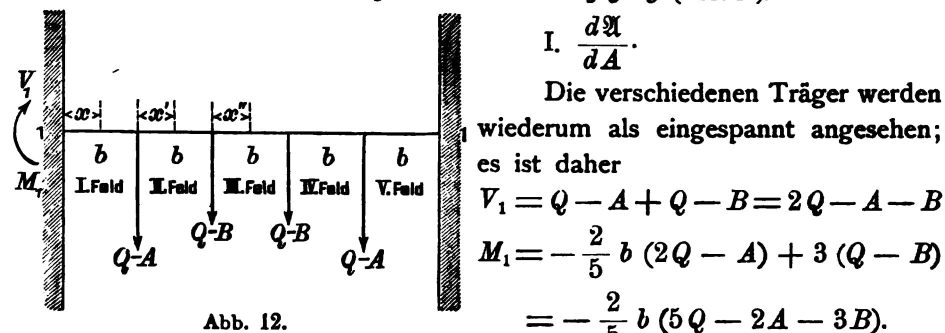


Abb. 12.

I. $\dfrac{d\mathfrak{A}}{dA}$.

Die verschiedenen Träger werden wiederum als eingespannt angesehen; es ist daher

$$V_1=Q-A+Q-B=2Q-A-B$$

$$M_1=-\frac{2}{5}b\,(2Q-A)+3\,(Q-B)$$

$$=-\frac{2}{5}b\,(5Q-2A-3B).$$

Nach genau der gleichen Ableitung ergibt sich nach Richtung $y-y$:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA}=\frac{14}{15}Ab^3+\frac{26}{15}Bb^3-\frac{8}{3}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{(I')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB}=\frac{26}{15}Ab^3+\frac{64}{15}Bb^3-6Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{(II')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC}=\frac{14}{15}Cb^3+\frac{26}{15}Db^3-\frac{8}{3}Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{(III')}$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD}=\frac{26}{15}Cb^3+\frac{64}{15}Db^3-6Qb^3 \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV')}$$

III. Gesamtformänderungsarbeit nach beiden Richtungen.

Die Summen dieser einzelnen Ausdrücke nach beiden Richtungen $x-x$ und $y-y$ müssen nach dem Satze von Castigliano $=0$ sein; es ergeben sich hieraus 4 Gleichungen

$$\text{I}+\text{I}'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\text{II}+\text{II}'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$\text{III}+\text{III}'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

$$\text{IV}+\text{IV}'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

aus denen die 4 Unbekannten A, B, C und D gefunden werden können.

Setzt man gleichzeitig für $b = \lambda a$, so lauten diese 4 Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dA} = \frac{14}{15} A a^3 + \frac{26}{15} C a^3 + \frac{14}{15} A \lambda^3 a^3 + \frac{26}{15} B \lambda^3 a^3 - \frac{8}{3} Q \lambda^3 a^3$$

$$= \frac{14}{15} A (1 + \lambda^3) + \frac{26}{15} C + \frac{26}{15} B \lambda^3 - \frac{8}{3} Q \lambda^3 = 0 \;.\;. \quad (\alpha)$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dB} = \frac{14}{15} B a^3 + \frac{26}{15} D a^3 + \frac{26}{15} A \lambda^3 a^3 + \frac{64}{15} B \lambda^3 a^3 - 6 Q \lambda^3 a^3$$

$$= B\left(\frac{14}{15} + \frac{64}{15}\lambda^3\right) + \frac{26}{15} A \lambda^3 + \frac{26}{15} D - 6 Q \lambda^3 = 0 \;.\;. \quad (\beta)$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dC} = \frac{26}{15} A a^3 + \frac{64}{15} C a^3 + \frac{14}{15} C \lambda^3 a^3 + \frac{26}{15} D \lambda^3 a^3 - \frac{8}{3} Q \lambda^3 a^3$$

$$= \frac{26}{15} A + C\left(\frac{64}{15} + \frac{14}{15}\lambda^3\right) + \frac{26}{15} D \lambda^3 - \frac{8}{3} Q \lambda^3 = 0 \;. \quad (\gamma)$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dD} = \frac{26}{15} B a^3 + \frac{64}{15} D a^3 + \frac{26}{15} C \lambda^3 a^3 + \frac{64}{15} D \lambda^3 a^3 - 6 Q \lambda^3 a^3$$

$$= \frac{26}{15} B + C \frac{26}{15} \lambda^3 + \frac{64}{15} D (1 + \lambda^3) - 6 Q \lambda^3 = 0 \;.\;. \quad (\delta)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten können wir wie oben vorgehen, oder diese aus den allgemeinen, nach mehrfachen Umrechnungen sich ergebenden Formen finden:

$$A = Q \frac{20{,}8 + 61\,931{,}2\,\lambda^3 + 282\,163{,}2\,\lambda^6 + 230\,724{,}8\,\lambda^9 + 10\,472\,\lambda^{12}}{14\,(1 + \lambda^3)\,(779{,}2 + 20\,156\,\lambda^3 + 20\,124{,}8\,\lambda^6 + 748\,\lambda^9)}$$

$$B = Q \cdot \lambda^3 \frac{12\,128{,}8 + 21\,427{,}2\,\lambda^3 + 748\,\lambda^6}{779{,}2 + 20\,156\,\lambda^3 + 20\,124{,}8\,\lambda^6 + 748\,\lambda^9}$$

$$C = Q \frac{8028\,\lambda^6 + 660\,\lambda^9 - 1183{,}2\,\lambda^3 - 0{,}8}{779{,}2 + 20\,156\,\lambda^3 + 20\,124{,}8\,\lambda^6 + 748\,\lambda^9}$$

$$D = Q \frac{176 - 112\,838{,}4\,\lambda^3 - 1\,513\,408\,\lambda^6 + 7\,432\,374{,}4\,\lambda^9 + 9\,122\,288\,\lambda^{12} + 289\,520\,\lambda^{15}}{364\,\lambda^3\,(1 + \lambda^3)\,(779{,}2 + 20\,156\,\lambda^3 + 20\,124{,}8\,\lambda^6 + 748\,\lambda^9)}$$

Wir gehen nunmehr zu bestimmten Werten von λ über.

1. Werte von A:

für $\lambda = 1$ wird A aus obiger Gleichung $= 0{,}50\,Q$
„ $\lambda = 2$ „ A „ „ „ $= 0{,}78\,Q$
„ $\lambda = 4$ „ A „ „ „ $= 0{,}93\,Q$
„ $\lambda = 6$ „ A „ „ „ $= 0{,}975\,Q$,

d. h. A wächst mit der Zunahme der Seitenlänge l gegenüber l_1.

2. Werte von B:

für $\lambda = 1$ wird B aus obiger Gleichung $= 0{,}82\,Q$
„ $\lambda = 2$ „ B „ „ „ $= 1{,}01\,Q$
„ $\lambda = 4$ „ B „ „ „ $= 1{,}02\,Q$
„ $\lambda = 6$ „ B „ „ „ $= 1{,}00\,Q$.

3. Werte von C:

für $\lambda = 1$ wird C aus obiger Gleichung $= 0{,}18\ Q$
„ $\lambda = 2$ „ C „ „ „ $= 0{,}46\ Q$
„ $\lambda = 4$ „ C „ „ „ $= 0{,}74\ Q$
„ $\lambda = 6$ „ C „ „ „ $= 0{,}83\ Q$.

C nimmt mit zunehmendem λ zu.

4. Werte von D:

für $\lambda = 1$ wird D aus obiger Gleichung $= 0{,}5\ Q$
„ $\lambda = 2$ „ D „ „ „ $= 1{,}05\ Q$
„ $\lambda = 4$ „ D „ „ „ $= 1{,}09\ Q$
„ $\lambda = 6$ „ D „ „ „ $= 1{,}07\ Q$.

C. Vergleichende Zusammenstellung.

$\lambda =$	Platte frei aufliegend				Platte eingespannt			
	A	B	C	D	A	B	C	D
1	0,50 Q	0,72 Q	0,28 Q	0,50 Q	0,50 Q	0,82 Q	0,18 Q	0,5 Q
2	0,75 Q	1,02 Q	0,62 Q	1,03 Q	0,78 Q	1,01 Q	0,46 Q	1,05 Q
4	0,90 Q	1,04 Q	0,81 Q	1,09 Q	0,93 Q	1,02 Q	0,74 Q	1,09 Q
6	1,04 Q	0,96 Q	0,90 Q	1,05 Q	0,98 Q	1,00 Q	0,83 Q	1,07 Q

Wie zu erwarten war, sind die Differenzen geringe, zumeist jedenfalls in der Ungenauigkeit bezw. Verschiedenheit der Rechnung gelegen. Auf die Endresultate (Spannungen in den Trägern) haben sie jedenfalls keinen merklichen Einfluß; wir führen daher die weiteren Untersuchungen an Hand der für die frei aufliegende Platte gefundenen Resultate.

III. Abschnitt.

Berechnung der Unterzüge. Einführung stellvertretender gleichmäßiger Lasten.

Die Berechnung der Unterzüge kann in der gewöhnlichen Weise geschehen unter Zugrundelegung der im vorigen Abschnitt gefundenen Einzellasten I, II, III, IV bezw. 1, 2, 3, 4, wobei zu beurteilen ist, ob die Träger als frei aufliegend, ganz oder teilweise eingespannt oder kontinuierlich wirkend anzunehmen sind.

Zweckmäßig erscheint es, die Wirkung dieser Einzellasten durch jene einer gleichmäßig verteilten Last zu ersetzen, weil es hierdurch möglich ist,

allgemeine, für die Praxis leicht verwendbare Beziehungen der Inanspruchnahmen der Träger als Funktionen der Plattendimensionen und Belastung herzustellen.

Es werde wie folgt vorgegangen.

A. Längsträger.

$\lambda = 1.$

Nach früher ist:

$$\begin{aligned} \text{Kraft} \quad \text{I} &= 1{,}28\, Q \\ \text{,,} \quad \text{II} &= 1{,}72\, Q \\ \text{,,} \quad \text{III} &= 1{,}72\, Q \\ \text{,,} \quad \text{IV} &= 1{,}28\, Q. \end{aligned}$$

$$\text{Moment in} \quad \text{I} = \frac{3\, Q \cdot l}{5} = \mathbf{0{,}6\, Q \cdot l}$$

$$\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{II} = \frac{3\, Q \cdot 2 \cdot l}{5} - 1{,}28 \cdot \frac{Q \cdot l}{5} = \mathbf{0{,}944\, Q\, l}$$

$$\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{III} = \text{dem in II} = \mathbf{0{,}944\, Q\, l}$$

$$\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{IV} = \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{I} = \mathbf{0{,}6\, Q\, l}.$$

Diese Momente, in Abb. 13 aufgetragen, geben ein Polygon. Ersetzen wir die Einzellasten durch eine gleichmäßig verteilte Last π für eine Längeneinheit des Trägers, so tritt statt des Polygons eine Parabel auf, so zwar, daß die Ordinate in der Mitte die gleiche ist, also Moment in der Mitte durch die ersetzende gleichmäßige Last π

$$= \frac{\pi \cdot l^2}{8} = 0{,}944\, Q\, l;$$

hieraus

$$\pi = \frac{7{,}552\, Q\, l}{l^2} = \frac{7{,}552\, Q}{l}.$$

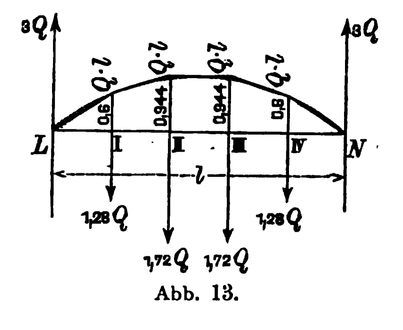


Abb. 13.

Die Gesamtlast auf dem Träger ist daher 7,552 Q.

$$\text{Auflagerreaktion durch } \pi \quad . \quad . \quad . \quad = 3{,}776\, Q$$

$$\text{Moment in I durch } \pi = \frac{3{,}776 \cdot Q \cdot l}{5} - \frac{7{,}552\, Q \cdot l \cdot l}{l \cdot 5 \cdot 10} = 0{,}60\, Q\, l.$$

Es ist demnach das Moment auch in I durch die Last $\pi =$ jenem durch die Einzellasten.

Das Momentenpolygon ist durch eine Parabel ersetzt.

Der Träger ist hierbei als frei aufliegend angenommen, um diesen Ersatz zu erreichen; mit der erhaltenen gleichmäßig verteilten Last π ist natürlich auch zu rechnen, wenn der Träger ganz oder teilweise eingespannt sein sollte $\left(\frac{\pi \cdot l^2}{24} \text{ bezw. } \frac{\pi \cdot l^2}{10} \text{ in der Mitte}\right)$.

Gewöhnlich ist die Auflast der Platte als gleichmäßig verteilte Last für eine Flächeneinheit der Platte gegeben, also mit p/m^2

$$Q = a \cdot b \cdot p = \frac{l_1}{5} \frac{\lambda l_1}{5} p = \frac{\lambda \cdot l_1^2}{25} p.$$

Es wird demnach

$$\pi_1 = \frac{7{,}552}{l} Q = \frac{7{,}552 \cdot \lambda \cdot l_1^2}{l \cdot 25} p = \frac{7{,}552 \cdot \lambda l_1^2 p}{25 \cdot \lambda l_1} = \mathbf{0{,}302}\, l_1 p.$$

$\lambda = 2.$

$$\begin{aligned} \text{Kraft } \ \mathrm{I} &= 1{,}869\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{II} &= 2{,}549\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{III} = \mathrm{II} &= 2{,}549\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{IV} = \mathrm{I} &= 1{,}869\, Q, \end{aligned}$$

Das größte zu ersetzende Moment ist unter Kraft II bezw. III also in Mitte.

Ersatz durch die gleichmäßige Last wie oben

$$\pi_2 = \frac{8}{l} \cdot \frac{Q}{5} (2 \cdot 4{,}418 - 1{,}869) = \frac{8 \cdot 1{,}393}{25} l_1 p = \mathbf{0{,}445}\, l_1 p.$$

$\lambda = 4.$

$$\begin{aligned} \text{Kraft } \ \mathrm{I} &= 2{,}210\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{II} &= 2{,}632\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{III} = \mathrm{II} &= 2{,}632\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{IV} = \mathrm{I} &= 2{,}210\, Q, \end{aligned}$$

Das größte zu ersetzende Moment ist wiederum in der Mitte.

Ersatz durch die gleichmäßige Last

$$\pi_4 = \frac{8}{l} \cdot \frac{Q}{5} (4{,}842 \cdot 2 - 2{,}210) = \frac{8 \cdot 1{,}494}{25} l_1 p = \mathbf{0{,}478}\, l_1 p.$$

$\lambda = 6.$

$$\begin{aligned} \text{Kraft } \ \mathrm{I} &= 2{,}442\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{II} &= 2{,}514\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{III} = \mathrm{II} &= 2{,}514\, Q \\ \text{,, } \ \mathrm{IV} = \mathrm{I} &= 2{,}442\, Q, \end{aligned}$$

Das größte zu ersetzende Moment ist in der Mitte.

$$\pi_6 = \frac{8}{l} \cdot \frac{Q}{5} (4{,}956 \cdot 2 - 2{,}442) = \frac{8 \cdot 1{,}494}{25} l_1 p = \mathbf{0{,}478}\, l p.$$

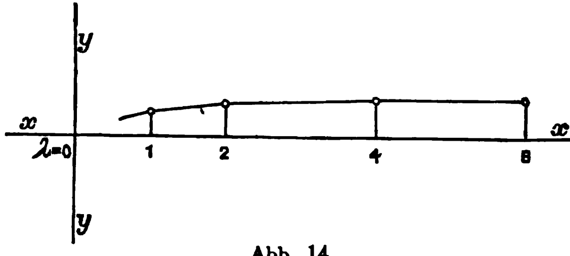


Abb. 14.

Setzen wir statt π allgemein q; um nun allgemein für λ einen Ausdruck zu erhalten als Funktion zwischen q, λ, l und p, tragen wir auf der x-Achse eines Koordinatensystems die Werte von λ und auf die y-Achse die zugehörigen Werte von q (π_1, π_2, π_4 und π_6) auf.

Die Kurve (Abb. 14) erinnert in ihrem Verlauf von $\lambda = 1$ ab an die Momentenkurven für die doppelt armierte Platte; anderseits erscheint es wünschenswert, eine ähnliche Formel wie dort zu erhalten, also von der Form

$$q = f_{(\lambda)} = K \cdot \frac{(\lambda + c)^2}{1 + (\lambda + d)^2} - = \text{allgemein } K \cdot \frac{\lambda^2 + m\,\lambda + c_1^2}{\lambda^2 + n\,\lambda + d_1^2};$$

und in der Tat wählt man für K den Wert 0,49, für m den Wert 1,35, für c_1 den Wert 0, desgleichen für $d_1 = 0$ und für n den Wert $= 1$, so wird

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35\,\lambda + \lambda^2)}{1{,}6 + \lambda + \lambda^2}$$

und diese Gleichung gibt für Werte $\lambda > 1$ gut übereinstimmende Werte für q, wie die folgende Gegenüberstellung zeigt:

für $\lambda =$	Werte oben berechnet	Werte aus der Gleichung
1	$0{,}302\ l_1\,p$	$0{,}319\ l_1\,p$
2	$0{,}445\ l_1\,p$	$0{,}432\ l_1\,p$
4	$0{,}478\ l_1\,p$	$0{,}485\ l_1\,p$
6	$0{,}478\ l_1\,p$	$0{,}495\ l_1\,p$

Man sieht auch hieraus, daß bei Zunahme von λ der Wert sich immer mehr und mehr dem Wert $0{,}5\ l_1\,p$ nähert, d. h. bei langgestreckten Platten werden die zwei Längsbalken nahezu alles aufzunehmen haben, während die Querbalken soviel wie keinen Anteil haben; hier tritt also die übliche Berechnung ein. In dem Falle einer sehr langgestreckten, schmalen Platte, bei der also die zwei Längsträger gleichsam in einen verschmelzen, geht die Platte in den Träger über mit einer Aufnahme von

$$q = 2 \cdot 0{,}5\ l_1\,p = 1{,}0\ l_1\,p,$$

wie es ja auch sein muß.

Die Differenzen zwischen den berechneten und aus der Gleichung sich ergebenden Werten haben an sich auf das Endresultat keinen Einfluß. Die Gleichung ist so gewählt, daß die sich hieraus ergebenden Werte auch jenen für die eingespannte Platte nahekommen; diese sind:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}313 \\ \pi_2 &= 0{,}442 \\ \pi_4 &= 0{,}477 \\ \pi_6 &= 0{,}480 \end{aligned}\right\} \cdot l_1\,p.$$

Es kann daher ausgesprochen werden:

Wird eine rechteckige, nach beiden Richtungen gleich armierte Eisenbetonplatte von den Seitenlängen l und l_1 von einer gleichmäßig verteilten Belastung (p kg/m²) beansprucht, so werden die Unterstützungsträger an der längeren Seite l (Längsträger) so in Angriff genommen,

als ob sie eine gleichmäßig verteilte Last q (für 1 lfd. m) aufnehmen von dem Werte

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35\,\lambda + \lambda^2)}{1{,}6 + \lambda + \lambda^2}\, l_1\, p \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

λ ist dabei das Verhältnis der längeren Seite l zur kürzeren Seite l_1, also stets > 1.

Die verschiedenen gemachten Annahmen beeinflussen zum Teil das Resultat im positiven, zum Teil im negativen Sinne; es wird also eine teilweise Kompensation eintreten; wir können auch dieses Resultat als „Durchschnittsresultat" auffassen.

B. Querträger.

$\lambda = 1$.

Nach früher ist Kraft $1 = 1{,}28\ Q$
„ $2 = 1{,}72\ Q$
„ $3 = 1{,}72\ Q$
„ $4 = 1{,}28\ Q$,

größtes Moment unter Kraft 2 bezw. 3 bezw. in Mitte.

Die dasselbe größte Moment erzeugende gleichmäßig verteilte Last

$$\pi_1' = \frac{7{,}552\, l_1\, l}{l_1 \cdot 25}\, p = \mathbf{0{,}302}\, \boldsymbol{lp} = \pi_1.$$

$\lambda = 2$.

Kraft $1 = 0{,}726\ Q$
„ $2 = 0{,}856\ Q$
„ $3 = 0{,}856\ Q$
„ $4 = 0{,}726\ Q$,

größtes Moment in der Mitte.

Gleichmäßig verteilte Last $\pi_2' = \frac{8}{l_1}\,\frac{Q}{5}\,(2 \cdot 1{,}582 - 0{,}726)$

$$= \frac{8 \cdot 0{,}488}{25}\, lp = \mathbf{0{,}16}\, \boldsymbol{lp}.$$

$\lambda = 4$.

Kraft $1 = 0{,}556\ Q$
„ $2 = 0{,}602\ Q$
„ $3 = 0{,}602\ Q$
„ $4 = 0{,}556\ Q$,

größtes Moment in der Mitte.

Gleichmäßig verteilte Last $\pi_4' = \frac{8}{l_1}\,\frac{Q}{5}\,(2 \cdot 1{,}158 - 0{,}556)$

$$= \frac{8 \cdot 0{,}352}{25}\, lp = \mathbf{0{,}113}\, \boldsymbol{lp}.$$

$\lambda = 6$.

Kraft $1 = 0{,}496\ Q$
„ $2 = 0{,}548\ Q$
„ $3 = 0{,}548\ Q$
„ $4 = 0{,}496\ Q$,

größtes Moment in der Mitte.

Gleichmäßig verteilte Last $\pi_6' = \frac{8}{l_1} \frac{Q}{5} (2 \cdot 1{,}044 - 0{,}496)$

$$= \frac{8 \cdot 0{,}318}{25} lp = \mathbf{0{,}102}\, lp.$$

Legt man die für die eingespannte Platte gefundenen Werte zugrunde, so ergeben sich die entsprechenden Größen

$$\left.\begin{aligned} \pi_1' &= 0{,}309 \\ \pi_2' &= 0{,}172 \\ \pi_4' &= 0{,}121 \\ \pi_6' &= 0{,}110 \end{aligned}\right\} lp.$$

Um auch hier allgemein für λ einen entsprechenden Ausdruck von q (π') zu erhalten, tragen wir wiederum die erhaltenen Werte von π' als Ordinaten für die verschiedenen Werte von λ als Abszissen in einem Koordinatensystem auf (Abb. 15, zur besseren Darstellung verzerrt gezeichnet).

Man erkennt, daß der erhaltene Kurvenzweig $ABCD$ wiederum an die für die Plattenmomente erhaltenen Kurven erinnert, insofern als er sich gegenüber einer um a verschobenen x'-Achse gleichsam als eine solche, nur nach unten gelegte (zur x'-Achse symmetrische) Momentenkurve darstellt.

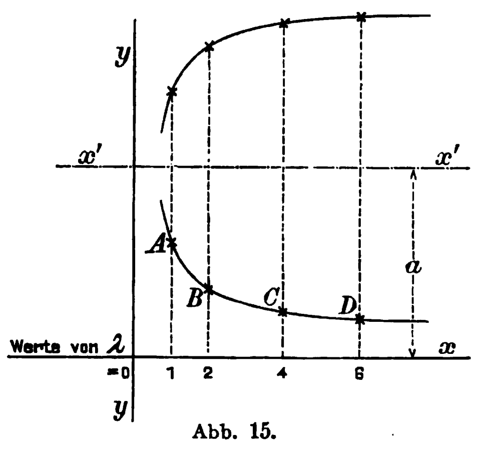


Abb. 15.

Wir versuchen daher, ihre Gleichung auf die Form zu bringen

$$y = a + \frac{k \cdot x^2}{1 + x^2}.$$

Und in der Tat, einige eingehendere Betrachtungen mit der Kurve ergeben den Wert

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot \lambda^2}{1 + \lambda^2}\right) lp \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(B)}$$

als gut mit den berechneten Werten sowohl für Platte frei aufliegend als eingespannt übereinstimmend, wie nachstehende Gegenüberstellung zeigt:

Für $\lambda = 1$	Werte der berechneten π'	Werte aus der Gleichung
1	0,302 lp (0,309)	0,300 lp
2	0,160 lp (0,172)	0,180 lp
4	0,113 lp (0,121)	0,124 lp
6	0,102 lp (0,110)	0,111 lp

Die Werte in den Klammern ( ) sind die für die eingespannte Platte berechneten.

Bemerkt wird, daß für $\lambda = 1$ die berechneten Werte von π u. π' für Längs- und Querträger einander gleich sind, wie es ja auch gegeben sein muß; die aus den Gleichungen sich ergebenden Werte sind etwas ungleich; ihre Differenz hat indes auf die Dimensiönierung keinen Einfluß.

Wenn wir die Formel B für Werte kleiner als 1 benutzen, so finden wir weitere gute Übereinstimmungen mit Formel A. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus Formel B der Wert $q = \mathbf{0{,}42}\; l p$. In diesem Falle ist aber l_1 die längere Seite $= 2\,l$, wir können daher auch die Formel A anwenden, wenn hier $\lambda = 2$ und $l_1 = l$ gesetzt wird; es ergibt sich $\mathbf{0{,}432}\; l p$.

Für $\lambda = \frac{1}{4}$ wird aus Formel B $q = \mathbf{0{,}476}\; l p$ und entsprechend (für $\lambda = 4$) aus Formel A $q = \mathbf{0{,}485}\; l p$.

Mit diesen Werten kann die Kurve ergänzt werden.

Es kann daher weiter ausgesprochen werden:

Wird eine rechteckige, nach beiden Richtungen gleich armiert Eisenbetonplatte von den Seitenlängen l und l_1 von einer gleichmäßig verteilten Belastung (p kg/m²) beansprucht, so werden die Unterstützungsträger an der schmäleren Seite l_1 (Querträger) so in Angriff genommen, als ob sie eine gleichmäßig verteilte Last q_1 (für 1 lfd. m) tragen von dem Werte

$$q_1 = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4\,\lambda^2}{1+\lambda^2}\right) l p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(B)}$$

IV. Abschnitt.

Anleitung zu einer wissenschaftlich strengeren Lösung.

Die Ausführungen und Resultate der Abschnitte II u. III können natürlich ebenso wie jene des Abschnitts I keinen Anspruch auf eine streng wissenschaftliche Lösung machen. Eine wissenschaftlich exakte Durchführung ist bei Eisenbeton, will man auf ein einigermaßen praktisches Resultat kommen, an sich ausgeschlossen; denn so lange nicht das elastische Verhältnis und Zusammenwirken von Eisen und Beton durch Versuche genügend und in einwandfreier Weise geklärt ist, ist man immer auf mehr oder minder berechtigte Annahmen angewiesen, wie es in den vorausgehenden Abschnitten geschehen ist: Je mehr man sich von diesen Annahmen frei machen kann, desto mehr Anspruch auf eine mehr wissenschaftliche Lösung wird die Durchführung haben. Wir wollen eine solche wenigstens ihrem Gange nach in folgendem versuchen.

Die erste der gemachten Hauptannahmen, die Zerlegung der Platte in einzelne, sich gegenseitig stützende und daher als kontinuierlich (in ihren Stützpunkten unnachgiebig) erscheinende Träger (Streifen), die die Lasten auf die Stützbalken der Platte übertragen, lassen wir bestehen. Desgleichen die Annahme, daß die in symmetrisch zu den beiden Symmetrieachsen der Platte gelegenen Knoten (Stützpunkten) angreifenden Stützdrücke gleich sind.

Die zweite Hauptannahme, diese Stützdrücke durch das Gesetz vom Minimum der Formänderungsarbeit zu bestimmen, führen wir indes für Eisen und Beton getrennt durch. Der Satz von der Formänderungsarbeit ($\mathfrak{A}$) gilt strenge genommen nur für isotrope Körper von einer bestimmten Elastizitätsgrenze, deren Spannungen diese noch nicht überschritten haben und in einem einfachen (Hookesches Gesetz) oder Parabelverhältnis zur Dehnung stehen $\left(\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ oder } \varepsilon = \alpha\sigma^n\right)$. Für nicht isotrope Körper, wie Eisenbeton von beliebigem Formänderungsgesetz ($\varepsilon = f[\sigma]$), nicht feststehendem Elastizitätskoeffizient usw., ist richtiger der Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit ($\mathfrak{B}$), wie ihn Engeßer aus der Gleichung der virtuellen Verschiebungen abgeleitet hat, anzuwenden. Selbst für Beton allein kann demnach die Deformationsarbeit nicht gelten; denn es sind auch hier die gemachten Voraussetzungen nicht zutreffend, wenn auch hier für niedere Spannungsintervalle das v. Bachsche Potenzgesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$ als feststehend angenommen werden kann.

Die Ergänzungsarbeit ist:

$$\mathfrak{B} = \Sigma \int_0^S e\,dS \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wenn S die Stabspannung und e die virtuelle Verschiebung (= der wirklichen Formändernng) bedeutet.

Die unbekannten Stützendrücke A, B, C und D (Anteile von den Knotenpunktslasten), oder allgemein X, sind ähnlich wie früher mit dem Kleinstwert der Formänderungsarbeit $\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial X}\right)$ besser mit dem Kleinstwert der Ergänzungsarbeit $\mathfrak{B}$ zu suchen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = 0; \text{ oder } \Sigma \frac{\partial S}{\partial X} \cdot e = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Satz, der für Fachwerkträger abgeleitet ist, gilt auch für den Vollwandträger, wenn dieser in lauter unendlich kleine Prismen (an Stelle der Fachwerkstäbe) zerlegt gedacht wird.

Denken wir uns (Abb. 16) in Entfernung x vom Auflager ein derartiges ∞ kleines Prisma von den Seitenlängen d_x, d_y, d_z, den Seitenflächen df_x ($= d_y \cdot d_z$), df_y ($= d_x \cdot d_z$) und df_z ($= d_y \cdot d_x$), so sind die Normalkräfte nach x, y, z:

$$S_x = df_x \cdot \sigma_x; \quad S_y = df_y \cdot \sigma_y \quad \text{und} \quad S_z = df_z \cdot \sigma_z.$$

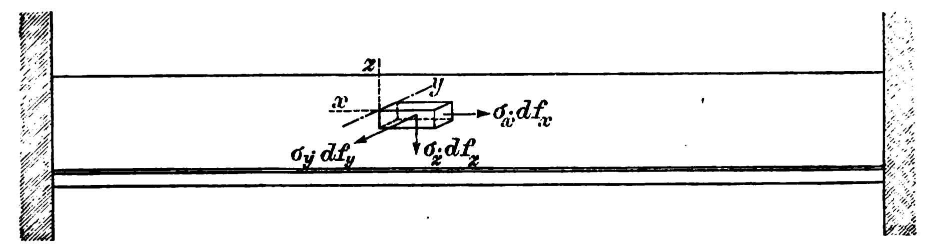
Die in den Seitenflächen wirkenden Tangentialkräfte sind:

$$T_x = df_x \cdot \tau_x; \quad T_y = df_y \cdot \tau_y \quad \text{und} \quad T_z = df_z \cdot \tau_z.$$

Die Dehnungen durch die Normalspannungen nach x, y, z seien $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$,
" " " " Tangentialspannungen " x, y, z " $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$.

Es wird demnach Gleichung 2 (wenn noch beachtet wird, daß $e_x = \varepsilon_x d_x$, $e_y = \varepsilon_y d_y$, $e_z = \varepsilon_z d_z$ usw.)

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = \int\limits_{x=0}^{x=l\,(\text{Feldweite})} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} df_x \cdot \varepsilon_x d_x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} df_y d_y \cdot \varepsilon_y + \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} df_z \cdot d_z \cdot \varepsilon_z + \frac{\partial \tau_x}{\partial X} df_x \cdot d_x \cdot \gamma_x \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \tau_y}{\partial X} df_y \cdot d_y \cdot \gamma_y + \frac{\partial \tau_z}{\partial X} df_z \cdot d_z \cdot \gamma_z \right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$



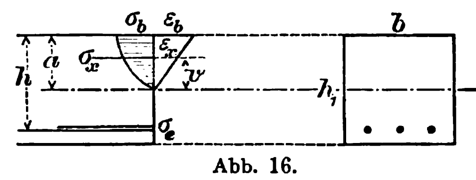


Abb. 16.

(Dabei sind die Spannungszunahmen auf den unendlich kleinen Strecken d_x, d_y und $d_z = 0$ angenommen.)

Mit Rücksicht auf die kleinen Dimensionen des Balkens in der y- und z-Richtung gegenüber der Länge (nach der x-Richtung) können die Formänderungseinflüsse nach y und z sowie der Einfluß der Tangentialkräfte vernachlässigt werden, daher wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = \int\limits_{x=0}^{x=l\,(\text{Feldweite})} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} df_x \, \varepsilon_x \, dx = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Spannungen σ_x innerhalb der Strecke d_x (wozu auch die Eisenspannungen gehören) sind nun nicht gleich, ebenso nicht die Dehnungen ε_x; wir integrieren daher diese Spannungen auf der Strecke dx (die von 0 in der Neutralachse bis σ_b im Rande steigen, soweit der Beton in Betracht kommt) und haben dann den so erhaltenen Integralwert auf Länge des Balkenfeldes nochmals zu integrieren.

Wir drücken nunmehr die Spannung σ_x sowie die Dehnung ε_x (Beton und Eisen) durch M_x (Moment an der Stelle x) aus und erhalten dann unter den Integralzeichen Werte, die Funktionen von x und den Unbekannten A, B, C, D (genau wie früher) darstellen. Hierbei werden die Annahmen gemacht, daß 1. der Zug im Beton ausgeschlossen ist (lediglich zur Vereinfachung entsprechend der Praxis), und 2. daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben (Naviersches Gesetz). Die Annahme 2 ist allerdings hier noch weniger berechtigt als beim homogenen Körper; man ist indes

dazu gezwungen, um überhaupt zu einem Resultat zu kommen. Die Versuche von Schüle, Bach, Wayss u. Freytag usw. zeigen im übrigen, daß die tatsächliche Gestaltung der Querschnitte nicht sehr von den ebenen Querschnitten abweicht. 3. Als Formänderungsgesetz werde für Eisen das Hookesche, für Beton das Bachsche Potenzgesetz genommen; lediglich zur Festlegung der Neutralachse (a) werde auch für Beton das Hookesche Gesetz angenommen, um für den Träger die Lage derselben von dem Moment M_x unabhängig zu machen, d. h. ein konstantes a zu erhalten $\left(a^2 + 2f_e \cdot n \cdot a = 2f_e \cdot n \cdot h\right.$, wobei $\left. f_e = \frac{F_e}{b}\right)$. Die letztere Annahme kann gemacht werden, da das Resultat hierdurch nicht wesentlich beeinträchtigt und die an sich schon höchst komplizierte Ausführung vereinfacht wird. Bemerkt sei ausdrücklich, daß durch die Annahme 3 die Resultate nach der Ergänzungsarbeit an sich die gleichen werden wie nach der Formänderungsarbeit, daß also vor allem die getrennte Durchführung von Eisen und Beton ausschlaggebend sein wird. Erst wenn das richtige Formänderungsgesetz für Eisenbeton gefunden sein wird, wird die Anwendung der Ergänzungsarbeit nach vorstehender Anleitung zu geschehen haben bezw. berechtigt sein.

a) Beton (s. Abb. 16):

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \sigma_x^m; \qquad \varepsilon_b = \alpha \cdot \sigma_b^m$$

$$\varepsilon_x : \varepsilon_b = v : a; \quad \text{daher} \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_b \cdot v}{a} = \frac{\alpha \cdot \sigma_b^m \cdot v}{a} = \alpha \cdot \sigma_x^m$$

oder

$$\sigma_x^m = \frac{\sigma_b^m \cdot v}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Nach Mörsch ist

$$\sigma_b = \frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}} \quad \ldots \quad (6)$$

daher wird

$$\sigma_x^m = \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^m \cdot \frac{v}{a}$$

$$\sigma_x = \frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}} \cdot \sqrt[m]{\frac{v}{a}} \quad \ldots \quad (7)$$

nach Gleichung 5 ist

$$\varepsilon_x = \frac{\alpha \cdot \sigma_b^m \cdot v}{a} = \frac{\alpha \cdot v}{a} \cdot \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^m \quad (8)$$

Es wird daher, wenn noch berücksichtigt wird, daß $df_x = b \cdot dv$ (wobei b Breite des Balkens ist),

$$\sigma_x \cdot \varepsilon_x df_x = b \cdot \alpha \cdot \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^{m+1} \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{m+1}{m}} \cdot dv \quad (9)$$

Es wird daher Gleichung 4 .... (für Beton)

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = \int_{x=0}^{x=l=\text{Feldweite}} \int_0^a \frac{\partial\, b \cdot \alpha \cdot \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^{m+1} \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^{\frac{m+1}{m}} \cdot dv}{\partial X} \cdot dx \quad (10)$$

b) Eisen:

Hier gestaltet sich die Sache etwas einfacher, da σ_e innerhalb der Strecke dx als gleichmäßig über den Eisenquerschnitt verteilt angenommen werden kann (unter Voraussetzung einer Plattenarmierung mittels Rundeisen, also kleiner einzelner Eisenquerschnitte; wird eine andere Form, z. B. T-Form usw. verwendet, so müßte hinsichtlich σ_e genau so vorgegangen werden [in bezug auf die Neutralachse] wie hinsichtlich der Betonspannung oben).

$$S = \sigma_e \cdot F_e$$
$$e = \varepsilon_e \cdot dx$$

so daß

$$\int_0 \frac{\partial S}{\partial X} \cdot e = \int_0^{=\text{Feldweite}} \frac{\partial \sigma_e \cdot F_e}{\partial X} \cdot \varepsilon_e \cdot dx \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Für Eisen kann gelten:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \text{ (wobei } E = \text{Elastizitätsmodul des Eisens)} \quad .\ . \quad (12)$$

so daß nach Gleichung 2 wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = \int_{x=0}^{x=l=\text{Feldweite}} \frac{\partial \frac{\sigma_e^2 \cdot F_e}{E}}{\partial X} dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

σ_e werde wieder durch M_x ausgedrückt (Annahme, daß die Dehnungen im Eisen und Beton in gleichen Abständen von der Neutralachse gleich sind):

$$\varepsilon_b : \varepsilon_e = a : (h - a)$$

oder für ε_b und ε_e die Werte aus den Gleichungen 5 und 13 eingesetzt

$$\alpha \cdot \sigma_b^m : \frac{\sigma_e}{E} = a : (h - a)$$

$$\sigma_e = \frac{\alpha \cdot (h - a) \cdot \sigma_b^m \cdot E}{a} = \frac{\alpha \cdot (h - a) \cdot E}{a} \cdot \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^m$$

so daß Gleichung 13 wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial X} = \int_0^{l=\text{Feldweite}} \frac{\partial \frac{\alpha^2 \cdot (h - a)^2 \cdot E}{a^2} \cdot \left[\frac{M_x}{a \cdot b \cdot \frac{m}{m+1} + a^2 \cdot \frac{m}{2m+1}}\right]^{2m} \cdot F_e}{\partial X} \cdot dx \quad (14)$$

Die Wirkung von Beton und Eisen zusammengefaßt (Gleichung 10 und 14) ergibt:

$$0 = \int\limits_{x=0}^{x=l=\text{Feldweite}} \frac{\partial \int\limits_{0}^{a} \delta \cdot b \cdot a \cdot \left[\dfrac{M_x}{a \cdot b \cdot \dfrac{m}{m+1} + a^2 \cdot \dfrac{m}{2m+1}} \right]^{m+1} \cdot \left(\dfrac{v}{a}\right)^{\frac{m+1}{m}} \cdot dv}{\partial X} \cdot dx$$

$$+ \int\limits_{0}^{l=\text{Feldweite}} \frac{\partial \dfrac{a^2 \cdot (h-a)^2 \cdot E}{a^2} \cdot \left[\dfrac{M_x}{a \cdot b \cdot \dfrac{m}{m+1} + a^2 \cdot \dfrac{m}{2m+1}} \right]^{2m} \cdot F_e}{\partial X} \cdot dx \quad (15)$$

Durch diese Gleichung können die Unbekannten $A, B, C, D \,(= X)$ gefunden und somit die Endresultate festgesetzt werden, wobei die Wirkung von A, B, C, D auf die Auflagerträger so wie vorher festgelegt wird.

In dieser Gleichung können nach den Bachschen Versuchen folgende Mittelwerte gesetzt werden:

$$m = 1{,}15 - 1{,}17; \quad \alpha = \text{annähernd} \cdot \frac{1}{230\,000} \quad \text{und} \quad E = 2\,000\,000.$$

Wenn man berücksichtigt, daß man Gleichung 15 von Träger zu Träger, von Feld zu Feld anzuwenden hat, dabei für die verschiedenen Dimensionsverhältnisse λ der Platte, und daß dies nicht wie früher allgemein, sondern für jeden speziellen Fall, also für jede gegebene Platte geschehen muß, so wird man begreifen, daß dieser Weg in der Praxis nicht anwendbar ist.

Der Unterschied in der Anwendung der Ergänzungs- bezw. der Formänderungsarbeit in der Art nach Abschnitt IV statt der früheren spielt bei der Übertragung der Lasten auf die Plattenunterzüge im Hinblick auf die kleinen Querschnitte des Eisens den Plattendimensionen l und l_1 gegenüber auch bei weitem nicht die Rolle wie bei der Aufsuchung der inneren Spannungen selbst; es kann, wie auch bei Berechnung von Eisenbetonbogen usw., die Annahme gemacht werden, daß die Plattenstreifen zur Lastübertragung als isotrope, einheitliche Körper (Träger) gelten und daher, wie geschehen, die Formänderungsarbeit angewandt wird. Nur hierdurch ist es möglich, ein greifbares, praktisches Resultat zu erhalten, wenn diesem auch schließlich nicht mehr als ein auf Grund der Festigkeitslehre aufgebauter Schätzungswert beigemessen werden kann.

V. Anhang.

1. Anwendung bei ungleichen Armierungen.

Die abgeleiteten Formeln gelten der Ableitung gemäß für solche Eisenbetonplatten, die nach den zwei Richtungen hin in gleicher Weise und gleicher Stärke armiert sind. Sind diese Armierungen indes ungleich, so kann schätzungsweise ein Moment hieraus gefunden werden durch folgende Betrachtungen:

Wir denken uns eine Platte armiert nach der einen Richtung (l_1) mit einem Eisenquerschnitt F_e für 1 lfd. m und nach der anderen Richtung (l) mit f_e für 1 lfd. m.

Ist $F_e > f_e$, so wird der verhältnismäßige Anteil an der Lastaufnahme bei den Trägern der Länge l ein größerer sein als bei den Trägern der Länge l_1.

Wäre $F_e = f_e$, so würde sich aus Gleichung A ein gewisser Wert $= q'$ ergeben.

Wäre $f_e = 0$, so würde der Träger l alles aufzunehmen haben, $q'' = 0{,}5\, l_1\, p$ (übliche Berechnungsart).

Da nun die Momente M und M_1 bei gleichen Betonquerschnitten und gleichen Spannungen σ_e im Eisen sich nahezu verhalten wie die Eisenquerschnitte selbst, denn es ist (Abb. 17 und 18)

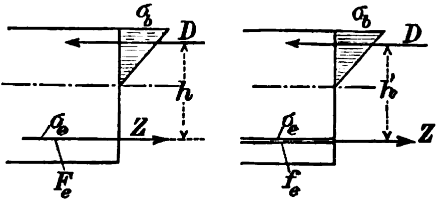


Abb. 17. Abb. 18.

$$M = F_e \cdot \sigma_e \cdot h \text{ und}$$
$$M_1 = f_e\, \sigma_e \cdot h'$$

oder, da h nicht sehr von h' abweicht,

$$M : M_1 = F_e : f_e$$

so kann aus dem Verhältnis von $F_e \cdot f_e$ ein Zwischenwert für q eingeschätzt werden.

Ist zum Beispiel $f_e = \frac{1}{2} F_e$ und $\lambda = 1$, so wird

$$q = \frac{q' + q''}{2}\, l_1\, p = \frac{0{,}31 + 0{,}5}{2}\, l_1\, p = \mathbf{0{,}405}\, l_1\, p.$$

Ebenso kann für die Träger der anderen Richtung verfahren werden.

Die Hauptanwendung der Formeln erfolgt bei den Kassettendecken.

2. Beispiele.

I. Es ist eine Kellerhausdecke mit Unterzügen nach nebenstehender Abb. 19 zu berechnen.

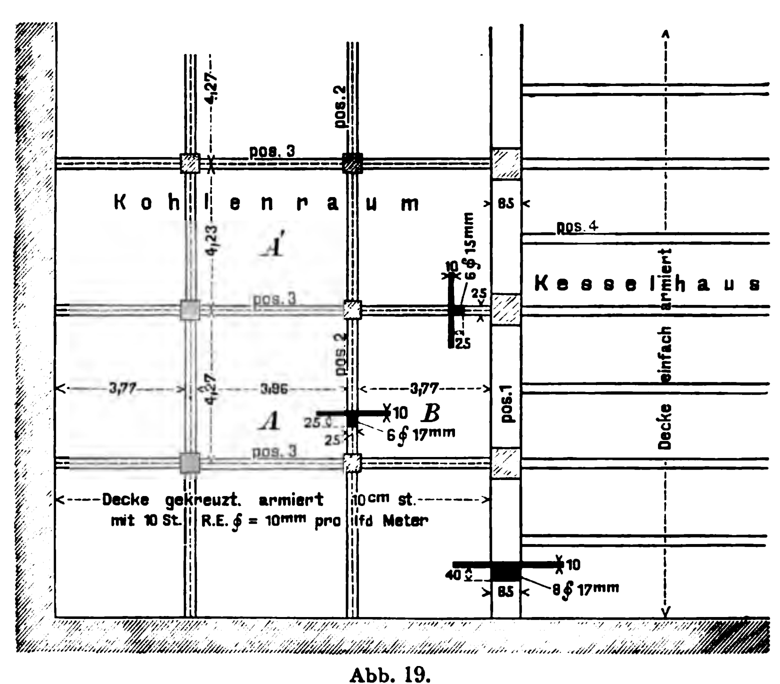


Abb. 19.

a) Die Decke selbst ist gekreuzt armiert mit 10 Stück Rundeisen Durchmesser = 10 mm, nach den beiden Richtungen hin verteilt; sie ist 10 cm stark.

$$\left.\begin{aligned} 2\,a &= 3{,}96 \text{ m};\ a = 1{,}98 \text{ m} \\ 2\,b &= 4{,}27 \text{ m};\ b = 2{,}135 \text{ m} \end{aligned}\right\} \text{Abb. } 20$$

$$\lambda = \frac{4{,}27}{3{,}96} = 1{,}08.$$

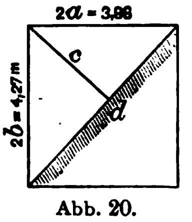


Abb. 20.

Hierfür folgert aus der Momententabelle im Abschnitt 1 (durch Interpolation):

$$\boldsymbol{M} = 0{,}705 \cdot p; \qquad p = \begin{cases} 400 \text{ kg Nutzlast} \\ 350 \text{ kg Eigengewicht (Decke mit Belag)} \\ \overline{750} \text{ kg/m}^2 \end{cases}$$

$$= 0{,}705 \cdot 750 = 52880 \text{ cmkg}$$

$$f_e = 7{,}85 \text{ cm}^2;$$

oder auf 1 cm reduziert

$$f_{e_{red}} = 0{,}0785 \text{ cm}^2;$$

aus:

$$x^2 + 30 \cdot 0{,}0785 \cdot x = 30 \cdot 0{,}785 \cdot 8{,}5$$

ergibt sich x zu $= 3{,}44$ cm (Abb. 21)

Abb. 21.

$$h = 8{,}5 - \frac{1}{3}\,x = 7{,}35 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 52880}{100 \cdot 3{,}44 \cdot 7{,}35} = \mathbf{41{,}8}\ \text{kg/cm}^2$$

$$\text{und } \sigma_e = \frac{52880}{7{,}85 \cdot 7{,}35} = \mathbf{900}\ \text{kg/cm}^2$$

b) Betoneisenbalken Pos. 1 (zwischen Kohlen- und Kesselraum).

Auflagerdruck von Träger Pos. 4 (Kesselhausdeckenträger, hier Decke einfach armiert) = 4830 kg.

Gleichmäßig verteilte Last

$$l_1 = 3{,}77; \quad l = 4{,}27; \quad \lambda = \frac{4{,}27}{3{,}77} = 1{,}13; \ p = 750\ \text{kg}.$$

Daher

$$q = \frac{0{,}49 \cdot (1{,}35\,\lambda + \lambda^2)}{1{,}6 + \lambda + \lambda^2} \cdot 3{,}77 \cdot 750$$

$$= \frac{0{,}49\ (1{,}35 \cdot 1{,}13 + 1{,}13^2)}{1{,}6 + 1{,}13 + 1{,}13^2} \cdot 3{,}77 \cdot 750 = \quad 967\ \text{kg}$$

Hierzu kommt noch Eigengewicht des Balkens

$(0{,}40 + 0{,}10)\ 0{,}85 \cdot 2400 = 1020$ kg

zusammen $\pi = 1987$ rd. 1990 kg.

Der Balken kann als teilweise eingespannt berechnet werden (d. h. Moment liegt zwischen dem bei der freien Auflagerung und dem bei der völligen Einspannung).

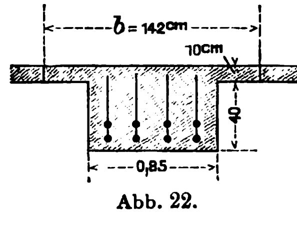


Abb. 22.

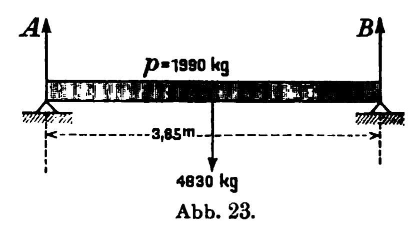


Abb. 23.

1. Frei aufliegend (Abb. 23)

$$\text{Auflagerkraft } A = B = 2415 + \frac{1990 \cdot 3{,}85}{2} = 6246\ \text{kg}.$$

$$M_{max} = \frac{6246 \cdot 3{,}85}{2} - \frac{1990 \cdot 1{,}925^2}{2} = 834\,200\ \text{cmkg}.$$

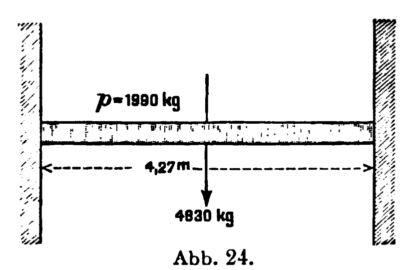


Abb. 24.

2. Eingespannt (hier werde die Spannweite von Mitte zu Mitte Säule genommen) (Abb. 24)

$$M_{max} = \frac{1990 \cdot 4{,}27^2}{2} + \frac{4830 \cdot 4{,}27}{8}$$

$$= 560\,200\ \text{cmkg}.$$

3. Daher teilweise eingespannt

$$M_x = \frac{834\,200 + 560\,200}{2} = 697\,200\ \text{cmkg}$$

$$_{max}b = \frac{4{,}27}{3} = 142\ \text{cm}.$$

Gewählt ist ein Querschnitt 0,85/0,40 mit 8 Stück Rundeisen Durchmesser $= 17$ mm, also $f_e = 18{,}16\ \text{cm}^2$ (Abb. 22).

$$x = \frac{n \cdot k \cdot f_e + \frac{b d^2}{2}}{n \cdot f_e + b d} = \frac{15 \cdot 46 \cdot 18{,}16 + \frac{142 \cdot 100}{2}}{15 \cdot 18{,}16 + 142 \cdot 10} = 11{,}6\ \text{cm}$$

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6\,(2x - d)} = 11{,}6 - 5 + \frac{100}{6\,(23{,}2 - 10)} = 7{,}9\ \text{cm}$$

s. Abb. 25.

Eisenspannung $\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(k - x + y)} = \frac{697\,200}{18{,}16 \cdot 42{,}3}$
$= \mathbf{908}\ \text{kg/cm}^2$

Betonspannung $\sigma_b = \frac{\sigma_e \cdot x}{n\,(k - x)} = \frac{908 \cdot 11{,}6}{15 \cdot 34{,}4}$
$= \mathbf{20{,}4}\ \text{kg/cm}^2$.

Abb. 25.

Die Auflagerkraft ist nach 1. . . . $V = 6246$; daher Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{V}{b\,(k - x + y)} = \frac{6246}{85 \cdot 42{,}3} = 1{,}8\ \text{kg/cm}^2$$

und Haftspannung

$$\tau_1 = \frac{\tau_0 \cdot b}{u} = \frac{1{,}8 \cdot 85}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}7} = 7{,}1\ \text{kg/cm}^2,$$

$u =$ Umfang der Eisen; es kommen, da 4 nach oben abgebogen werden, nur noch 4 Stück über dem Auflager in Betracht.

c) Betoneisenbalken, Pos. 2.

Von Raum A . . . $l_1 = 3{,}96$ m; $l = 4{,}27$ m; $\lambda = 1{,}08$;

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35\,\lambda + \lambda^2)}{1{,}6 + \lambda + \lambda^2} \cdot l_1 p = 0{,}49 \cdot \frac{(1{,}35 \cdot 1{,}08 + 1{,}08^2)}{1{,}6 + 1{,}08 + 1{,}08^2} \cdot 3{,}96\,p = 995\ \text{kg}$$

Von Raum B . . . $l_1 = 3{,}77$ m; $l = 4{,}27$ m; $\lambda = 1{,}13$;

$$q = 0{,}49 \cdot \frac{1{,}35 \cdot 1{,}13 + 1{,}13^2}{1{,}6 + 1{,}13 + 1{,}13^2} \cdot 3{,}77\,p = 967\ \text{kg}$$

Summe 1962 kg
Eigengewicht des Balkens 25/25 . . . 150 „

π rd. $= 2110$ kg
für 1 lfd. m.

Es wird der Balken als teilweise eingespannt angenommen; daher

$$M = \frac{2110 \cdot 4{,}27^2}{10} = 384\,650\ \text{cmkg}$$

Gewählt wird ein Querschnitt 25/25 cm mit 6 Stück Rundeisen Durchmesser 17 mm ($F_e = 13{,}62\ \text{cm}^2$) in der Zugzone

$$b = \frac{4{,}27}{3} = 1{,}42\ \text{m},$$

x (wie oben gefunden) $= 7{,}9$ cm (die Neutralachse liegt hier noch in der Platte)

$$h = 35 - 5 = 30\ \text{cm}, \qquad h - \frac{x}{3} = 28{,}4\ \text{cm},$$

$$\sigma_e = \frac{384\,650}{13{,}62 \cdot 28{,}4} = \mathbf{994}\text{ kg}; \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_e x}{15\,(h - x)} = \mathbf{24}\text{ kg}$$

$$V = \frac{3{,}87 \cdot 2110}{2} = 4082\text{ kg (lichte Weite} = 4{,}27 - 0{,}4 = 3{,}87\text{ m)}$$

$$\text{Schubspannung } \tau_0 = \frac{4082}{25 \cdot 28{,}4} = 5{,}7\text{ kg/cm}^2.$$

Zulässig nur 4,5 kg/cm²; wir biegen daher drei von den Eisen ab, und zwar beginnend in einem Abstand x_1 vom Auflager weg, der sich ergibt daraus, daß dort die Querkraft sein muß

$$V_1 = \frac{4082 \cdot 4{,}5}{5{,}7} = 3223\text{ kg,}$$

also

$$x_1 = \frac{4082 - 3223}{2110} = 0{,}4\text{ m.}$$

$$\text{Haftspannung } \tau_1 = \frac{5{,}7 \cdot 25}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}7} = 9\text{ kg/cm}^2,$$

zulässig nur 7,5 kg/cm², daher ist ein Zusatzeisen zu wählen 1 Rundeisen Durchmesser 17 mm, es wird dann

$$\tau_1 = \frac{5{,}7 \cdot 25}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}7} = 7\text{ kg/cm}^2,$$

außerdem werden schräg zu stellende Bügel angewendet oder es sind statt drei nur zwei Eisen abzubiegen; die Eisenspannung, infolge der schiefen Zugkraft, ist dann immer noch gering (etwa 96 kg/cm²).

d) Betoneisenbalken Pos. 3.

Vom Raum A' . . . $\left.\begin{matrix} l = 4{,}23 \\ l_1 = 3{,}96 \end{matrix}\right\} \lambda = \frac{4{,}23}{3{,}96} = 1{,}07$ . . .

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4\,\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right) l \cdot p = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}07^2}{1 + 1{,}07^2}\right) 4{,}23 \cdot 750 = 936\text{ kg}$$

Vom Raum A . . . $\left.\begin{matrix} l = 4{,}27 \\ l_1 = 3{,}96 \end{matrix}\right\} \lambda = \frac{4{,}27}{3{,}96} = 1{,}08$ . . .

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}08^2}{1 + 1{,}08^2}\right) 4{,}27 \cdot 750 \;\ldots\ldots\ldots = 938\text{ kg}$$

Summe 1874 kg
Eigengewicht 150 kg
2024 kg

Balken als teilweise eingespannt angenommen:

$$M = \frac{2024 \cdot 3{,}96^2}{10} = 316\,740\text{ cmkg.}$$

Wir wählen einen Querschnitt 25/25 cm (ohne Decke) und 6 Stück Rundeisen Durchmesser 15 mm

$$F_e = 10{,}6\text{ cm}^2,$$

x (Neutralachse) findet sich zu 7,25 cm (nach bekannter Art):

$$b = \frac{1}{3} \cdot 3{,}96 = 1{,}32\text{ m.}$$

$$\sigma_e = \frac{316\,740}{10{,}6 \cdot \left(31 - \frac{7{,}25}{3}\right)} = \mathbf{1045}\ \text{kg/cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{633\,480}{132 \cdot 7{,}25 \left(31 - \frac{7{,}25}{3}\right)} = \mathbf{23}\ \text{kg/cm}^2.$$

Die Auflagerkraft V wird

$$= \frac{3{,}56 \cdot 2024}{2} = 3603 \text{ kg}$$

lichte Spannweite = 3,96 m — 40 m = 3,56 m.

Daher τ_0 (Schubspannung)

$$= \frac{3603}{25 \cdot 28{,}58} = 5{,}04 \text{ kg/cm}^2.$$

Da die Schubspannung etwas überschritten, sind zwei Eisen von ungefähr 20 cm vom Auflager weg abzubiegen.

Denn es muß dies sein an einer Stelle, wo $\tau_0 = 4{,}5$ kg, also wo die Schnittkraft

$$= V_1 = \frac{3603 \cdot 4{,}5}{5{,}04} = 3218 \text{ kg}$$

oder

$$x_1 = \frac{3603 - 3218}{2024} = \text{rd. } 20 \text{ cm;}$$

vom Auflager weg.

Die von den abgebogenen Eisen aufzunehmende schiefe Zugkraft

$$Z_1 = \frac{25 \cdot 20\,(5{,}04 - 4{,}5)}{2 \cdot \sqrt{2}} = \text{etwa } 96 \text{ kg}$$

(siehe Dresdener Eisenbetonvorschriften), daher

$$\sigma = \frac{96}{3{,}5} = \text{etwa } 28 \text{ kg/cm}^2.$$

Haftspannung

$$= \frac{5{,}04 \cdot 25}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5} = 6{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

genügend.

II. Eine Eisenbetonkassettendecke (Hörsaal im Nordflügelbau der Kgl. Universität München) wird gebildet durch eine gekreuzt armierte, 14 cm starke Eisenbetonplatte und vier einander kreuzende Eisenbetonbalken von 13,05 und 13,65 m Länge (Abb. 26).

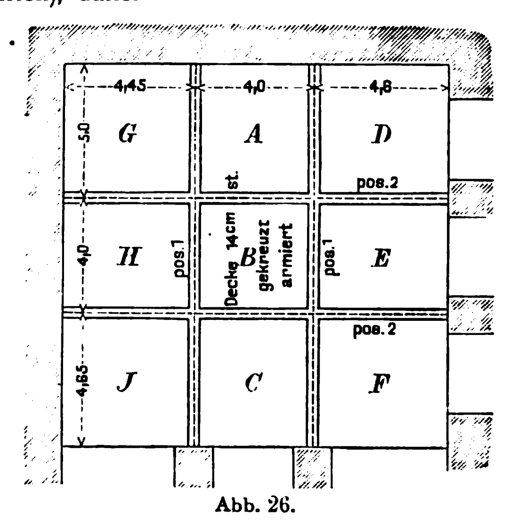


Abb. 26.

Diese Balken sind zu berechnen. Die Nutzlast beträgt 400 kg/m².

Da die Platten der einzelnen Felder A—J gekreuzt armiert sind, partizipieren an der Lastaufnahme die beiden Träger (Längs- und Querträger), die diese Felder tragen, und zwar sind diese Lastanteile für 1 lfd. m

a) für den längeren Träger

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35\,\lambda + \lambda^2)}{1{,}6 + \lambda + \lambda^2}\, l_1\, p$$

b) für den kürzeren Träger

$$q' = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4\,\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right) l\, p.$$

Hierbei ist λ = Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite. l die längere und l_1 die kürzere Seite.

Balken Pos. 1.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Nutzlast} = 400\text{ kg}\\ \text{Eigengewicht der Decke mit Stuck} = 450\text{ kg}\end{array}\right\}\; p = 850\text{ kg/m}^2.$$

Dieser erhält vom Raum A:

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35 \cdot 1{,}25 + 1{,}25^2)}{1{,}6 + 1{,}25 + 1{,}25^2} \cdot 4{,}0 \cdot p = 1{,}44\,p \left(\lambda = \frac{5}{4} = 1{,}25\right)$$

vom Raum D:

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35 \cdot 1{,}09 + 1{,}09^2)}{1{,}6 + 1{,}09 + 1{,}09^2} \cdot 4{,}6 \cdot p = 1{,}56\,p \left(\lambda = \frac{5}{4{,}6} = 1{,}09\right)$$

zus. $3{,}0\,p$ = 2550 kg für 1 lfd. m

vom Raum B:

$$q = 0{,}31 \cdot 4{,}0 \cdot p \;\ldots\ldots\ldots = 1{,}24\,p\ (\lambda = 1)$$

vom Raum E:

$$q' = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}15^2}{1 + 1{,}15^2}\right) \cdot 4{,}6\,p \;\ldots = 1{,}26\,p \left(\lambda = \frac{4{,}6}{4{,}0} = 1{,}15\right)$$

zus. $2{,}5\,p$ = 2125 kg für 1 lfd. m

vom Raum C:

$$q = \frac{0{,}49\,(1{,}35 \cdot 1{,}16 + 1{,}16^2)}{1{,}6 + 1{,}16 + 1{,}16^2} \cdot 4{,}0\,p = 1{,}39\,p \left(\lambda = \frac{4{,}65}{4{,}0} = 1{,}16\right)$$

vom Raum F:

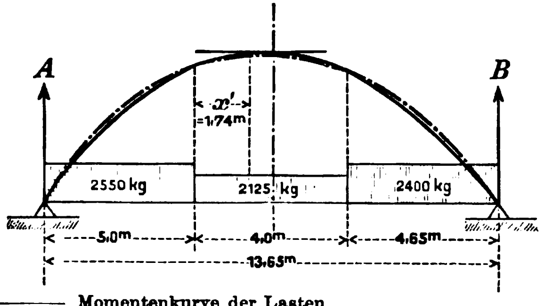
$$q = 0{,}31 \cdot 4{,}62 \cdot p \;\ldots\ldots\ldots = 1{,}43\,p\ (\lambda = 1{,}0)$$

zus. $2{,}82\,p$ = 2400 kg für 1 lfd. m

Das Belastungsschema ist daher das folgende (Abb. 27):

Auflagerkraft

$$A = \frac{2550 \cdot 5{,}0 \cdot 11{,}15}{13{,}65} + \frac{2125 \cdot 4 \cdot 6{,}65}{13{,}65} + \frac{2400 \cdot 4{,}65 \cdot 2{,}32}{13{,}65} = 16\,450\text{ kg}.$$



——— Momentenkurve der Lasten.
—·—· Momentenkurve durch eine ersetzende gleichmäßig verteilte Last.

Abb. 27.

Das Maximalmoment tritt bei x' ein $= 1{,}74$ m, da hierfür $16\,450 - 12\,750 - 2125\,x' = 0$.

$$M_{max} = 16\,450 \cdot 6{,}74 - 12\,750 \cdot 4{,}24 - \frac{2125 \cdot 1{,}74^2}{2} = 53\,600 \text{ mkg.}$$

Ersatz durch eine gleichmäßig verteilte Last:

$$\frac{\pi' \cdot 13{,}65^2}{8} = 53\,600 \text{ cmkg}$$

$$\pi' = \text{rd. } 2300 \text{ kg}$$

Eigenlast des Trägers 760 „

π = Gesamtlast für 1 lfd. m 3060 kg.

Moment für teilweise eingespannt $0{,}1\pi l^2$ ⎫
„ bei Kontinuität $0{,}08\pi l^2$ . . . ⎭ daher im Mittel $0{,}09\pi l^2$.

(Kontinuität ist bei Kassettendecken durch die Kreuzpunkte zum Teil vorhanden, wie sich aus den Durchbiegungslinien der Rathauskassettendecke München deutlich ergibt.)

Daher $M_{max} = 0{,}09 \cdot 3060 \cdot 13{,}65^2 = 5\,122\,000$ cmkg.

Gewählt ist der Querschnitt, wie ihn Abb. 28 zeigt.

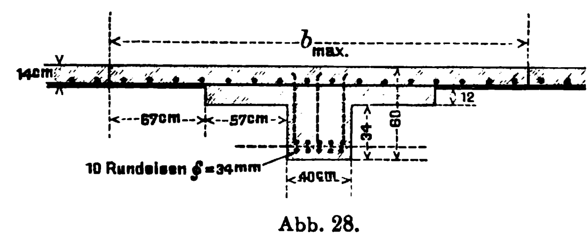


Abb. 28.

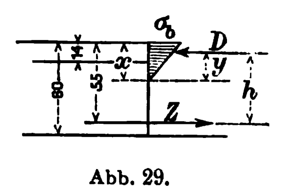


Abb. 29.

Zur Bestimmung von x (Abb. 29):

$$\int_{y=0}^{y=x} \frac{\sigma_b}{x}\, y\, df = f_e \frac{\sigma_b}{x} (55 - x)\, 15; \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma_b}{x} \int_{y=0}^{y=x} b y\, dy = f_e \frac{\sigma_b}{x} (55 - x)\, 15$$

$$\text{oder} \int_{y=0}^{y=x} b y\, dy = (55 - x)\, 15 \cdot f_e.$$

Die Maximalbreite, auf die die Decke mitträgt:

$$b_{mx} = \frac{1}{3} (4{,}0 + 4{,}65) = 288 \text{ cm}$$

$$f_e = 90{,}8 \text{ cm}^2.$$

Stufenweise integriert:

$$\frac{1}{2} (28x - 14^2)\, 288 + \frac{1}{2} (24x - 480)\, 154 + \frac{1}{2} (x^2 - 52x + 26^2)\, 40$$

$$= 90{,}8\, (55 - x) \cdot 15$$

$$x = 19{,}2 \text{ cm.}$$

y folgt aus der Gleichung (Abb. 30):

$$y = \left[144 \left(\sigma_b + \frac{\sigma_b \cdot 5{,}2}{19{,}2}\right) 14 + \frac{\sigma_b \cdot 5{,}2^2 \cdot 154}{2 \cdot 19{,}2}\right] = \frac{1}{2} \left(\sigma_b + \frac{\sigma_b \cdot 5{,}2}{19{,}2}\right) 14 \cdot 288 \cdot \underbrace{13{,}6}_{=a}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\sigma_b \cdot 5{,}2^2 \cdot 154 \cdot 3{,}5}{19{,}2}$$

$$y = 13{,}2 \text{ cm}$$

$$h = 55 - 19{,}2 + 13{,}2 = 49 \text{ cm}$$

$$\sigma_e = \frac{5\,122\,000}{90{,}8 \cdot 49} = \mathbf{1150} \text{ kg/cm}^2 \text{ zulässig}$$

$$\sigma_b = \frac{1150 \cdot 19{,}2}{35{,}8 \cdot 15} = \mathbf{41} \text{ kg/cm}^2 \text{ zulässig}$$

V' am Auflager $= 16\,450$ kg (durch Decke und Nutzlast).

Eigenlast: $\dfrac{760 \cdot 13{,}65}{2} = 5\,187$ „

$$V = 21\,640 \text{ kg rund}$$

Schubspannung $\tau_0 = \dfrac{21\,640}{40 \cdot 49} = 11$ kg/cm² unzulässig.

Daher sind die 3 oberen Stäbe abzubiegen von einer Stelle ab, die um x vom Auflager entfernt ist und wo Scherkraft $= V_1$

$$\frac{V_1}{40 \cdot 49} = 4{,}5 \text{ kg}; \quad V_1 = 4{,}5 \cdot 40 \cdot 49 = 8820 \text{ kg}$$

$$b = \frac{14}{3} \cdot \frac{\frac{2 \cdot 5{,}2}{19{,}2}\sigma_b + \sigma_b}{\frac{5{,}2}{19{,}2}\sigma_b + \sigma_b} = 5{,}6 \text{ cm.}$$

$$a = 19{,}2 - 5{,}6 = 13{,}6 \text{ cm.}$$

Abb. 30.

$$V_1 = V - x \cdot 2550; \quad x = \text{etwa } 5 \text{ m};$$

d. h. also von Träger 2 ab abbiegen! und gut mit Bügeln versehen.

Haftspannung $\tau_1 = \dfrac{40 \cdot 11}{5 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}4} = 8{,}2$ kg/cm²

unzulässig, daher die Eisen an den Enden gut umbiegen, Verankerungszusatzeisen und Bügel!

Balken Pos. 2.

Dieser erhält vom Raum G:

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}12^2}{1 + 1{,}12^2}\right) \cdot 5{,}0\,p \;. = 1{,}4\,p \quad \left(\lambda = \frac{5{,}0}{4{,}45} = 1{,}12\right)$$

vom Raum H:

$$q = 0{,}49\,\frac{(1{,}35 \cdot 1{,}11 + 1{,}11^2)}{1{,}6 + 1{,}11 + 1{,}11^2} \cdot 4{,}0\,p = 1{,}36\,p \quad \left(\lambda = \frac{4{,}45}{4{,}0} = 1{,}11\right)$$

zus. $2{,}76\,p$ = 2350 kg für 1 lfd. m

vom Raum A:

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}25^2}{1 + 1{,}25^2}\right) \cdot 5{,}0\,p \;. = 1{,}3\,p \quad \left(\lambda = \frac{5}{4}\,1{,}25\right)$$

vom Raum B:

$$q = 0{,}31 \cdot 4{,}0 \cdot p \;\ldots\ldots = 1{,}24\,p \quad (\lambda = 1)$$

zus. $2{,}54\,p$ = 2160 kg für 1 lfd. m

vom Raum D:

$$q = \left(0{,}5 - \frac{0{,}4 \cdot 1{,}09^2}{1 + 1{,}09^2}\right) \cdot 5{,}0\,p \;. = 1{,}45\,p \quad (\lambda = 1{,}09)$$

vom Raum F:

$$q = 0{,}49\,\frac{(1{,}35 \cdot 1{,}15 + 1{,}15^2)}{1{,}6 + 1{,}15 + 1{,}15^2} \cdot 4{,}0\,p = 1{,}36\,p \quad (\lambda = 1{,}15)$$

zus. $2{,}81\,p$ = 2390 kg für 1 lfd. m

$$A = 14\,990 \text{ kg}$$
$$B = 15\,100 \text{ kg}$$
$$M_x \text{ an Stelle } x' = 2{,}1 \text{ m (Abb. 31)}$$
$$= 14\,990 \cdot 6{,}55 - 10\,457 \cdot 4{,}33 - \frac{2160 \cdot 2{,}1^2}{2} = 4\,814\,200 \text{ cmkg.}$$

Ersatz durch $\pi' \ldots \frac{\pi' l^2}{8} = 4\,814\,200;\quad \pi' = \frac{385\,136}{13{,}05^2} = 2265$ kg/lfd. m

Eigenlast des Trägers . . . . $(1{,}54 \cdot 0{,}07 + 0{,}4 \cdot 0{,}32) = \underline{566}$ „ „

$\pi = 2831$ kg/lfd. m

$$M_{mx} = 0{,}09 \cdot 2830 \cdot 13{,}05^2 = 4\,330\,000 \text{ cmkg.}$$

(Unter Rücksicht auf teilweise Einspannung außen und Kontinuität an den Kreuzpunkten.)

Gewählt ist der in Abb. 32 dargestellte Querschnitt.

Die weitere Berechnung kann wie oben erfolgen.

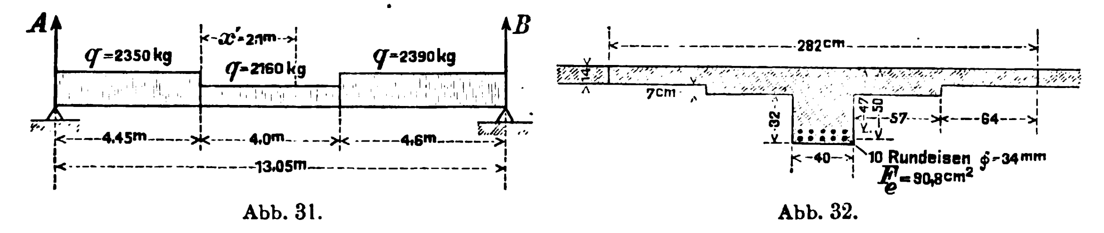


Abb. 31. Abb. 32.

Die Rittersche Berechnungsweise führt hier rascher zum Ziel. Die Resultate sind annähernd die gleichen wie bei der anderen Rechnungsweise.

$$F_e = f_{eo} + f_{eu} = 90{,}8 \text{ cm}^2 = 45{,}4 \text{ cm}^2 + 45{,}4 \text{ cm}^2.$$

Gesamtfläche

$$F = 53 \cdot 40 + 2 \cdot 57 \cdot 21 + 2 \cdot 64 \cdot 14 + 90{,}8 \cdot 15 = 10\,668 \text{ cm}^2.$$
$$(5120) \quad (2394) \quad (1792) \quad (1362)$$

Statisches Moment um die Oberkante

$$5120 \cdot 26{,}5 + 2394 \cdot 10{,}5 + 1792 \cdot 7 + 15 \cdot 45{,}4 \cdot 50 + 15 \cdot 45{,}4 \cdot 47$$
$$(135\,680) \quad (25\,137) \quad (12\,544) \quad (34\,050) \quad (32\,007)$$
$$= 239\,418 \text{ cm}^3.$$

Trägheitsmoment um dieselbe Achse

$$\frac{135\,680 \cdot 2 \cdot 53}{3} + \frac{25\,137 \cdot 2 \cdot 21}{3} + \frac{12\,544 \cdot 2 \cdot 14}{3} + 34\,050 \cdot 50$$
$$+ 32\,007 \cdot 47 = 8\,469\,851 \text{ cm}^4.$$

Nullachse $x = \frac{239\,418}{10\,668} = 22{,}4$ cm.

Trägheitsmoment um diese Achse

$$8\,469\,851 - 10\,668 \cdot 22{,}4^2 = 3\,117\,075 \text{ cm}^4.$$

Daher

$$\sigma_b = \frac{4\,330\,000 \cdot 22{,}4}{3\,117\,075} = \text{etwa } 31 \text{ kg/cm}^2 \text{ zulässig.}$$

$$h = 48{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 22{,}4 = 41 \text{ cm}$$

$$Z \cdot 41 = M; \qquad F_e \cdot \sigma_e \cdot 41 = M;$$

hieraus

$$\sigma_e = \frac{4\,330\,000}{90{,}8 \cdot 41} = 1160 \text{ kg/cm}^2 \text{ noch zulässig.}$$

Scherkraft am Auflager

$$B = 15\,100 + \frac{566 \cdot 13{,}05}{2} = 18\,790 \text{ kg} = V.$$

Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{18\,790}{40 \cdot 41} = 11{,}4 \text{ kg unzulässig.}$$

Daher Bügel und die fünf oberen Stäbe abbiegen von einer Stelle x (vom Auflager weg).

$$V_1 = 4{,}5 \cdot 40 \cdot 41 = 7380 \text{ kg, rd. } 7400 \text{ kg}$$

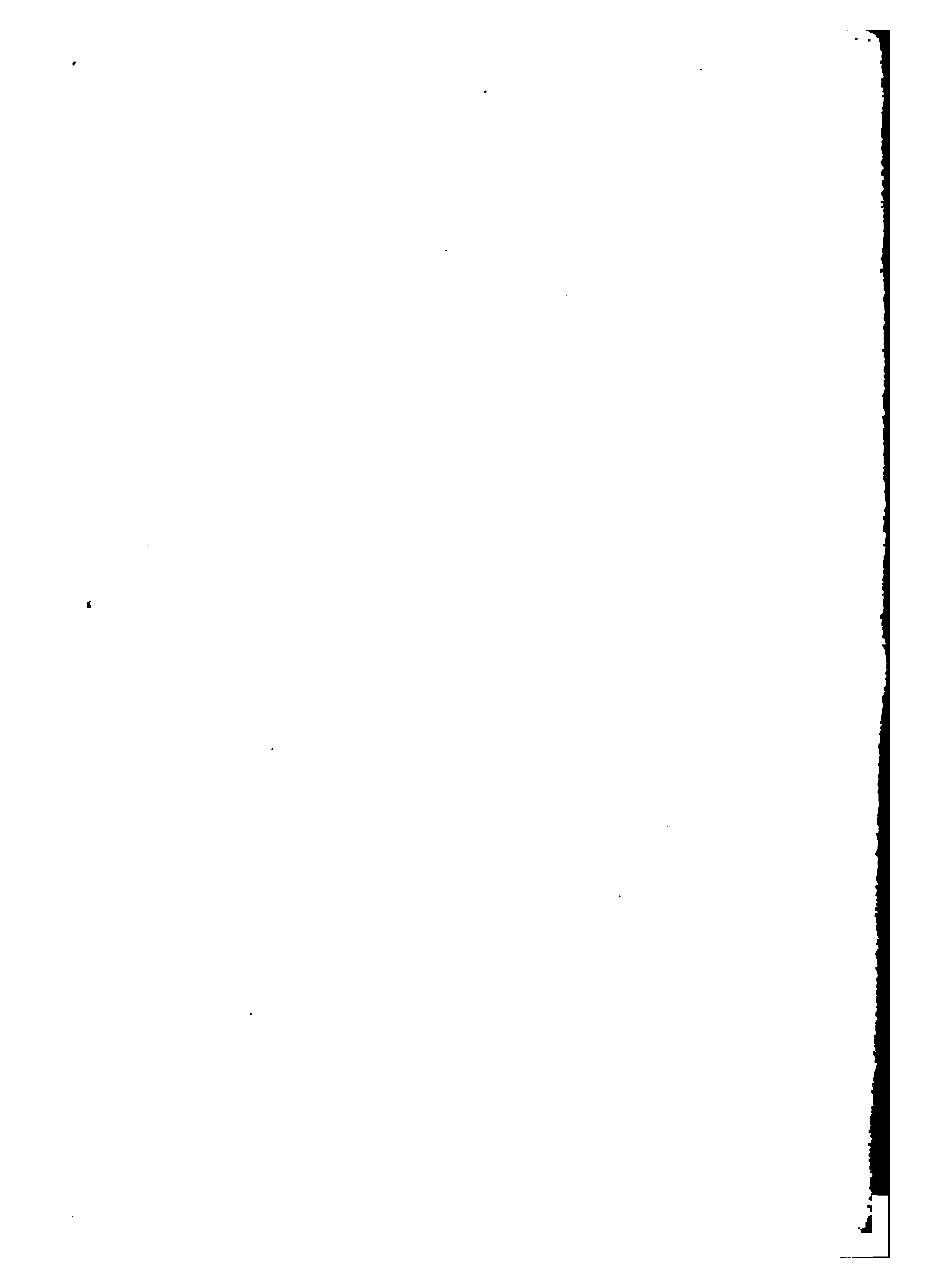
$$7400 = 18\,790 - 2390\,x; \quad x = \text{rd. } 4{,}8 \text{ m.}$$

Haftspannung

$$\tau_1 = \frac{40 \cdot 11{,}4}{5 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}4} = 8{,}3 \text{ kg/cm}^2.$$

Daher umbiegen mit Verankerungs- und Zusatzeisen sowie Bügel.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW.



FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES

EISENBETONS

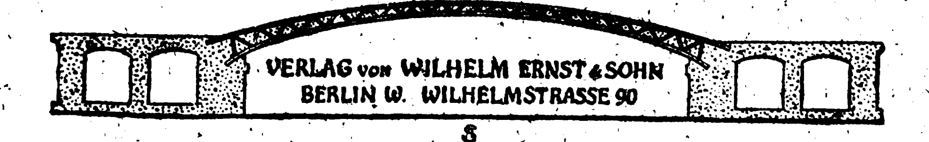
VERSUCHE MIT EXZENTRISCH BELASTETEN BETONEISERNEN SÄULEN

HEFT X

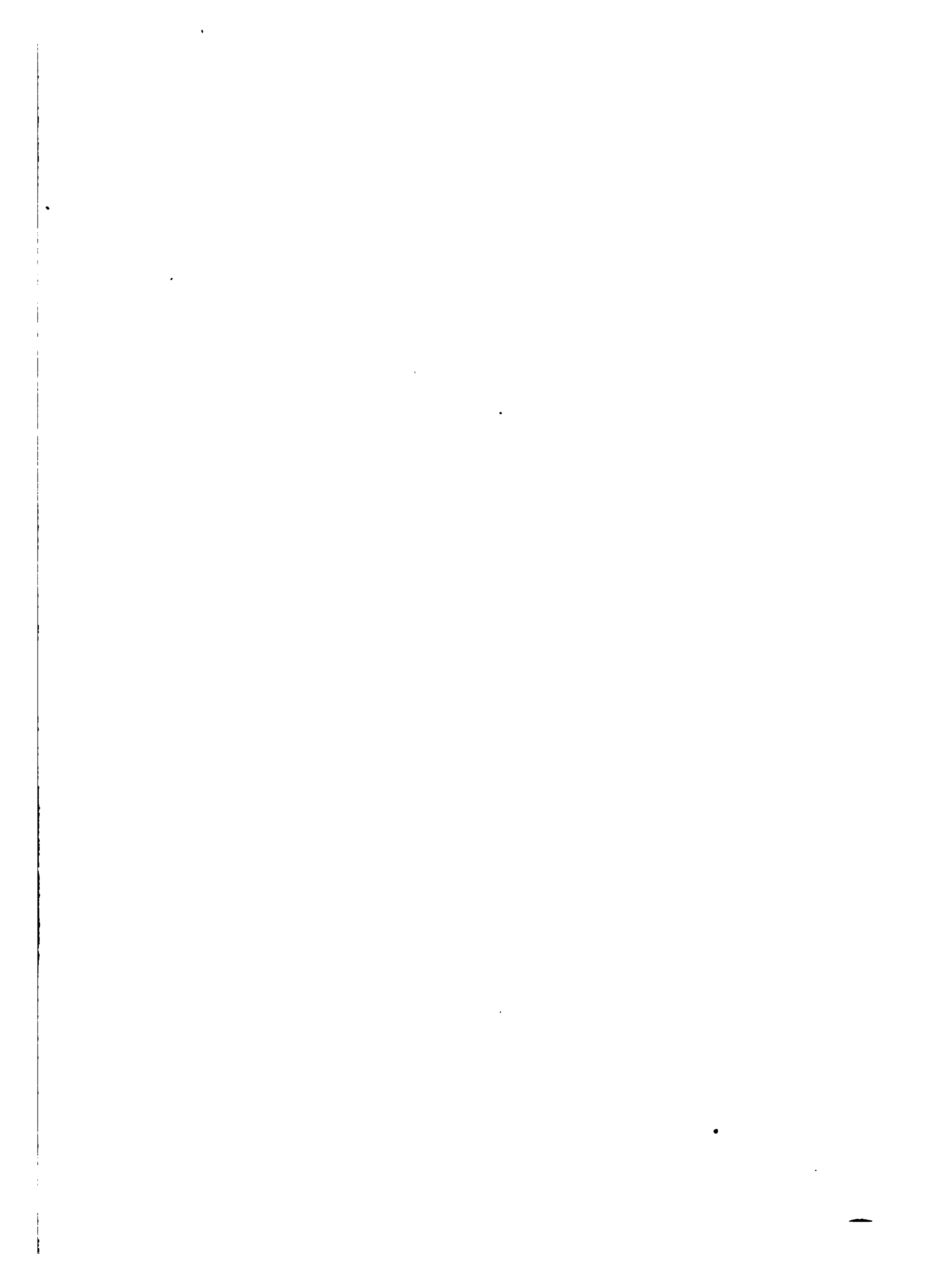
PREIS 6 MARK

VON

DR. MAXIMILIAN RITTER VON THULLIE
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN LEMBERG



VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90





Versuche

mit

exzentrisch belasteten betoneisernen Säulen

von

Dr. Maximilian Ritter von Thullie,
Professor an der Technischen Hochschule in Lemberg.

Mit 17 Textabbildungen und 3 Tafeln.

BERLIN 1909
Verlag von WILHELM ERNST & SOHN.

VORWORT.

Der vorliegende Bericht über die Versuche mit exzentrisch belasteten betoneisernen Säulen bestrebt, meine Bemühungen, diese durch die Versuche bisher noch gar nicht beleuchtete Frage näher ins Auge zu fassen, in kurzem darzustellen. Bisher wurden nur vereinzelte Säulen mit exzentrischer Belastung geprüft, wie z. B. durch die französische Kommission. Dieser erste Versuch, die experimentelle Antwort auf die Frage zu erhalten, kann natürlich nicht als entscheidend betrachtet werden, namentlich, da die Ausmaße der Säulen klein waren. Ich trachtete aber wenigstens einen kleinen Beitrag zur Klärung der Frage beizubringen, inwieweit es die vorhandenen Mittel gestatteten.

Ich übergebe meinen Bericht der wohlwollenden Beurteilung der Fachgenossen.

Lemberg, im März 1909.

Dr. Max R. v. Thullie.

INHALTS-VERZEICHNIS.

Berichtigung.

Seite 13, Zeile 4 von unten lies:

$r_1 = 0{,}2$ cm, statt $r_1 = 0{,}4$ cm.

Einleitung.

Um entsprechende Formeln zur Berechnung von betoneisernen Trägern zu erhalten, genügt es nicht, mehr oder weniger genaue Theorien aufzustellen, man muß, wie überall in der technischen Mechanik, diese Theorien durch systematische Versuche auf ihre Richtigkeit prüfen, die Vorgänge bis zum Bruch genau untersuchen und die Bruchursachen feststellen.

Wie auf jedem Gebiete der menschlichen Tätigkeit ist die Teilung der Arbeit angezeigt. In Anbetracht dessen habe ich für meine Versuche ein Arbeitsfeld gewählt, welches fast noch gar nicht berührt ist, die exzentrisch belasteten betoneisernen Säulen.

Auf einer Konferenz, in welcher Prof. Fiedler, Leiter der mechanischen Versuchsanstalt in Lemberg, Prof. Dr. Huber, Assistent Dr. Marcichowski und Baurat Alfred v. Zachariewicz teilnahmen, wurde folgendes Arbeitsprogramm festgestellt.

Die Ausmaße der Säulen bleiben dieselben, wie bei meinen früheren Versuchen.[1]) Es geschah dies einerseits um die vorhandenen Formen zu benützen, dann, um die Knickfestigkeit der Säulen zu prüfen. Da die vorhandene Prüfungsmaschine nur eine Höhe der Säulen von 1,5 m zuließ, so war der Querschnitt bei den früheren, wie auch bei diesen Versuchen 8 cm im Quadrat, daher größtes $\frac{l}{b} = \frac{150}{8} = 18{,}75$.

Abb. 1.

Um die Zerstörung der Säulen an den Enden womöglich hintanzuhalten, wurden die Enden auf 16 cm im Quadrat verbreitert (Abb. 1).

Alle Säulen sind in der Prüfungsanstalt anzufertigen und nach 42 Tagen zu prüfen. Bezeichnen wir mit x das Eisenprozent der Längsarmierung, e den Abstand der Bügel, c die Exzentrizität. Es wurden folgende Versuche in Aussicht genommen.

---

[1]) Siehe Artikel des Verfassers: Neue Versuche mit betoneisernen Säulen. Beton u. Eisen. 1906 u. 1907.

Serie	Eisenprozent	Eiseneinlage Anzahl	Eiseneinlage Durchm.	Abstand der Bügel e	Exzentrizität c	Höhe h	Anzahl der Säulen einzeln	Anzahl der Säulen zus.
I	1,23	4	5	4 und 8	0,05	1,15	6	48
"	"	"	"	" " "	2 und 4	1,15	2	16
II	1,57	8	4	wie Serie I				64
III	2,46	8	5	" " "				64
IV	1,57	8	4	umschnürt 2 und 4	wie Serie I			64
V	2,46	8	5	" " "	" " "			64
VI	1,57	8	4	4 und 8	" " "			64
VII	2,44	2	5	" " "	0,3	1,15	3	12
		3	7	" " "	3	"	1	4
VIII	2,78	5	4	wie Serie VII				16
		3	7					
IX	2,78	5	4	umschnürt 2 und 4	wie Serie VII			16
		3	7					
X	0	—	—	—	wie Serie I			32
								464

A. Durchführung der Versuche.

Dieser Arbeitsplan konnte nicht eingehalten werden, da bei der Exzentrizität 4 cm der Kopf abgeschert wurde und bei der Exzentrizität 2 cm besondere Vorkehrungen notwendig waren, um das einseitige Abheben des Kopfes zu verhindern und daher manche Versuche außer dem Programm durchgeführt werden mußten.

Im ganzen wurden 485 Säulen geprüft, wovon 5 ganz unbrauchbar waren, also 480 brauchbare Versuche durchgeführt wurden.

Ausgeführt wurden die Versuche nach folgender Zusammenstellung.

Serie	Eisenprozent	Eiseneinlage Anzahl	Eiseneinlage Durchm.	Abstand der Bügel e	Exzentrizität c	Höhe h	Anzahl der Versuche einzeln	Anzahl der Versuche zus.
Ia	1,23	4	5	4	0	1,0	4	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	{0,45—0,65 / 0,5}	1,0	8	
"	"	"	"	"	0,5—0,675	1,5	10	
Ib	"	"	"	8	0	1,0	6	
"	"	"	"	"	0	1,5	8	
"	"	"	"	"	0,475—0,6	1,0	10	
"	"	"	"	"	0,5—0,675	1,5	8	60
								60

Serie	Eisen-prozent	Eiseneinlage		Abstand der Bügel e	Exzentrizität c	Höhe h	Anzahl der Versuche	
		Anzahl	Durchm.				einzeln	zus.
								60
Ic	0,98	4	4,5	4	0	1,0	2	
"	"	"	"	"	0	1,5	2	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	3	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	3	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	3	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	3	16
IIa	1,96	8	4,5	"	0	1,0	4	
"	"	"	"	"	0	1,5	4	
"	"	"	"	"	0,475—0,5	1,0	5	
"	"	"	"	"	0,45—0,6	1,5	8	
"	"	"	"	"	1,9—2,025	1,0	7	
"	"	"	"	"	1,975—2,175	1,5	4	
IIb	"	"	"	8	0	1,0	7	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,4—0,55	1,0	4	
"	"	"	"	"	0,45—0,575	1,5	6	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	5	
"	"	"	"	"	1,85—2,0	1,5	4	64
IIIa	2,45	"	5	4	0	1,0	6	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,475—0,525	1,0	6	
"	"	"	"	"	0,5—0,55	1,5	4	
"	"	"	"	"	2,0—2,125	1,0	3	
"	"	"	"	"	1,975—2,15	1,5	3	
"	"	"	"	"	3,025—3,1	1,0	3	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	2	
"	"	"	"	"	4,0—4,1	1,5	2	35
IIIb	1,58	"	4	8	0	1,0	5	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,475—0,5	1,0	6	
"	"	"	"	"	0,45—0,5	1,5	7	
"	"	"	"	"	2,0—2,075	1,0	2	
"	"	"	"	"	1,925—2,05	1,5	3	29
IVa	"	"	"	2	0	1,0	7	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	6	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	3	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	3	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	1	32
								236

Serie	Eisen-prozent	Eiseneinlage		Abstand der Bügel e	Exzentrizität c	Höhe h	Anzahl der Versuche	
		Anzahl	Durchm.				einzeln	zus.
IVb	1,58	8	4	4	0	1,0	6	236
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	7	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	5	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	4	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	4	32
Va	1,96	"	4,5	2	0	1,0	6	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	6	
"	"	"	"	"	2	1,0	3	
"	"	"	"	"	2	1,5	3	
"	"	"	"	"	3	1,0	1	
"	"	"	"	"	3	1,5	1	32
Vb	"	"	"	4	0	1,0	6	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	5	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	7	
"	"	"	"	"	2	1,0	4	
"	"	"	"	"	2	1,5	3	
"	"	"	"	"	3	1,0	1	32
VIa	1,99	"	"	"	0	1,0	5	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	6	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	1	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	1	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	—	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	1	26
VIb	"	"	"	8	0	1,0	7	
"	"	"	"	"	0	1,5	6	
"	"	"	"	"	0,5	1,0	9	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	7	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	2	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	1	36
VIIa	2,42	{ 3 2	7 } 4,5	4	0,5	1,0	3	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	6	9
								403

Serie	Eisen-prozent	Eiseneinlage		Abstand der Bügel e	Exzentrizität c	Höhe h	Anzahl der Versuche	
		Anzahl	Durchm.				einzeln	zus.
VIIa	2,42	3	7	4	2,0	1,0	—	403
		2	4,5					
"	"	"	"	"	2,0	1,5	—	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	1	
VIIb	"	3	7	8	0,5	1,0	3	
"		2	5	"	0,5	1,5	3	
"	"	"	"	"	—	—	—	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	2	
"	"	"	"	"	—	—	—	
"	"	"	"	"	—	—	—	11
VIIIa	2,78	3	7	4	0,5	1,0	2	
"	"	5	4	"	0,5	1,5	2	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	—	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	—	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	5	
VIIIb	"	"	"	8	0,5	1,0	1	
"	"	"	"	"	0,5	1,5	3	
"	"	"	"	"	2,0	1,0	1	
"	"	"	"	"	2,0	1,5	—	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	1	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	3	20
IXa	3,05	3	7	2	0,5	1,0	2	
"	"	5	4,5	"	0,5	1,5	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	1	
"	"	"	"	"	3,0	1,5	3	14
IXb	2,78	3	7	4	0,5	1,0	3	
"	"	5	4	"	0,5	1,5	2	
"	"	"	"	"	3,0	1,0	1	
X	0	—	—	—	0	1,0	7	
"	"	—	—	—	0	1,5	7	
"	"	—	—	—	0,5	1,0	6	
"	"	—	—	—	0,5	1,5	5	
"	"	—	—	—	2,0	1,0	2	
"	"	—	—	—	2,0	1,5	2	
"	"	—	—	—	4,0	1,0	2	
"	"	—	—	—	4,0	1,5	1	32
								480

Die Säulen der Serien IV, V, und VI waren umschnürt.

Es mußte noch eine separate Vorrichtung zur Ausübung einer exzentrischen Belastung konstruiert werden.

Es wurden zwei Platten aus Stahl angefertigt (Abb. 2), die um einen walzenförmigen Zapfen drehbar waren. Die Köpfe der Säulen wurden oben und unten auf dieser Platte derart situiert, daß die beabsichtigte Exzentrizität ungefähr erzielt wurde. Der Mittelpunkt der Basis AB (Abb. 3) wurde auf der Säule bezeichnet, ebenso auf der Stahlplatte, und es wurde dann der Abstand der Mitten ab gemessen. Bei jeder Säule wurden 4 Ablesungen gemacht, zwei unten, zwei oben, und das arithmetische Mittel als Exzentrizität c in die Tabelle eingetragen und der Berechnung zugrunde gelegt.

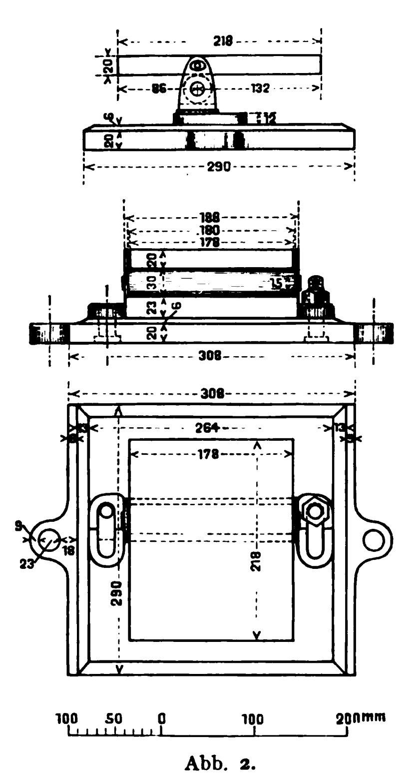


Abb. 2.

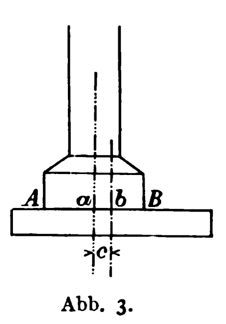


Abb. 3.

Es wurde beobachtet, daß die Säulen oft nicht ganz vertikal waren. Die vertikale Lage konnte dann nicht erlangt werden, da sonst die obere und untere Begrenzungsfläche der Säulen auf der Stahlplatte nicht gut aufsitzen würde. Es wurde dann die Abweichung vom Lot in der Weise gemessen, daß oben und unten der Abstand der Säule vom Rande der Stahlplatte gemessen wurde. Der Unterschied dieser Ablesungen war die Abweichung vom Lot. Diese wurde auch in das Protokoll eingetragen. Bei zentrischer Belastung ($c = 0$) wurden Kugellager in Anwendung gebracht.

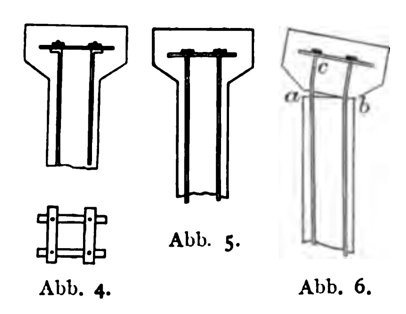


Abb. 4. Abb. 5. Abb. 6.

Bei früheren Versuchen für zentrische Belastung wurden die Eiseneinlagen oben abgebogen und darauf zwei Blechstreifen gelegt (Abb. 4). Bei den neuen Versuchen hat nun der Fabrikingenieur das Abschneiden der Enden der Eiseneinlagen angeordnet (Abb. 5), ohne mich zu verständigen, so daß die Säulen von 1 bis 102 infolgedessen nur für den zentrischen Druck oder nur für eine kleine Exzentrizität brauchbar waren, da sonst bei großer Exzentrizität die Säule in ab (Abb. 6) einen Riß zeigte und das Eisen in c einfach herausgezogen wurde, wobei der Kopf sich um die Kante b drehte.

Deshalb wurde später für die Säulen 103 bis 222 der Kopf noch besonders mit vier 8 mm dicken Rundeisen verstärkt, die unten und oben umgebogen wurden (Abb. 7). Zwei Rundeisen waren 290 mm, die zwei anderen 320 mm lang. Dadurch wurde erreicht, daß bei der Exzentrizität gleich 2 cm der Kopf nicht zerstört wurde, sondern gewöhnlich eine Ausknickung erfolgte. Bei $e = 4$ cm wurde gewöhnlich der Kopf in vertikaler Richtung abgeschert (Nr. 116 u. 117). Gewöhnlich geschieht das auch bei $e = 3$ cm (Nr. 122, 124, 125, 132).

Die Verstärkung der Köpfe mittels 4 Rundeisen hatte aber auch den Nachteil, daß das Eisen sehr den Raum in den Formen verengte und die entsprechende Einbringung und Stampfung des Betons erschwerte. Die Querschnitte, wo die abgebogenen Enden dieses Rundeisens in den Betonkörper hineinreichten, also 31 bis 34 cm von der unteren und oberen Fläche, waren besonders geschwächt und erfolgte gewöhnlich dort der Bruch (Nr. 120, 121, 123, 128, 137, 143, 144, 148, 181).

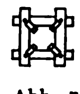


Abb. 7.

Um diesem Übelstande zu steuern, wurde von Nr. 223 bis ans Ende die Verstärkung der Köpfe durch Umschnürung mit einem Draht durchgeführt, was sich gut bewährte.

Die Anfertigung der Probesäulen geschah durch zwei geschulte Arbeiter, welche vom 20. Februar 1907 bis 1. Juni fast ununterbrochen tätig waren. Die Prüfung geschah ungefähr nach 6 Wochen, in der Zeit vom 4. April bis 10. Juli 1907. Die Versuche hat mein Assistent Ladislaus Łasinski überwacht und hat auch die Berechnung der Versuchsresultate nach meiner Anleitung durchgeführt, wofür ich ihm herzlich danke.

B. Vorversuche.

Es wurde 5 mm dicker Eisendraht geprüft. Man erhielt:

1.	$P = 860$ kg	15,00 vH.	Bruchfestigkeit	4383,3 kg/cm²
2.	$P = 810$ „	15,00 „	„	4128,4 „
3.	$P = 915$ „	20,00 „	„	4663,6 „
4.	$P = 950$ „	23,00 „	„	4842,0 „
5.	$P = 984$ „	18,25 „	„	4504,8 „

Versuche mit Zement ergaben für die zu den Säulen angewendete Mischung 1 : 3 (das ist 100 g Zement auf 300 g Normalsand) nach 28 Tagen und Aufbewahrung unter Wasser bei maschineller Stampfung.

	Zugfestigkeit	Druckfestigkeit
1. Faß	17,40	206,33 kg/cm²
2. „	16,56	208,66 „
3. „	18,72	220,75 „
Im Mittel	17,56	211,91 „

Druckversuche mit Betonwürfeln aus demselben Material, welches zur Anfertigung von Säulen verwendet wurde (1 : 3 mit Normalsand). Die Betonwürfel waren mit der Hand gestampft.

Zugfestigkeit

nach 7 Tagen unter Wasser . . . . 15,57 kg/cm²
„ 28 „ „ „ . . . . 17,40 „

Druckfestigkeit

nach 7 Tagen unter Wasser . . . . 182,3 kg/cm²
„ 28 „ „ „ . . . . 206,3 „

Weitere Versuche wurden nach einem Jahre gemacht. Man erhielt:

Würfel	Querschnitt cm²	Druck kg	Druckfestigkeit kg/cm²
1	15 · 15 = 225	53 000	235,55
2	„	58 400	259,55
3	„	61 500	273,33
4	„	46 600	207,11
5	„	61 000	271,11
6	„	67 700	300,88
Im Mittel	225	58 033	258,25

C. Berechnung der Bruchspannungen.

A. Allgemeine Formeln für symmetrische Querschnitte.

a) Querschnittsflächen.

Die Säulenquerschnittsflächen sind überall $F_b = 64$ cm².

Die reduzierten Querschnittsflächen der betoneisernen Säulen sind folgende:

Serie		Durchm.	F_e	$F_i = 64 + 15\,F_e$ cm²	x vH.
Serie I ab	4	5	$F_e = 0{,}785$,	$F_i = 64 + 15\,F_e = 75{,}8$ cm²,	$x = 1{,}23$ vH.
„ I c	4	4,5	0,636,	73,5	0,98 „
„ II ab	8	4,5	1,272,	83,0	1,96 „
„ III ab	8	5	1,571,	87,5	2,45 „
„ IV ab	8	4	1,005,	79,1	1,58 „
„ V ab	8	4,5	1,272,	83,0	1,96 „
„ VI ab	8	4,5	1,272,	83,0	1,96 „

b) Trägheitsmomente.

Es sei m die Anzahl der Eiseneinlagen, wobei diejenigen in der Schwerachse nicht mitgerechnet werden, f_e deren Querschnittsfläche, so ist

$$J = \frac{b h^3}{12} + 15\,m \cdot 3^2 f_e = 341{,}33 + 135 \cdot m \cdot f_e.$$

Für die Serie I ist $m = 4$, für II bis VI $m = 6$, also

für die Serie I $\quad J = 341{,}33 + 540\,f_e$ . . . . 1)

„ „ „ II bis VI $\quad J = 341{,}33 + 870\,f_e$ . . . . 2)

Nun ist

für $d = 4$ mm, $f_e = 0{,}126$ cm²,
„ $d = 4{,}5$ „ $f_e = 0{,}159$ „
„ $d = 5$ „ $f_e = 0{,}196$ „

somit

für die Serie I ab $J = 447{,}3$ cm⁴,
„ „ „ I c $J = 427{,}2$ „
„ „ „ II ab $J = 470{,}1$ „
„ „ „ III ab $J = 500{,}1$ „
ohne Umschnürung „ „ „ IV ab $J = 443{,}4$ „
„ „ „ „ „ V ab $J = 470{,}1$ „
„ „ „ VI ab $J = 470{,}1$ „

Nun ist

$$F_i = F_b + 15\,F_e,\quad i = \sqrt{\frac{J}{F_i}},\quad r = \frac{i^2}{e} = \frac{2\,i^2}{h} = \frac{2\,J}{h \cdot F_i}.$$

Somit ist

		F_i	i	r
	Serie I ab	75,8	2,426	1,47
	„ I c	73,5	2,412	1,45
	„ II ab	83,0	2,381	1,42
	„ III ab	87,5	2,390	1,43
ohne Umschnürung	„ IV ab	79,1	2,368	1,40
„ „	„ V ab	83,0	2,381	1,42
	„ VI ab	83,0	2,381	1,42

c) Betondruckspannungen in der Phase I, für $c < r$, ohne Knickung.

Die mittlere Spannung ohne Berücksichtigung der Eiseneinlagen

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_b} = \frac{P}{64};$$

mit Berücksichtigung der Eiseneinlagen

$$\sigma_b = \frac{P}{F_i} = \frac{P}{F_b + 15\,F_e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Die Betonspannungen in den äußeren Fasern bei exzentrischer Belastung

$$\sigma_{b_{1,2}} = \frac{P}{F_i} \pm \frac{M_e}{J} = \frac{P}{F_i} \pm \frac{P \cdot c \cdot e}{F_i \cdot i^2} = \frac{P}{F_i}\left(1 \pm \frac{c \cdot e}{i^2}\right) = \sigma_b\left(1 \pm \frac{c}{r}\right) = \sigma_b\,\frac{r \pm c}{r}.$$

Daher

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{b_1} &= \frac{r + c}{r} \cdot \sigma_b \\ \sigma_{b_2} &= \frac{r - c}{r} \cdot \sigma_b \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

d) Eisenspannungen in der Phase I, für $c < r$, ohne Knickung.

Bei der zentrischen Belastung

$$\sigma_e = 15\,\sigma_b \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Bei der exzentrischen Belastung erhalten wir aus der Abb. 8

$$\sigma_{b_1} - \sigma_b = \Delta\sigma$$

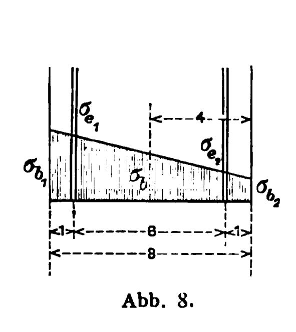


Abb. 8.

$$\sigma_{e_1} = 15\left(\sigma_{b_1} - \frac{\Delta\sigma}{4}\right) = 15\left(\sigma_{b_1} - \frac{\sigma_{b_1} - \sigma_{b_2}}{8}\right)$$
$$= 15\left(\frac{7}{8}\sigma_{b_1} + \frac{\sigma_{b_2}}{8}\right)$$
$$\sigma_{e_2} = 15\left(\sigma_{b_2} + \frac{\Delta\sigma}{4}\right) = 15\left(\sigma_{b_2} + \frac{\sigma_{b_1} - \sigma_{b_2}}{8}\right)$$
$$= 15\left(\frac{7}{8}\sigma_{b_2} + \frac{\sigma_{b_1}}{8}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{e_1} &= 13{,}1\,\sigma_{b_1} + 1{,}88\,\sigma_{b_2}\\ \sigma_{e_2} &= 1{,}88\,\sigma_{b_1} + 13{,}1\,\sigma_{b_2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

e) Die Spannungen bei exzentrischer Belastung, mit Berücksichtigung der Knickung in der ersten Phase.

Nennen wir die Betonspannung in diesem Falle ν, den Biegungspfeil f

$$f + c = \frac{c}{1 - \dfrac{l^2}{8\,\varepsilon \cdot J} \cdot P}$$

und

$$\left.\begin{aligned}\nu'' &= \frac{P}{F_i}\left(\frac{f+c}{r} + 1\right) = \sigma_b\,\frac{(f+c)+r}{r}\\ \nu' &= \frac{P}{F_i}\left(\frac{f+c}{r} - 1\right) = \sigma_b\,\frac{(f+c)-r}{r}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Nun ist $\varepsilon = 140\,000$, $l = 100$ oder 150 cm, also

$$\left.\begin{aligned}\text{für } l = 100,\quad f + c &= \frac{c}{1 - A \cdot P}\\ \text{,, } l = 150,\quad f + c &= \frac{c}{1 - B \cdot P}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

wobei die Logarithmen der Konstanten A und B sich, wie folgt, ergeben

	log A	log B
Serie I ab	0,300—5	0,652—5
„ I c	0,320—5	0,672—5
„ II ab	0,279—5	0,631—5
„ III ab	0,252—5	0,604—5
„ IV ab	0,305—5	0,656—5
„ V ab	0,279—5	0,631—5
„ VI ab	0,279—5	0,631—5

f) Betondruckspannungen in der Phase II, für $c > r$.

Zur Bestimmung der neutralen Achse erhalten wir hier eine kubische Gleichung

$$y^3 + 3\,py + 2\,q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

wobei $z_1 = y + u_1$ (Abb. 9).

Dann ist

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10)$$

Hierbei ist

$$p = -\{30\,[f(u_1 - 1) + f_1\,(u_1 - 4) + f_2\,(u_1 - 7)] + u_1^2\} \quad . \; . \quad 11)$$

und

$$q = -\{45\,[f(u_1 - 1)^2 + f_1\,(u_1 - 4)^2 + f_2\,(u_1 - 7)^2] + u_1^3\} \quad . \; . \quad 12)$$

Hierin ist

$$f = n\,\frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{1}{b} = \frac{n}{8} \cdot f_e$$

$$u_1 = \frac{d}{2} - c = 4 - c.$$

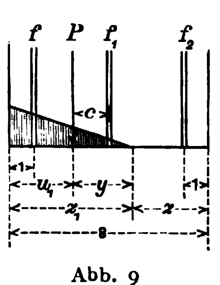


Abb. 9

Wenn wir diese Werte in 11) und 12) einsetzen, so ist

$$p = 30\,(B - Au_1) - u_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 13)$$

$$q = -[45\,(Au_1^2 + C) - 90 \cdot Bu_1 + u_1^3] \quad . \; . \quad 14)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} A &= f + f_1 + f_2 \\ B &= f + 4f_1 + 7f_2 \\ C &= f + 16f_1 + 49f_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 15)$$

Gleichung 15) gilt für den Fall, wo P zwischen f und f_1 angreift. Würde die Kraft eine entgegengesetzte Exzentrizität haben, also zwischen f_1 und f_2, so könnte man auch die Gleichungen 15) anwenden, nur müßte man f und f_2 vertauschen.

Die Werte A, B, C, p und q wurden nun berechnet.

Serie 1 ab.

II. Phase kommt hier nicht vor.

Serie 1 c.

$$f_1 = 0, \; f_2 = f = \frac{n \cdot f_e}{8} = \frac{2 \cdot 0{,}159}{8} = 0{,}03975$$

$$A = 2f = 0{,}0795$$
$$B = 8f = 0{,}3180$$
$$C = 50f = 1{,}9875$$

somit

$$\left.\begin{aligned} p &= -[u_1^2 + 2{,}385\,u_1 - 9{,}543] \\ q &= -[u_1^3 + 3{,}578\,u_1^2 + 89{,}44 - 28{,}62\,u_1] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 16)$$

Serie 2 ab, 5 ab und 6 ab.

$$f = f_2 = \frac{3 \cdot 0{,}159}{8} = 0{,}059625; \quad A = 2f + f_1 = 0{,}1590$$

$$f_1 = \frac{2 \cdot 0{,}159}{8} = 0{,}03975; \quad B = 8f + 4f_1 = 0{,}6360$$

$$C = 50f + 16f_1 = 3{,}6173$$

somit

$$\left.\begin{aligned} p &= -[u_1^2 + 4{,}77\, u_1 - 19{,}083] \\ q &= -[u_1^3 + 7{,}16\, u_1^2 + 166{,}78 - 57{,}24\, u_1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 17)$$

Serie 3 ab.

$$f = f_2 = \frac{3 \cdot 0{,}196}{8} = 0{,}0735; \quad A = 2f + f_1 = 0{,}196$$

$$f_1 = \frac{2 \cdot 0{,}196}{8} = 0{,}0490; \quad B = 8f + 4f_1 = 0{,}784$$

$$C = 50f + 16f_1 = 4{,}459$$

somit

$$\left.\begin{aligned} p &= -[u_1^2 + 5{,}88\, u_1 - 23{,}52] \\ q &= -[u_1^3 + 8{,}82\, u_1^2 + 200{,}66 - 70{,}56\, u_1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

Serie 4 ab.

$$f = f_2 = \frac{3 \cdot 0{,}126}{8} = 0{,}04725; \quad A = 2f + f_1 = 0{,}1260$$

$$f_1 = \frac{2 \cdot 0{,}126}{8} = 0{,}0315; \quad B = 8f + 4f_1 = 0{,}5040$$

$$C = 50f + 16f_1 = 2{,}8665$$

somit

$$\left.\begin{aligned} p &= -[u_1^2 + 3{,}78\, u_1 - 15{,}12] \\ q &= -[u_1^3 + 5{,}67\, u_1^2 + 128{,}99 - 45{,}36\, u_1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19)$$

Die Betondruckspannung in der zweiten Phase ist

$$\sigma_b' = \frac{\frac{P}{8}}{\frac{z_1}{2} + 15f\,\frac{z_1 - 1}{z_1} + 15f_1\,\frac{z_1 - 4}{z_1} - 15f_2\,\frac{7 - z_1}{z_1}}$$

$$= \frac{P}{8\left\{\frac{z_1}{2} + \frac{15}{z_1}\left[z_1\,(f + f_1 + f_2) - (f + 4f_1 + 7f_2)\right]\right\}}$$

$$= \frac{P}{8\left[\frac{z_1}{2} + \frac{15}{z_1}\,(A z_1 - B)\right]} = \frac{P}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

Die Eisenspannungen sind dann

$$\sigma_e' = 15\sigma_b'\,\frac{z_1 - 1}{z_1} = C_1 \cdot \sigma_b' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

$$\sigma_e'' = 15\sigma_b'\,\frac{z_1 - 7}{z_1} = -\,C_2 \cdot \sigma_b' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

Die Werte y, z_1, D_1, C_1 und C_2 wurden ausgerechnet und in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Serie 1 c.

$c = 2,\ y = 4{,}594,\ z_1 = 6{,}594,\ D = 30{,}12,\ C_1 = 12{,}73,\ C_2 = 0{,}922.$

Serie 2.

c	y	z_1	D	C_1	C_2
1,850	4,72	6,87	35,48	12,82	0,284
1,900	4,67	6,77	34,86	12,78	0,508
1,950	4,62	6,67	34,40	12,74	0,743
1,975	4,58	6,61	34,00	12,73	0,885
2,000	4,55	6,55	33,64	12,71	1,030
2,025	4,52	6,50	33,34	12,67	1,153
2,150	4,40	6,25	31,86	12,60	1,800
2,175	4,38	6,21	31,60	12,57	1,910

Serie 3.

c	y	z_1	D	C_1	C_2
1,925	4,704	6,78	36,80	12,78	0,486
1,950	4,670	6,72	36,32	12,76	0,623
1,975	4,65	6,68	36,16	12,75	0,716
2,000	4,63	6,63	35,84	12,74	0,837
2,050	4,58	6,53	35,26	12,70	1,080
2,075	4,55	6,48	34,96	12,68	1,205
2,125	4,51	6,38	34,32	12,64	1,455
2,150	4,48	6,33	34,04	12,62	1,588
3,000	4,17	5,17	26,00	12,10	5,30
3,025	4,15	5,13	25,75	12,06	5,46
3,075	4,16	5,09	25,44	12,05	5,63
3,100	4,18	5,08	25,36	12,04	5,67
4,000	4,45	4,45	20,20	11,61	8,60
4,100	4,50	4,40	19,76	11,58	8,86

Serie 4.

c	y	z_1	D	C_1	C_2
2,0	4,48	6,48	31,68	12,70	1,20
3,0	3,91	4,91	22,48	11,95	6,38

Serie 5 und 6 wie Serie 2.

g) Berücksichtigung der Umschnürung.

Die Abstände der Umschnürungsdrähte sind 2 und 4 cm.

Serie IV (Abb. 10).

$$r = r_1 + \frac{\delta}{2}, \quad r_1 = 0{,}4 \text{ cm}, \ \delta = 0{,}2 \text{ cm}, \ r = 0{,}3 \text{ cm}.$$

$$l = 4{,}6 + 2r\pi = 24 + 6{,}283 \cdot 0{,}3 = 25{,}885 \text{ cm}.$$

Die Länge des Drahtes auf der Höhe e_1 ist $l_1 = l \cdot \sec\alpha$; nun ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e_1}{4a}$$

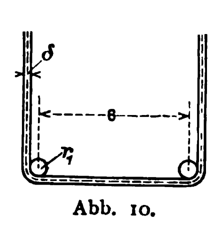


Abb. 10.

und $\sec\alpha = \sqrt{1 + \frac{e_1^2}{16a^2}} = \frac{\sqrt{576 + e_1^2}}{24}$

für $e_1 = 2$ cm, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{580}}{24} = 1{,}0034$

„ $e_1 = 4$ cm, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{592}}{24} = 1{,}0135$

Daher für $e_1 = 2$, $l_1 = 25{,}885 \cdot 1{,}0034 = 25{,}97$

„ $e_1 = 4$, $l_1 = 25{,}885 \cdot 1{,}0135 = 26{,}23$.

Der Kubikinhalt des Drahtes auf dieser Höhe

$$v = \frac{d^2\pi}{4} \cdot l_1 = 0{,}0314\, l_1$$

also Kubikinhalt des Drahtes

für $e_1 = 2$ cm, $v = 0{,}816$ cm³

„ $e_1 = 4$ cm, $v = 0{,}824$ cm³.

Die Fläche des idealen Stabes

für $e_1 = 2$, $F_{eu} = 0{,}408$, $30F_{eu} = 12{,}24$ cm²

„ $e_1 = 4$, $F_{eu} = 0{,}206$, $30F_{eu} = 6{,}18$ cm²

$F_i = 79{,}1$, $e_1 = 2$, $F_{iu} = 79{,}1 + 12{,}24 = 91{,}34$ cm²

$e_1 = 4$, $F_{iu} = 79{,}1 + 6{,}18 = 85{,}28$ cm².

α) Zentrische Belastung.

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_{iu}}, \text{ wobei } F_{iu} = F_b + 15F_e + 30F_{eu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

β) Exzentrische Belastung ohne Knickung.

$$\sigma_{b_{1,2}} = \frac{P}{F_{iu}} \pm \frac{P \cdot c \cdot e}{F_i \cdot i^2} = \sigma_{bu} \pm \sigma_{bi}\frac{c}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

Nun ist $r = 1{,}4$ cm und danach wurden die Spannungen σ_{bu} berechnet.

Serie V.

Hier ist

$$r = \frac{0{,}45}{2} + \frac{0{,}2}{2} = 0{,}325 \text{ cm}$$

$$l = 24 + 6{,}283 \cdot 0{,}325 = 26{,}04 \text{ cm}, \quad l_1 = l \cdot \sec\alpha$$

für $e_1 = 2$ cm, $\sec\alpha = 1{,}0034$, $l_1 = 26{,}04 \cdot 1{,}0034 = 26{,}131$ cm

„ $e_1 = 4$ cm, $\sec\alpha = 1{,}0135$, $l_1 = 26{,}04 \cdot 1{,}0135 = 26{,}394$ cm.

Nun ist $v = 0{,}0314\, l_1$, somit

für $e_1 = 2$, $v = 0{,}821$ cm², $F_{eu} = 0{,}4105$, $30F_{eu} = 12{,}32$ cm²

„ $e_1 = 4$, $v = 0{,}829$ cm², $F_{eu} = 0{,}2073$, $30F_{eu} = 6{,}22$ cm²

„ $e_1 = 2$, $F_{iu} = 83{,}08 + 12{,}32 = 95{,}4$ cm²

„ $e_1 = 4$, $F_{iu} = 83{,}08 + 6{,}22 = 89{,}3$ cm².

Die Spannungen sind dann nach 23) und 24) zu berechnen, wobei $r = 1{,}42$ cm.

b) Berechnung der Spannungen mit Berücksichtigung der Knickung nach der österreichischen Betonverordnung.

Serie I ab.

$i = 2{,}426$ cm, die Abminderungszahl

$$\alpha = 1{,}12 - 0{,}006 \cdot \frac{L}{i}.$$

Nun ist

$$P = \sigma_b \cdot F_i = \alpha \cdot \nu_1 \cdot F_i$$

wo nach

$$\nu_1 = \sigma_b \cdot \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

Für die exzentrische Belastung

$$\sigma_{b_1} = \nu_1 - \sigma_b \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

daher

$$\nu_1 = \sigma_{b_1} + \sigma_b \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Hierbei ist

für $L = 100$ cm, $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}145$

„ $L = 150$ cm, $\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}333$

Nach 25) und 26) wurde nun die Rubrik ν_1 berechnet.

Ebenso erhalten wir für

Serie I c.

$i = 2{,}41$, somit

für $L = 100$ cm, $\frac{L}{i} = 41{,}5$, $\alpha = 0{,}871$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}148$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}148$

„ $L = 150$ cm, $\frac{L}{i} = 62{,}2$, $\alpha = 0{,}747$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}339$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}339$.

Serie II.

$i = 2{,}38$

für $L = 100$ cm, $\frac{L}{i} = 42{,}0$, $\alpha = 0{,}868$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}152$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}152$

„ $L = 150$ cm, $\frac{L}{i} = 63{,}0$, $\alpha = 0{,}742$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}348$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}348$.

Serie III.

$i = 2{,}39$

für $L = 100$ cm, $\frac{L}{i} = 41{,}8$, $\alpha = 0{,}869$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}151$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}151$

„ $L = 150$ cm, $\frac{L}{i} = 62{,}7$, $\alpha = 0{,}744$, $\frac{1}{\alpha} = 1{,}344$, $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}344$.

Serie IV.

$i = 2,37$

für $L = 100$ cm, $\dfrac{L}{i} = 42,2$, $\alpha = 0,867$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,153$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,153$

„ $L = 150$ cm, $\dfrac{L}{i} = 63,3$, $\alpha = 0,740$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,351$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,351$.

Serie V und VI wie II.

Serie VII.

$i = 2,48$

für $L = 100$ cm, $\dfrac{L}{i} = 40,3$, $\alpha = 0,878$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,139$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,139$

„ $L = 150$ cm, $\dfrac{L}{i} = 60,5$, $\alpha = 0,757$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,321$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,321$.

Serie VIII und IXb.

$i = 2,42$

für $L = 100$ cm, $\dfrac{L}{i} = 41,3$, $\alpha = 0,872$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,147$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,147$

„ $L = 150$ cm, $\dfrac{L}{i} = 62,0$, $\alpha = 0,748$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,337$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,337$.

Serie IXa.

$i = 2,43$

für $L = 100$ cm, $\dfrac{L}{i} = 41,2$, $\alpha = 0,873$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,145$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,145$

„ $L = 150$ cm, $\dfrac{L}{i} = 61,7$, $\alpha = 0,750$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,333$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,333$.

Serie X.

$i = 2,31$

für $L = 100$ cm, $\dfrac{L}{i} = 42,3$, $\alpha = 0,866$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,155$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,155$

„ $L = 150$ cm, $\dfrac{L}{i} = 63,4$, $\alpha = 0,740$, $\dfrac{1}{\alpha} = 1,351$, $\dfrac{1}{\alpha} - 1 = 0,351$.

B. Allgemeine Formeln für unsymmetrische Armierung.

Es sind dies die Serien VII, VIII, IXa und IXb.

α) Berechnung für die Phase I.

Statische Momente (Abb. 11)

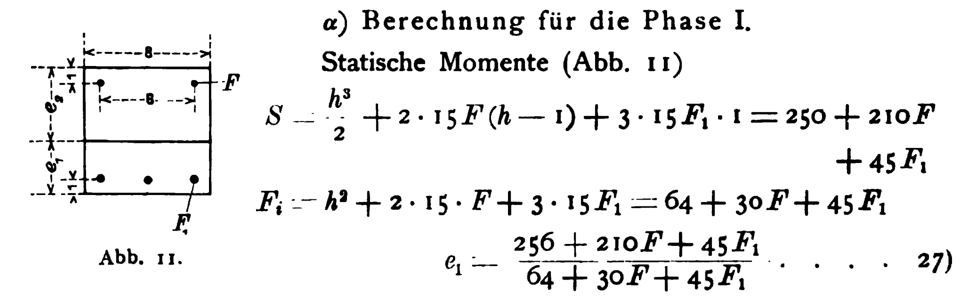


Abb. 11.

$$S = \frac{h^3}{2} + 2 \cdot 15 F (h - 1) + 3 \cdot 15 F_1 \cdot 1 = 250 + 210 F + 45 F_1$$

$$F_i = h^2 + 2 \cdot 15 \cdot F + 3 \cdot 15 F_1 = 64 + 30 F + 45 F_1$$

$$e_1 = \frac{256 + 210 F + 45 F_1}{64 + 30 F + 45 F_1} \quad \ldots \quad 27)$$

Mit Bezug auf die Schwerachse

$$J = \frac{8}{3}(e_1^3 + e_2^3) + 2 \cdot 15F(e_2 - 1)^2 + 3 \cdot 15F_1(e_1 - 1)^2$$

$$J = \frac{8}{3}(e_1^3 + e_2)^3 + 30F(e_2 - 1)^2 + 45F_1(e_1 - 1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

Aus Abb. 12

$$S = \frac{h^3}{2} + 15F\left[3(h - 1) + 2 \cdot \frac{h}{2}\right] + 3 \cdot 15 \cdot F_1 \cdot 1$$

$$= 256 + 435F + 45F_1$$

$$F_i = 64 + 5 \cdot 15 \cdot F + 3 \cdot 15 \cdot F_1 = 64 + 75F + 45F_1$$

Abb. 12.

daher

$$e_1 = \frac{256 + 435F + 45F_1}{64 + 75F + 45F_1} \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

und

$$J = \frac{8}{3}(e_1^3 + e_2^3) + 15F\left[3(e_1 - 1)^2 + 2\left(e_2 - \frac{h}{2}\right)^2\right] + 3 \cdot 15F_1(e_1 - 1)^2$$

und da

$$\left(e_2 - \frac{h}{2}\right)^2$$

sehr klein ist,

$$J = \frac{8}{3}(e_1^3 + e_2^3) + 45F(e_2 - 1)^2 + 45F_1(e_1 - 1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

Danach haben wir berechnet

nach 27)	Serie VII	$F = 0{,}196$,	$F_1 = 0{,}385$,	$e_1 = 3{,}61$,	$e_2 = 4{,}39$	cm
„ 28)	„ VIII	$F = 0{,}126$,	$F_1 = 0{,}385$,	$e_1 = 3{,}61$,	$e_2 = 4{,}39$	„
	„ IXa	$F = 0{,}159$,	$F_1 = 0{,}385$,	$e_1 = 3{,}68$,	$e_2 = 4{,}32$	„
	„ IXb wie VIII			$e_1 = 3{,}61$,	$e_2 = 4{,}39$	„

Dann die Trägheitsmomente

laut 28) Serie VII

$$J = \frac{8}{3}(\overline{3{,}61}^3 + \overline{4{,}39}^3) + 30 \cdot 0{,}196 \cdot \overline{3{,}39}^2 + 45 \cdot 0{,}385 \cdot \overline{2{,}61}^2 = 536{,}5 \text{ cm}^4$$

laut 30) Serie VIII und IXb

$$J = \frac{8}{3}(\overline{3{,}61}^3 + \overline{4{,}39}^3) + 45 \cdot 0{,}126 \cdot \overline{3{,}39}^2 + 45 \cdot 0{,}385 \cdot \overline{2{,}61}^2 = 534{,}3 \text{ „}$$

laut 30) Serie IXa

$$J = \frac{8}{3}(\overline{3{,}68}^3 + \overline{4{,}32}^3) + 45 \cdot 0{,}159 \cdot \overline{3{,}32}^2 + 45 \cdot 0{,}385 \cdot \overline{2{,}68}^2 = 549{,}5 \text{ „}$$

Serie IX ab ist umschnürt, wobei $e_1 = 2$ und 4 cm. Die Umschnürung wird wie unter g) S. 13 berücksichtigt.

Wir erhalten

Serie IXa $F_{iu} = F_i + 30 F_{eu} = 93{,}2 + 12{,}2 = 105{,}4$ cm²

„ IXb $F_{iu} = F_i + 30 F_{eu} = 90{,}8 + 6{,}2 = 97{,}0$ cm².

Nun berechnen wir i und r und erhalten

Serie VII $r = \frac{536{,}5}{2 \cdot 87{,}2} = 1{,}54$ cm, $i = \sqrt{\frac{536{,}5}{87{,}2}} = 2{,}48$ cm

„ VIII und IXb $r = \frac{534{,}3}{2 \cdot 90{,}8} = 1{,}47$ „ $i = \sqrt{\frac{534{,}3}{90{,}8}} = 2{,}42$ „

„ IXb $r = \frac{549{,}5}{2 \cdot 93{,}2} = 1{,}47$ „ $i = \sqrt{\frac{549{,}5}{93{,}2}} = 2{,}43$ „

Die Spannungen werden nach den Gleichungen 3), 4), 6), 7), 8), 23) und 24) berechnet.

β) Berechnung für die Phase II.

Die Berechnung geschieht aus den Gleichungen 10), 13), 14) und 15).

Serie VII

$$f = \frac{2 \cdot F}{8} = \frac{0{,}196}{4} = 0{,}049, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = \frac{3 F_1}{8} = \frac{3 \cdot 0{,}385}{8} = 0{,}1444$$

laut 15)

$$A = f + f_2 = 0{,}1934$$
$$B = f + 7 f_2 = 1{,}0498$$
$$C = f + 49 f_2 = 7{,}1296$$

Nach Einsetzung dieser Werte in 13) und 14)

$$p = -[u_1^2 + 5{,}80\, u_1 - 31{,}49] \quad \ldots \quad 31)$$
$$q = -[u_1^3 + 8{,}70\, u_1^2 + 320{,}61 - 94{,}48\, u_1] \quad \ldots \quad 32)$$

Serie VIII und IXb

$$f = \frac{3 \cdot 0{,}126}{8} = 0{,}0473, \quad f_1 = \frac{2 \cdot 0{,}126}{8} = 0{,}0315, \quad f_2 = \frac{3 \cdot 0{,}385}{8} = 0{,}1444$$

$$A = f + f_1 + f_2 = 0{,}2232$$
$$B = f + 4 f_1 + 7 f_2 = 1{,}1741$$
$$C = f + 16 f_1 + 49 f_2 = 7{,}6269$$

$$p = -[u_1^2 + 6{,}70\, u_1 - 35{,}22] \quad \ldots \quad 33)$$
$$q = -[u_1^3 + 10{,}04\, u_1^2 + 343{,}21 - 105{,}67\, u_1] \quad \ldots \quad 34)$$

Wenn jedoch die Kraft auf der Seite der dünneren Drähte angreift, so muß f mit f_2 vertauscht werden, — wir erhalten dann

$f = 0{,}1444$, $f_1 = 0{,}0315$, $f_2 = 0{,}0473$, $A = 0{,}2232$, $B = 0{,}6015$, $c = 2{,}9661$

daher

$$p' = [u_1^2 + 6{,}70\, u_2 - 18{,}05] \quad \ldots \quad 35)$$
$$q' = -[u_1^3 + 10{,}04\, u_1^2 + 133{,}48 - 54{,}14\, u_1] \quad \ldots \quad 36)$$

Serie IXa. Hier ist

$$f = \frac{3 \cdot 0{,}159}{8} = 0{,}0596, \quad f_1 = \frac{2 \cdot 0{,}159}{8} = 0{,}0398, \quad f_2 = \frac{3 \cdot 0{,}385}{8} = 0{,}1444$$

$$A = f + f_1 + f_2 = 0{,}2438, \quad B = f + 4f_1 + 7f_2 = 1{,}2196,$$
$$C = f + 16f_1 + 49f_2 = 7{,}772$$

$$p = -[u_1^2 + 7{,}31\, u_1 - 36{,}59] \quad \ldots \ldots \ldots \quad 37)$$

$$q = -[u_1^3 + 10{,}97\, u_1^2 + 349{,}74 - 109{,}76\, u_1] \quad \ldots \quad 38)$$

Die Spannungen wurden dann nach den Gleichungen 20), 21) und 22) berechnet.

Die Werte y_1, z_1, D, C_1 und C_2 wurden nun ausgerechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Serie VII.

c	y	z_1	D_1	C_1	$-C_2$
2,000	4,88	6,88	32,47	12,83	0,204
2,975	4,83	5,86	25,14	12,44	2,920
3,000	4,84	5,84	25,00	12,43	2,970
3,025	4,85	5,83	24,92	12,92	3,010

Serie VIII und IX b.

c	y	z_1	D_1	C_1	$-C_2$
2,075	4,71	6,64	32,2	12,7	0,81
2,900	4,71	5,81	25,8	12,4	3,07
2,925	4,72	5,80	25,7	12,4	3,11
2,950	4,72	5,77	25,5	12,4	3,21
2,975	4,73	5,76	25,4	12,4	3,24
3,000	4,74	5,74	25,3	12,4	3,28
3,025	4,75	5,73	25,2	12,4	3,32
3,050	4,76	5,71	25,0	12,4	3,40

Serie IX a.

c	y	z_1	D_1	C_1	$-C_2$
2,900	4,68	5,78	25,9	12,4	3,16
2,925	4,68	5,76	25,7	12,4	3,22
3,000	4,71	5,71	24,5	12,4	3,39
3,025	4,72	5,70	23,7	12,4	3,42

D. Protokoll der Versuche.

Nr	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
1	20. 2.	4. 4.	Ia	1,0	0	—	Der Fuß liegt nicht gut an, 10,5 Riß im Fuß, 12 knistert, im Kopf Risse, **13** abgeschert im Fuß, Abstand der Bügel in der Bruchstelle 6,0 cm.	
4[1]	20. 2.	4. 4.	Ia	1,0	0	—	Der Fuß und der Kopf zeigen Risse, 9 oben neue Risse, bröckelt ab, 11 knistert, **12,2** Abscherung im Kopf ($e = 6$ cm).	Wie bei 1.
7	20. 2.	4. 4.	Ia	1,5	0	—	9,3 Risse im Kopf, **10** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
8	20. 2.	4. 4.	Ia	1,5	0	—	9,5 knistert, Risse im Kopf, **11,1** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
9	21. 2.	5. 4.	Ia	1,5	0	—	Kopf und Fußfläche nicht parallel, 9 horizontale Risse unterhalb des Kopfes, 10 Risse im Kopf, **14** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
10	21. 2.	5. 4.	Ia	1,5	0	—	10 Risse im Kopf, 11 knistert, 13 bröckelt ab, **17,2** Riß im Fuß, nach einer Weile Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
11	21. 2.	5. 4.	Ia	1,0	0	—	7,5 knistert, 10 desgl., 13 Kopf bröckelt ab, 14 desgl., **14,5** Kopf abgeschert, Bügel gerissen.	Wie bei 1.
12	21. 2.	5. 4.	Ia	1,0	0	—	Kopf und Fuß nicht parallel, 8,2 knistert, 9 desgl., 13 Riß im Kopf, 14 knistert, bröckelt ab, **15,7** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
13	21. 2.	5. 4.	Ia	1,5	0	—	7 knistert, 8 desgl, 10 Riß im Kopf, **12** abgeschert.	Wie bei 1.
14	21. 2.	5. 4.	Ia	1,5	0	—	Risse im Kopf und Fuß, 6,5 knistert, 7 neuer Riß im Kopf, **11,95** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
15	22. 2.	6. 4.	Ia	1,5	5,0	—	11 knistert, 12 desgl., biegt sich aus, 13, 14 knistert, **15** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
16	22. 2.	6. 4.	Ia	1,5	$\frac{5+5+7+5}{4}$ 5,5	4	8 knistert, Riß im Kopf, **10** Kopf abgeschert, fällt ab.	Wie bei 1.

[1]) Nr. 2, 3, 5 und 6 verdorben.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
17	22. 2.	6. 4.	Ia	1,0	$\frac{5+7+6+4}{4}$ 5,5	—	Riß im Kopf, bis 10,8 still, bröckelt ab, **11,1** unterhalb des Kopfes abgeschert, Verdrehung des Kopfes.	Gerade durch den Schaft.
18	22. 2.	6. 4.	Ia	1,0	$\frac{5+6+6+3}{4}$ 5,0	—	11 knistert, 12 still, **13** knistert, Riß im Kopf, abgeschert.	13 18 Schief durch den Schaft.
19	22. 2.	6. 4.	Ia	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	21	9 Riß im Kopf, 10 knistert, 11 knistert leise, **13** Geräusch, nach 1,5 Minuten gebrochen.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
20	22. 2.	6. 4.	Ia	1,5	6, 7, 5, 5 5,75	5	12 Riß im Kopf, Anfang der Ausbiegung, knistert, **13** ausgeknickt in der Mitte.	Wie bei 17 im Abstand von 44 cm.
21	23. 2.	8. 4.	Ia	1,5	5,0	3	Fuß rissig, 12 knistert, 13 desgl., 14 knistert leise, 15 biegt sich aus, **15,1** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 59 cm.
22	23. 2.	8. 4.	Ia	1,5	5, 5, 3, 8 5,25	5	12 knistert leise, 13,2 desgl., 14 biegt sich aus, **14,1** Knall, ausgeknickt, an der Bruchstelle $c = 8$ cm statt 4 cm	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
23	23. 2.	8. 4.	Ia	1,0	9, 5, 2, 5 5,25	1	12 knistert, 13 desgl., 14 still, 15,5 knistert, 16,5 still, 17,6 knistert, 19,8 knistert, Riß im Kopf, **19,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 48,5 cm.
24	23. 2.	8. 4.	Ia	1,0	4, 6, 6, 2 4,5	1	Fuß rissig, 7 knistert unter der Platte, 9 knistert, 10 desgl., 11 Riß im Kopf, **11,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 12,5 cm.
25	25. 2.	9. 4.	Ia	1,0	5, 5, 8, 5 5,75	1	Fuß rissig, 10 knistert, 11 desgl., 12 neue Risse im Fuß, 13 Riß in der Seite, **16,5** knickt aus in der Mitte.	Wie bei 17 im Abstand von 43 cm.
26	25. 2.	9. 4.	Ia	1,0	5, 5, 7, 8 6,25	5	12 knistert, Risse am Fuß, 13 still, **14,05** Bruch.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 11 cm.
27	25. 2.	9. 4.	Ia	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	6	**9,6** knickt aus, an der Bruchstelle Beton schlecht gerammt.	Wie bei 17 im Abstand von 49 cm.
28	25. 2.	9. 4.	Ia	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	5	**12,5** Bruch unterhalb des Kopfes, Bügel in größerer Entfernung.	Wie bei 18 im Abstand von 18 + 16 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
29	25.2.	9.4.	Ia	1,0	5, 5, 5, 7 5,5	3	12 leiser Knall, 12,5 still, 15 leiser Knall, **15,25** knickt aus (bei 15 große Ausbiegung in der Richtung des Zapfens).	Wie bei 17 im Abstand von 33 cm.
30	25.2.	9.4.	Ia	1,0	5, 5, 6, 5 5,25	12	Kopf und Fuß nicht scharfkantig, ein Riß in der Mitte infolgedessen, daß die Säule vor der Prüfung umgestürzt ist, 9 knistert, 10, 11 desgl., 11,5 knistert stark, 12 bröckelt ab, 13 bröckelt ab an der Rißstelle, 13,5 still, 14 knistert, **14,5** knickt aus an der Rißstelle.	Wie bei 17 im Abstand von 24 cm.
31	26.2.	10.4.	Ia	1,5	7, 6, 7, 5 6,25	7	10 Riß im Fuß, knistert leise, 11 bis 13 Knall, 13 biegt sich aus, **13,55** knickt aus	Wie bei 17 im Abstand von 33 cm.
32	26.2.	10.4.	Ia	1,5	5, 4, 5, 13 6,75	5	9,5 knistert, 10 desgl., **12,45** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 22 cm.
33	26.2.	10.4.	Ib	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	13	10 Riß im Fuß, 11 leiser Knall, **11,8** plötzliche Ausknickung, Bügelentfernung größer.	Wie bei 17 im Abstand von 59 cm.
34	26.2.	10.4.	Ib	1,5	5, 5, 7, 4 5,25	—	9 knistert, 10, 11 desgl., **11,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 76 cm.
35	26.2.	10.4.	Ib	1,5	5, 5, 3, 8 5,25	1	10 knistert, 11 bis 12 still, 13 knistert, Riß im Kopf, **13,45** Kopf abgeschert, Beton in der Bruchstelle minder gut.	Wie bei 18 im Abstand von 6 + 11 cm.
36	26.2.	10.4.	Ib	1,0	5, 5, 5, 8 5,75	7	10 knistert, 11 knistert leise, 12 desgl., 13 knistert, **13,7** knickt aus, Bügel etwas mehr entfernt.	Wie bei 17 im Abstand von 40 cm.
37	29.2.	11.4.	Ib	1,5	5, 5, 11, 6 6,75	2	9 Knall, 10, 11 desgl., **12** knickt aus, Bügel mehr entfernt.	Wie bei 17 im Abstand von 18,5 cm.
38	27.2.	11.4.	Ib	1,0	5, 5, 8, 6 6,0	4	10 knistert, Riß im Kopf, **10,75** knickt aus, Bügelentfernung e = 10 cm.	Wie bei 17 im Abstand von 55 cm.
39	27.2.	11.4.	Ib	1,0	5, 5, 8,5, 5 5,88	11	10 knistert, 11 still, 12 leiser Knall, 13 biegt sich aus, knistert, 14 still, 14,5 knistert, **14,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 66 cm.
40	27.2.	11.4.	Ib	1,5	5, 5, 4, 6 5,0	2	10 Riß im Kopf, knistert, biegt sich aus, **11,3** Bruch, Fuß beschädigt.	Wie bei 17 im Abstand von 68 cm.
41	27.2.	11.4.	Ib	1,0	4, 4, 7, 7 5,5	0	10 knistert, 11 desgl., **11,7** knickt aus, Bügelentferung 9 cm.	Wie bei 17 im Abstand von 37 cm.
42	27.2.	11.4.	Ib	1,5	5, 5, 3, 7 5,0	6	6 knistert, **7** Fuß zertrümmert, trägt nur 4,8, Beton minderer Qualität.	Wie bei 17 im Abstand von 6,5 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
43	28. 2.	12. 4.	Ib	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	2	10 knistert, 11 bis 13 desgl., 13,5 Riß im Kopf, 14 knistert, 14,5 bis 15 knistert, **15,5** Riß im Halse, ausgeknickt auf derselben Seite, wie die Kraft.	Wie bei 17 im Abstand von 54 cm.
44	28. 2.	12 4.	Ib	1,0	5, 5, 1, 10 5,25	6	10,5 bis 13,5 knistert, **14,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 21 cm.
45	28. 2.	12. 4.	Ib	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	16	Säule krumm, 11 knistert, **11,94** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 57 cm.
46	28. 2.	12. 4.	Ib	1,5	6, 7, 2, 6 5,25	8	Fuß rissig, **9,5** neue Risse im Fuß, Risse im Kopf, knickt aus, ausgebogen in senkrechter Richtung.	Wie bei 17.
47	28. 2.	12. 4.	Ib	1,0	5, 5, 4, 5 4,75	6,5	Kopf beschädigt, 10 bis 13 knistert, biegt sich aus, bröckelt ab, Risse im Kopf, **13,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Ab stand von 44 cm.
48	28. 2.	12. 4.	Ib	1,0	5, 5, 3, 8 5,25	4	10 knistert, 12 desgl., Risse im Kopf, 13 biegt sich aus, **14** knickt aus.	Wie bei 18 im Abstand von 14,5 cm.
49	1. 3.	13. 4.	Ib	1,0	0	7	Fuß rissig, 10 bis 14 knistert, **14,8** abgeschert, Bügel weiter entfernt.	Wie bei 18 im Abstand von 44,5 cm.
50	1. 3.	13. 4.	Ib	1,0	0	—	10 knistert, 12 desgl., Riß im Kopf, bröckelt ab, 13 weitere Risse im Kopf, 14 bis 15,3 knistert, **15,5** abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 59 cm.
51	1. 3.	13. 4.	Ib	1,0	0	—	Bei **9,7** knistert, abgeschert.	—
52	1. 3.	13. 4.	Ib	1,5	0	—	Fuß liegt nicht gut an, 10 knistert, 11 Risse im Fuß, 12 knistert im Kopf, 13 knistert, 14 still, **17,35** plötzlicher Knall, abgeschert, Kopf zertrümmert, Bügel weiter entfernt.	Wie bei 18 im Abstand von 42 + 54 cm.
53	1. 3.	13. 4.	Ib	1,5	0	—	Bei **8,7** abgeschert, Beton minder gut.	Wie bei 18 im Abstand von 26 + 14 cm.
54	1. 3.	13. 4.	Ib	1,5	0	—	13 still, **14,15** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 54 cm.
55	2. 3.	15. 4.	Ib	1,0	0	—	Fuß liegt nicht gut an, 10 knistert, 11 leiser Knall, 12 bis 15 knistert, 16 still, **17** wird abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 40 + 60 cm.
56	2. 3.	15. 4.	Ib	1,0	0	—	10 Risse im Kopf und Fuß, 12 weitere Risse im Fuß, 14 Risse im Kopf, bröckelt ab, 14,5 knistert, Risse mehren sich, **17** abgeschert.	Wie bei 1.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
57	2. 3.	15. 4.	Ib	1,0	0	—	10 knistert, 11 bis 14 desgl., 14 Riß im Kopf, 15 knistert, Risse, **15,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 24 + 36 cm.
58	2. 3.	15. 4.	Ib	1,5	0	—	10 knistert, **10,85** ausgeknickt, Beton zu trocken.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.
59	2. 3.	15. 4.	Ib	1,5	0	—	11 knistert im Kopf, Riß, **11,1** abgeschert, Beton minderer Qualität.	Wie bei 18 im Abstand von 84 + 74 cm.
60	2. 3.	15. 4.	Ib	1,5	0	—	10 knistert, 12 desgl., **12,05** abgeschert, Beton wie vorher.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 19 cm.
61	4. 3.	17. 4.	X	1,0	5, 5, 5, 6 5,25	14	6 knistert, 7 desgl., biegt sich aus, 8 desgl., 9 bis 12 knistert, **13** nach drei Minuten gebrochen und abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 18 cm.
62	4. 3.	16. 4.	Ib	1,0	4, 6, 5, 5 5,0	20	Fuß beschädigt, 10 Risse im Kopf, bröckelt ab, Risse im Fuß, bröckelt, **10,65** Abscherung im Kopf.	Wie bei 1.
63	4. 3.	16. 4.	Ib	1,0	5, 5, 4, 7 5,25	—	Fuß nicht scharfkantig, 10 Risse im Fuß, 11 knistert, **11,35** knickt aus, Bügel verschoben bis auf 10 cm.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
64	4. 3.	15. 4.	Ib	1,5	0	—	Fuß liegt nicht gut an, rissig, 11 knistert, 12 desgl., 13 Risse im Kopf, 14 knistert, **15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 48,5 + 33 cm.
65	4. 3.	15. 4.	X	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	—	**9,5** zerfällt in vier Stücke fast gleicher Höhe.	—
66	4. 3.	15. 4.	Ib	1,5	0	—	Fuß liegt nicht gut an, Fuß und Kopf ungenau ausgeführt, 9 horizontaler Riß im Fuß, vertikaler im Kopf, 10 knistert, bröckelt ab, 11 desgl., weitere Risse im Fuß, auch vertikal, 12 desgl. im Kopf, 13 bröckelt ab, **13,04** abgeschert im Fuß.	Wie bei 1.
67	5. 3.	16. 4.	IIIa	1,0	5, 5, 8, 3 5,25	1	10 knistert, bröckelt ab, **11,65** im Hals verbogen, abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 11 cm.
68	5. 3.	16. 4.	IIIa	1,0	5, 5, 13, 2 6,25	6	Der Fuß liegt nicht gut an, 9 knistert, **9,1** knickt aus im Hals.	Wie bei 17 im Abstand von 14 cm.
69	5. 3.	16. 4.	IIIa	1,0	5, 5, 4, 6 5,0	—	10 knistert, 11 desgl., **12** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 22 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
70	5. 3.	16. 4.	IIIa	1,5	6, 5, 5, 5 5,25	22	Fuß rissig, Kopf liegt nicht gut an, 6,8 knistert, biegt sich links aus, **7,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.
71	7. 3.	19. 4.	X	1,0	5, 5, 3, 6 4,75	4	8 knistert im Innern, 9 still, nach 1/2 Minute knistert, 10 desgl., **10,15** abgeschert, der Kopf fällt auseinander.	8 Druckkegel im Abstand von 6 cm.
72	7. 3.	19. 4.	X	1,0	5, 5, 7, 3 5,0	5	**12** Fuß zerdrückt.	Wie bei 1.
74[1])	7. 3.	19. 4.	X	1,5	5, 4, 5, 5 4,75	18	8 knistert, biegt sich in entgegengesetztem Sinne aus, **11,8** Kopf plötzlich abgeschert.	Wie bei 1.
75	7. 3.	19. 4.	X	1,5	5, 6, 5, 4 5,0	7	8 im Kopf vertikaler Riß, **9** nach einer Minute Kopf abgeschert, der Fuß liegt nicht gut an.	Wie bei 1.
76	7. 3.	19. 4.	X	1,5	5, 5, 6, 4 5,0	19	6,25 vertikaler Riß im Kopf, 7 knistert, **9,9** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
77	8. 3.	20. 4.	X	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	3	**13,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 42 cm.
78	8. 7.	20. 4.	X	1,0	6, 6, 5, 6 5,75	0	**13** plötzlich abgeschert im Kopf, welcher auseinanderfällt.	—
79	8. 3.	20. 4.	X	1,0	22, 23, 21, 26 23	0	**3,7** gebrochen.	Wie bei 17 im Abstand von 15 cm.
80	8. 3.	20. 4.	X	1,0	20, 21, 22, 20 20,75	6	2,5 knistert, 2,8 knistert still, 3 still, 6 Risse im Fuß, 6,8 knistert, **6,9** plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.
81	8. 3.	20. 4.	X	1,5	20, 20, 20, 20 20	1	5 biegt sich nach vorn aus, **5,25** nach 1/2 Minute plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 62 cm.
82	8. 3.	20. 4.	X	1,5	19, 21, 20, 20 20	11	5 biegt sich stark aus, 6 stärker ausgebogen, **6,8** plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 77 cm.
83	8. 3.	20. 4.	X	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	21	10 knistert, 11 still, 12 knistert, der Fuß bröckelt ab, **12,5** ausgebogen, plötzlicher Knall, in zwei Punkten gebrochen.	Wie bei 17 im Abstand von 42 cm.
84	2. 5.	17. 6.	X	1,5	0	—	**8,8** plötzlicher Knall, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 25 cm.

[1]) Nr. 73 verdorben.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
85	9. 3.	22. 4.	X	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	34	1 Risse im Hals, 2 knistert, 3 desgl., 5 Riß im Hals, biegt sich aus, **5,68** gebrochen.	—
86	9. 3.	22. 4.	X	1,0	42, 40, 42, 39 40,1	—	**0,9** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 37 cm.
87	9. 3.	22. 4.	X	1,0	41, 40, 43, 37 40,25	2	**0,95** ausgeknickt.	Desgl.
88	9. 3.	23. 4.	X	1,0	0	0	11 knistert, **11,65** Fuß abgeschert.	Wie bei 1.
89	9. 3.	23. 4.	X	1,0	0	—	10 knistert, im Kopf und Fuß vertikale Risse, 12 knistert, bröckelt ab, Risse vergrößern sich, 13 Fuß fällt auseinander nach 35 Sekunden, **13,2** abgeschert im Fuß.	Wie bei 1.
90	12. 3.	23. 4.	X	1,0	0	—	10 knistert, Kopf und Fuß rissig, 11 Geräusch, 12 still, 13 vertikale Risse im Fuß, 14 still, 15 beiderseitige Risse im Kopf, **15,32** Kopf abgeschert und zertrümmert.	Wie bei 1.
91	2. 5.	17. 6.	X	1,5	0	—	12 Risse oben, **12,85** abgeschert unten.	Wie bei 1.
92	2. 5.	17. 6.	X	1,5	0	—	**10,8** abgeschert im Fuß.	Wie bei 71 im Kopf.
93	9. 3.	20. 4.	X	1,5	40, 40, 40, 40 40,0	14	0,2 knistert, 0,3 still, **1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 93 cm.
94	3. 5.	17. 6.	X	1,5	0	—	**10,2** Knall, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 26 + 12 cm.
95	11. 5.	23. 4.	X	1,0	0	—	7,2 Riß im Fuß, knistert, **8** still, 9 desgl. knistert, **9,5** knistert, oben nach ½ Minute abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 45 + 67 cm.
96	11. 3.	23. 4.	X	1,0	0	—	13 leise knistert, Riß im Fuß, 14 still, **15,6** plötzlich abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 48 cm.
97	11. 3.	23. 4.	X	1,0	0	—	11 knistert, bröckelt ab, vertikaler Riß im Kopf, 12 knistert, 13 bröckelt ab, **13,4** plötzlich abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 45 + 65 cm.
98	11. 3.	23. 4.	X	1,0	0	—	11 knistert, 12 still, 14 kleiner Knall, 15 still, 16 Fuß bröckelt ab, **16,75** Fuß kegelförmig abgeschert.	Wie bei 71 im Kopf.
99	12. 3.	23. 4.	X	1,5	0	—	4 Riß im Kopf, 7 knistert, 7,5 Risse im Hals, bröckelt ab, **8** knistert, Fuß kegelförmig abgeschert.	—

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
101[1]	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,5	0	—	12 horizontale Risse im Fuß, 13 knistert im Hals, horizontale Risse, 14 knistert, **14,15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 52 + 60 cm.
102	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,5	0	—	Fuß rissig, **11,9** knistert, bröckelt ab, wird abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 60 + 68 cm.
103	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,5	0	—	10 Fuß und Kopf rissig, 11 knistert, dumpfer Knall, **12** knistert, der Fuß bröckelt ab, nach 1 Minute wird abgeschert, hält noch 7.	Wie bei 1.
104	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,5	0	—	10 knistert, 11 und 12 desgl., Riß im Kopf, 13 knistert, 14 knistert im Kopf, 15 starker Knall, bröckelt ab, **15,2** abgeschert.	Wie bei 1.
105	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,0	0	—	10 Risse im Kopf und Fuß, **11,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 30 cm.
106	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,0	0	—	Fuß schlecht angefertigt, **6,2** Fuß flach abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 10 cm.
107	12. 3.	24. 4.	IIIa	1,0	0	—	7 Risse im Kopf, 8 knistert, 9 desgl., **9,9** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22 + 35 cm.
108	13. 3.	25. 4.	IIIa	1,0	0	—	11 Riß im Kopf und Fuß, 13 knistert, **13,7** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 34 cm.
109	13. 3.	25. 4.	IIIa	1,0	0	—	10 knistert, 11 desgl., im Fuß und im Kopf horizontale und vertikale Risse, 12 knistert, **12,5** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 32 + 24 cm.
110	13. 3.	25. 4.	IIIa	1,0	0	—	Schlecht ausgeführt, rissig, **7,9** knistert, bröckelt ab, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 32 + 28 cm.
111	13. 3.	26. 4.	IIIa	1,5	0	—	10 im Fuß vertikale Risse, oberer Hals rissig, 11 knistert, 12 desgl., **12,85** biegt sich aus, wird abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 71 + 83 cm.
112	13. 3.	26. 4	IIIa	1,5	0	—	Kopf ausgebessert, Fuß beschädigt, 10 knistert, 11 desgl., im Fuß horizontale Risse, bröckelt ab, **12,08** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 37 cm.
113	14. 3.	26. 4.	IIIa	1,5	20, 23, 20, 22 21,2	2	3,5 knistert, biegt sich aus, 4 noch mehr, 4,5 knistert, 5 sehr ausgebogen, **5,71** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 24 cm.
114	3. 5.	17. 6.	X	1,5	0	—	**4** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
115	13. 3.	23. 4.	X	1,5	0	—	7 knistert, 8 ist still, **9** plötzlich abgeschert oben und unten.	Wie bei 17 im Abstand von 12 + 30 cm.

[1]) Nr. 100 verdorben.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
116	14. 3.	26. 4.	IIIa	1,5	40, 38, 40, 42 40,0	1	1,5 knistert, **1,9** knistert stark, der Kopf zertrümmert.	Wie bei 1.
117	14. 3.	26. 4.	IIIa	1,5	40, 44, 40, 40 41,0	4	1,5 knistert, 2 desgl., umgebogen, 2,5 knistert leise, 3,2 desgl., **3,3** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
118	14. 3.	26. 4.	IIIa	1,5	20, 22, 21, 23 21,5	—	4,3 ausgebogen, 5 knistert, 5,5 still, **6,48** stark ausgebogen, Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
119	14. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	6, 5, 5, 5 5,25	6	11 knistert, 12 desgl., **12,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
120	14. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	21, 23, 19, 20 20,75	2	7 leiser Knall, stark ausgebogen, **7,45** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
121	14. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	4, 5, 3, 7 4,75	—	12 knistert, **13,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
122	14. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	27, 31, 30, 33 30,25	—	2 Risse im Kopf, 3 knistert, 4 desgl., 4,5 still, 5,6 weitere Risse in beiden Köpfen, 6 knistert, **6,2** Fuß vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
123	15. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	22, 20, 23, 20 21,25	0	8,4 knistert, 9 desgl., Risse im Fuß, 9,5 ausgebogen, knistert, **10,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm.
124	15. 3.	27. 4.	IIIa	1,0	30, 32, 31, 30 31,8	—	**1** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
125	15. 3.	27. 4.	IIIa	1,5	30, 30, 30, 30 30,0	28	3,05 Fuß rissig, 3,6 stark ausgebogen, 3,8 knistert, 4 desgl., Kopf rissig, 4,5 knistert, **4,52** Fuß vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
126	15. 3.	27. 4.	IIIa	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	1	Fuß beschädigt, 8,5 nach vorn ausgebogen, 11 knistert, 11,5 still, 13 knistert, **15** knistert, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 67 cm.
127	15. 3.	27. 4.	IIIa	1,5	30, 30, 30, 30 30,0	1	**1,1** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
128	15. 3.	30. 4.	IIIa	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	5	12 knistert, biegt sich aus, 13 desgl., 14 Riß im Kopf und Fuß, nach einer Minute bei **14,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
129	16. 3.	30. 4.	IIIa	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	5	9 horizontale Risse im Fuß, 9,5 knistert, 10,5 desgl., 11,5 desgl., stark ausgebogen, 14,5 vertikaler Riß im Fuß, **15,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm.
130	16. 3.	30. 4.	IIIa	1,5	20, 20, 17, 22 19,75	2	4 knistert, 6 Riß oben, **6,5** vertikale Abscherung im Kopf.	Wie bei 1.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
131	16. 3.	29. 4.	IIIa	1,0	5, 5, 6, 3 4,75	12	12 knistert, 13 ausgebogen, 14 knistert, Riß im Fuß, 15 nach einer Minute bei **15,2** ausgeknickt, Entfernung der Bügel 3,5.	Wie bei 17 im Abstand von 53 cm.
132	16. 3.	29. 4.	IIIa	1,0	30, 31, 30, 33 31,0	18	3 Risse im Kopf und Fuß, **3,15** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
133	16. 3.	29. 4.	IIIa	1,0	17, 23, 20, 20 20,0	10	5,5 knistert, 6,5 still, 7 biegt sich aus, 7,5 knistert, 8 desgl., Risse im Fuß, 8,5 knistert, stark ausgebogen, **9,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
134	18. 3.	29. 4.	IIIb	1,0	20, 21, 21, 21 20,75	14	3 knistert, 4 desgl., 4,5 biegt sich aus, 5 still, 6,5 knistert, 7 still, 7,5 knistert, Risse im Kopf, **7,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 41 cm.
135	18. 3.	29. 4.	IIIb	1,0	20, 20, 16, 24 20,0	13	5 knistert, 6,7 desgl., **7,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 53 cm.
136	18. 3.	29. 4.	IIIb	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	—	4,5 knistert, 6 desgl, 7 still, 7,5 knistert, 8,5 still, 10,5 knistert, 11 bröckelt ab, **11,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
137	18. 3.	30. 4.	IIIb	1,5	20, 20, 20, 22 29,5	8	3 knistert, horizontale Risse im Fuß, vertikale im Kopf, 4 knistert, 5 desgl., im Kopf größere Risse, 6 knistert, **7,75** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
138	18. 3.	30. 4.	IIIb	1,5	21, 21, 17, 18 19,2	—	**6,95** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
139	18. 3.	30. 4.	IIIb	1,5	20, 21, 18, 19 19,5	23	3,5 knistert, **8,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31,5 cm.
140	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,5	5, 5, 5, 5 5	20	12 leiser Knall, 14 knistert, **15,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
141	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,5	5, 5, 6, 4 5,0	5	8 Risse im Kopf, horizontale Risse im Fuß, 9 knistert, 10 still, 11 knistert, 12 still, 13 knistert stark, **14,5** knickt aus.	Wie bei 18 im Abstand von 29 + 32 cm.
142	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,5	5, 5, 4, 6 5,0	1	10 knistert, **13,65** knickt plötzlich aus.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 32 cm.
143	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,0	5, 6, 3, 5 4,75	5	11 knistert, 12 Risse im Kopf, 14 weitere Risse im Kopf, **15,6** plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 68 cm.
144	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,0	5, 6, 3, 5 4,75	5	10 knistert, **11** knickt allmählich aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
145	19. 3.	1. 5.	IIIb	1,0	5, 5, 3, 8 5,25	2	10 knistert, Risse im Kopf, 13 Risse im Fuß, **15,05** seitlich verdrückt (abgeschert?).	Wie bei 18 im Abstand von 14 + 12 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität e mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
146	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,0	5, 5, 8, 4 5,5	8	12 knistert, **12,75** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
147	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,0	5, 5, 7, 2 4,75	18	10,2 Risse im Kopf, 12 knistert, 13,2 still, 15 knistert, 15,5 still, 16 knistert, **16,75** plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
148	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,0	5, 5, 4, 6 5,0	20	10 knistert, 11 desgl., 12 still, 13 Risse im Kopf, 15 knistert, **15,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm.
149	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,5	5, 5, 3, 5 4,5	19	10 knistert, 11 desgl., Risse im Kopf, 12 knistert, **13** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
150	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,5	8, 2, 5, 5 5,0	18	13 knistert, **14,075** Knall, Kopf vertikal abgeschert, 5 hält längere Zeit.	Wie bei 1.
151	20. 3.	2. 5.	IIIb	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	6	11 Risse im Kopf, **11,75** lauter Knall, Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
152	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,5	0	—	11 knistert, 12 Risse im Fuß, **16,3** nach einer Minute abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 30 cm.
153	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,5	0	—	10 horizontaler Riß im Fuß, 12 knistert, **15,5** abgeschert.	Wie bei 71 im Abstand von 27 cm.
154	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,5	0	—	Riß im Kopf, 11 knistert, 14 Riß oben, 15 Kopf bröckelt ab, **17,7** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 37 cm.
155	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,0	0	—	Riß im Kopf, 10 Geräusch, 11 Riß im Fuß, 14 weiterer Riß im Fuß, **16,1** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 28 + 41 cm.
156	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,0	0	—	9 knistert, 12 Riß im Fuß, **16,65** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von + 18 cm.
157	21. 3.	3. 5.	IIIb	1,0	0	—	8 knistert, Riß im Fuß, 12 weitere Risse im Fuß, bröckelt ab, **18,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 31 cm.
158	22. 3	4. 5.	IIIb	1,0	0	—	10 knistert, 13 Risse im Fuß, **13,95** abgeschert oben.	Wie bei 18 im Abstand von 31,5 + 22 cm.
159	22. 3.	4. 5.	IIIb	1,0	0	—	10 knistert, Riß im Kopf, 14 Risse im Fuß, **16,26** abgeschert unten.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 35 cm.
160	22. 3.	4. 5.	IVa	1,0	0	—	10 knistert, im Kopf und Fuß vertikale Risse, 12 bröckelt ab, **13,15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 35 cm.
161	22. 3.	3. 5.	IIIb	1,5	0	—	Kopf rissig, 11 neuer Riß im Kopf, 14 Riß im Fuß, **16,25** abgeschert im Fuß.	Wie bei 1.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
162	22. 3.	3. 5.	III b	1,5	0	—	Kopf beschädigt, 10 knistert, 13,1 Riß im Fuß, **14,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 26 + 39 cm.
163	22. 3.	3. 5.	III b	1,5	0	—	9 knistert, 15 Risse im Fuß, **15,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 17 + 27 cm.
164	23. 3.	4. 5.	IVa	1,5	0	—	Kopf beschädigt, 6 knistert, Risse im Kopf, 10 horizontaler Riß im Fuß, 14 Kopf bröckelt ab, **19** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 36 cm.
165	23. 3.	4. 5.	IVa	1,5	0	—	Kopf beim Hals beschädigt, Säule krumm, 10 knistert, 12 Risse im Kopf, **18,5** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22 + 28 cm.
166	23. 3.	4. 5.	IVa	1,5	0	—	11 knistert, 14 horizontaler Riß im Fuß, 17 bröckelt ab, **17,1** abgeschert oben, hält noch 4 t.	Wie bei 71 im Abstand von 30 cm.
167	23. 3.	4. 5.	IVa	1,0	0	—	11 knistert, Risse im Fuß, 12 Riß im Kopf, 13 bröckelt ab, **15,4** abgeschert oben.	Wie bei 18 im Abstand von 25 + 37 cm.
168	23. 3.	4. 5.	IVa	1,0	0	—	9 knistert, Risse im Kopf, 12 Risse im Fuß, 14 weitere Risse im Kopfe, bröckelt ab, 16 bröckelt ab unten, **17,75** abgeschert oben.	Wie bei 18 im Abstand von 12 + 29 cm.
169	23. 3.	4. 5.	IVa	1,0	0	—	10 knistert, Risse im Fuß, 11 Risse im Kopf, 12 bröckelt ab, **12,65** abgeschert oben.	Wie bei 18 im Abstand von 25 + 33 cm.
170	26. 3.	6. 5.	IVa	1,0	0	—	11 Riß im Kopf, 12 knistert, 13 knistert, Risse werden größer, 16 Risse im Fuß werden größer, **17,8** abgeschert im Fuß.	Wie bei 18 im Abstand von 25 + 32 cm.
171	26. 3.	6. 5.	IVa	1,0	0	—	10 Fuß und Kopf rissig, 14 knistert stark, 16 knistert, **16,5** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 29 cm.
172	26. 3	6. 5.	IVa	1,0	0	—	10 knistert, 11 Risse im Kopf, 12 knistert, 16 Kopf bröckelt ab, **17** zerdrückt (?).	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
173	26. 3.	6. 5.	IVa	1,5	0	—	10 Kopf und Fuß rissig, bröckelt ab, 12 weitere Risse, 13 knistert, 14 desgl., **14,15** abgeschert und zerdrückt.	Wie bei 18 im Abstand von 26 + 33 cm.
174	26. 3.	6. 5.	IVa	1,5	0	—	10 Kopf rissig, 11 knistert, 12 still, 13 knistert, **14,05** abgeschert, Kopf ganz rissig.	Wie bei 18 im Abstand von 34 + 23 cm.
175	26. 3.	6. 5.	IVa	1,5	0	—	10 Kopf und Fuß rissig, 13 bröckelt ab, 14 Risse werden größer, 16 Kopf bröckelt ab, **16,9** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22 + 30 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
176	27. 3.	8. 5.	IVa	1,5	5,0	—	Kopf beschädigt, **13,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 71 cm.
177	27. 3.	8. 5.	IVa	1,5	5,0	—	9 knistert, 12 ferner Riß im Kopf, **13,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
178	27. 3.	8. 5.	IVa	1,5	5,0	—	11 knistert, Risse im Kopf, **12,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
179	27. 3.	8. 5.	IVa	1,5	30,0	—	2 knistert, 3 Riß im Fuß, **3,35** Fuß vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
180	27. 3.	8. 5.	IVa	1,0	5,0	—	Riß im Kopf, 10 knistert, 12 desgl., **14,05** knickt aus.	Wie bei 18 im Abstand von 26 + 35 cm.
181	27. 3.	8. 5.	IVa	1,0	5,0	—	8 knistert, 13 desgl., 15 bröckelt ab, **15,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
182	27. 3.	8. 5.	IVa	1,0	5,0	—	Die Eiseneinlagen sieht man unten auf der Oberfläche, 12 knistert, 14 Risse im Kopf und Fuß, **14,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 36 cm.
183	28. 3.	10. 5.	IVa	1,0	5,0	12	10 Risse im Kopf und Fuß, 12 knistert, Risse vergrößern sich, 14 knistert stark, 15 knistert, **15,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
184	28. 3.	10. 5.	IVa	1,0	5,0	18	14 knistert leise, **14,15** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
185	28. 3.	10. 5.	IVa	1,0	5,0	—	10 Riß im Fuß, knistert leise, 11 Riß im Kopf, 12 knistert stark, 13 knistert, 14 Fuß zerfällt, **14,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
186	28. 3.	10. 5	IVa	1,5	5,0	—	Fuß rissig, 12 knistert leise, **12,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 36 cm.
187	28. 3.	10. 5.	IVa	1,5	5,0	—	10 Riß im Kopf, **11,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
188	28. 3.	10. 5.	IVa	1,5	5,0	—	10 Fuß bröckelt ab, 11 Risse im Fuß, **11,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 43 cm.
189	29. 3.	11. 5.	IVa	1,5	20,0	—	5 Riß im Fuß, **6,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 86 cm.
190	29. 3.	11. 5.	IVa	1,5	20,0	—	5 knistert leise, **6,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
191	29. 3.	11. 5.	IVa	1,5	20,0	—	5 Risse im Fuß, **6,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 55 cm.
192	29. 3.	11. 5.	IVa	1,0	20,0	—	4 knistert stark, Riß im Fuß, 7 Riß wird größer, **7,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 33 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
193	29. 3.	11. 5.	IVa	1,0	20,0	—	4 Fuß rissig, 6 knistert, 7 knistert stark, 8 knistert weiter, **8,6** Fuß zerdrückt.	Wie bei 1.
194	29. 3.	11. 5.	IVa	1,0	20,0	—	4 Fuß rissig, 7 knistert leise, Riß im Kopf, **7,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
195	30. 3.	11. 5.	IVb	1,0	20,0	—	5 Risse im Fuß, **7,35** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
196	30. 3.	11. 5.	IVb	1,0	20,0	—	7 Risse im Fuß, **8,5** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 32,5 cm.
197	30. 3.	11. 5.	IVb	1,0	20,0	—	6 Risse im Fuß, **8,85** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
198	30. 3.	11. 5.	IVb	1,5	20,0	—	7 knistert, **8,2** ausgeknickt.	Desgl.
199	30. 3.	11. 5.	IVb	1,5	20,0	—	6 Riß im Fuß, **7,7** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 66 cm.
200	30. 3.	11. 5.	IVb	1,5	20,0	—	Still, **8,05** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
201	2. 4.	14. 5.	IVb	1,5	20,0	—	4 knistert leise, **6,7** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 66 cm.
202	2. 4.	14. 5.	IVb	1,5	5,0	—	10 knistert leise, 11 knistert stark, 13 still, **13,2** ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 36 cm.
203	2. 4.	14. 5	IVb	1,5	5,0	—	10 Risse im Fuß, 11 knistert, **12** still, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
204	2. 4.	14. 5.	IVb	1,0	20,0	—	5 still, **7,45** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
205	2. 4.	14. 5.	IVb	1,0	5,0	—	7 knistert, 8 still, 9 Risse im Fuß, 11 bröckelt ab, 12 weitere Risse im Fuß, 13 knistert leise, **14** Fuß zerdrückt.	Wie bei 1.
206	2. 4.	14. 5.	IVb	1,0	5,0	—	10 Risse im Kopf, **13,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
207	3. 4.	15. 5.	IVb	1,0	5,0	—	10 knistert, Risse im Fuß, 11 bröckelt ab, **11,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
208	3. 4.	15. 5.	IVb	1,0	5,0	—	10 Riß im Fuß, 11 knistert leise, 12 knistert stark, **13** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
209	3. 4.	15. 5.	IVb	1,0	5,0	—	10 Riß im Fuß, 11 knistert, 12 bröckelt ab, **13,85** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 33 cm.
210	3. 4.	15. 5.	IVb	1,0	5,0	1,1	10 knistert, Riß im Fuß, 11 knistert, bröckelt ab, **12,25** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
211	3.4.	15.5.	IVb	1,5	5,0	—	11 knistert leise, 12 still, **13,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
212	3.4.	15.5.	IVb	1,5	5,0	—	Bis 13 still, **13,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
213	4.4.	15.5.	IVb	1,5	5,0	—	9 knistert leise, 10 still, **12,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
214	4.4.	16.5.	IVb	1,5	0	—	Schlecht ausgeführt, 3 Riß im Fuß, 10 knistert, bröckelt ab, 12 knistert, Risse im Kopf, 13 knistert, bröckelt ab, **13,1** abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
215	4.4.	16.5.	IVb	1,5	0	—	7 Risse im Fuß, 9 knistert und bröckelt ab, 10 still, 12 knistert, bröckelt ab, **12,1** zerdrückt (abgeschert?).	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
216	4.4.	15.5.	IVb	1,0	5,0	—	10 knistert leise, 11 still, **12,1** knickt aus.	Desgl.
217	4.4.	16.5.	IVb	1,0	0	—	8 knistert leise, 11 still, 12 knistert, 13 knistert leise, 15 knistert, Riß im Fuß, 16 knistert stark, **16,25** knickt aus oben, unten abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 30 + 37 cm.
218	4.4.	16.5.	IVb	1,0	0	—	10 knistert, 11 knistert laut, 13 Riß im Fuß, **13,8** kegelförmig abgeschert.	Wie bei 71 im Abstand von 28 cm.
219	5.4.	17.5.	IVb	1,0	0	—	10 Riß im Fuß, 12 knistert leise, 13 knistert, 14 knistert stark, 15 still, 16 knistert stark, 17 knistert, 20 knistert stark, 21 still, **21,3** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 30 cm.
220	5.4.	17.5.	IVb	1,0	0	—	10 knistert, bröckelt ab, Risse im Kopf und Fuß, 12 still, 15 knistert leise, 16 knistert und bröckelt ab, **16,95** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 32 + 25 cm.
221	5.4.	17.5.	IVb	1,0	0	—	16 knistert, 17 Risse im Fuß, 18 still, **18,75** abgeschert und ausgeknickt.	Desgl.
222	5.4.	17.5.	IVb	1,0	0	—	13 knistert leise, 15 knistert, 16 Risse im Fuß, 17 knistert, 19 knistert, **20,1** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 31 + 20 cm.
223	5.4.	17.5.	IVb	1,5	0	—	10 Risse oben, 11 knistert sehr, 13 knistert, 14 knistert und bröckelt ab, 18 bröckelt stark ab, **19,25** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
224	5.4.	17.5.	IVb	1,5	0	—	Fuß beschädigt, **16,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 66 cm.
225	5.4.	17.5.	IVb	1,5	0	—	18 still, **19** plötzlicher Riß, bröckelt ab, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22 + 32 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
226	5.4.	17.5.	IV b	1,5	0	—	Risse im Fuß, 9 bröckelt ab, knistert, Riß im Kopf, 14 biegt sich aus, **15,65** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22,5 + 32 cm.
227	10.4.	23.5.	VII a	1,5	0	—	**7,6** Kopf und Fuß rissig (?).	Wie bei 1.
228	10.4.	23.5.	VII a	1,5	0	—	9 Fuß rissig, 10 vertikale Risse im Kopf, **13,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
229	10.4.	23.5.	VII a	1,5	5,0	—	5 Risse im Kopf, **10,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 36 cm.
230	10.4.	23.5.	VII a	1,0	0	—	10 Risse im Fuß, 13 Risse im Kopf, **17,45** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 35 cm.
231	10.4.	23.5.	VII a	1,0	0	—	10 vertikale Risse im Fuß und horizontale im Hals, 12 vertikale Risse im Kopf, **16,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
232	10.4.	24.5.	VII a	1,0	5,0	—	10 vertikale Risse im Kopf, **12,9** plötzlicher Knall und Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
233	10.4.	24.5.	VII a	1,0	5,0	—	11 knistert, 12 beiderseitige vertikale Risse im Kopf, **13,4** plötzlich knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
234	11.4.	24.5.	VII b	1,0	5,0	19	10 vertikale Risse im Kopf, 12 plötzlicher Knall, **15,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
235	11.4.	24.5.	VII b	1,0	5,0	—	10 vertikale Risse im Kopf, 11 knistert, **12,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 22 cm.
236	11.4.	24.5.	VII b	1,5	5,0	18,5	9 Risse im Fuß, biegt sich aus, **10,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
237	11.4.	24.5.	VII a	1,5	5,0	—	7 vertikale Risse im Kopf, 9 vertikale Risse im Fuß, 10,5 bröckelt ab, biegt sich aus, **11,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm.
238	11.4.	24.5.	VII b	1,5	5,0	—	**10** leiser Knall, bröckelt ab und plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
239	12.4.	25.5.	VII b	1,5	— 5,0 auf der entgegengesetzten Seite	—	10 knistert, 11,3 lauter Knall, **11,95** knickt aus, Riß auf der Seite der drei Drähte.	Wie bei 17 im Abstand von 45 cm.
240	12.4.	25.5.	VII b	1,5	20,0	—	4 knistert, 6 desgl., 7 desgl., vertikale Risse im Fuß, **7,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
241	12.4.	25.5.	VII b	1,5	10,0	—	**11,9** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
242	12.4.	28.5.	VII b	1,5	5,0	2	8 knistert, **9,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe *h* m	Exzentrizität *c* mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
243	13.4.	25.5.	Ic	1,0	20,0	—	**6,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
244	13.4.	25.5.	Ic	1,0	5,0	—	9 knistert, 10 vertikale Risse im Kopf, 11 knistert und bröckelt ab, **12** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 48 cm.
245	13.4.	25.5.	Ic	1,0	5,0	—	**10,25** knistert leise, nach 1/2 Minute plötzliche Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
246	13.4.	25.5.	Ic	1,5	5,0	2	**11,65** knistert leise, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
247	13.4.	25.5.	Ic	1,5	5,0	—	**11** vertikale Risse im Fuß, knistert leise, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
248	13.4.	25.5.	Ic	1,5	20,0	—	**6,6** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 48 cm.
249	15.4.	27.5.	Ic	1,5	20,0	—	**5,1** nach einer Weile knickt langsam aus.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
250	15.4.	27.5.	Ic	1,5	20,0	—	**5,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 37 cm.
251	15.4.	27.5.	Ic	1,5	5,0	—	9 knistert, **14,6** knickt aus.	Desgl.
252	15.4.	27.5.	Ic	1,0	5, 3, 7, 5 5,0	—	**11,2** Knall und Ausknickung.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm.
253	15.4.	27.5.	Ic	1,0	20,0	—	**7,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
254	15.4.	27.5.	Ic	1,0	20,0	—	**7,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
255	16.4.	28.5.	Ic	1,5	0	—	**13,9** knistert leise, knickt aus.	Desgl.
256	16.4.	28.5.	Ic	1,5	0	—	10 knistert, **13,4** knickt aus	Wie bei 17 im Abstand von 33 cm.
257	16.4.	28.5.	IIIc	1,5	Platte für Exzentrizität 0	—	11 Kopf rissig, **14,85** Horizontale.	Wie bei 17 im Abstand von 11 cm.
258	16.4.	28.5.	IIIc	1,0	20,0	—	4 knistert leise, **6,75** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
259	16.4.	28.5.	Ic	1,0	0	—	10 bröckelt ab im Kopf, 11 desgl. im Fuß, **12,9** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 25 + 35 cm.
260	16.4.	28.5.	Ic	1,0	0	—	Beide Platten fix, 10 Risse im Fuß, 13 knistert, 14 knistert leise, **18,2** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 40 + 45 cm.
261	17.4.	29.5.	IIa	1,5	5,0	24	10 Risse im Kopf, **10,45** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 59 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
262	17.4.	29.5.	IIa	1,5	6, 5, 6, 7 6,0	6	11 knistert, **11,3** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
263	17.4.	29.5.	IIa	1,5	4, 6, 3, 5 4,5	—	10 Risse im Kopf und Fuß, **12,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 38 cm.
264	17.4.	29.5.	IIa	1,0	7, 4, 5, 4 5,0	4	**13,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 31 cm.
265	17.4.	29.5.	IIa	1,0	4, 2, 5, 8 4,75	8	13 Risse im Fuß, **14** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
266	17.4.	29.5.	IIa	1,0	6, 3, 6, 4 4,75	9	10 Risse im Fuß, 13 Risse im Kopf, **16** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 38 cm.
267	18.4.	29 5.	IIa	1,0	4, 3, 4, 5 4,0	5	10 Risse, **10,8** knickt aus im Hals.	Wie bei 17 im Abstand von 10 cm.
268	18.4.	29.5.	IIb	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	2	**9,9** plötzlich knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
269	18.4.	29.5.	IIb	1,0	7, 4, 5, 5 5,25	10	**14,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
270	18.4.	29.5.	IIb	1,5	2, 6, 3, 7 4,5	12	10,2 Risse im Kopf und Fuß, **12,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
271	18.4.	29.5.	IIb	1,5	5, 3, 4, 6 4,5	2	**10,45** plötzlich abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 17 + 33 cm.
272	18.4.	29.5.	IIb	1,5	7, 4, 5, 5 5,25	—	5 Risse im Kopf, **12,3** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 20 cm.
273	19.4.	31.5.	IIa	1,5	6, 6, 5, 5 5,5	6	8 Knall, **13,85** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
274	19.4.	31.5.	IIa	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	10	7,5 knistert, **13,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
275	19.4.	31.5.	IIb	1,5	7, 6, 5, 5 5,75	2	6 knistert, **12,85** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
276	19.4.	31.5.	IIb	1,0	8, 5, 5, 4 5,5	10	8 knistert, Risse im Kopf, **11,75** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
277	19.4.	31.5.	IIb	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	6	10 Fuß und Kopf rissig, 13 knistert stark, **14** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
278	19.4.	31.5.	IIa	1,0	5, 5; —5, 10 5,0	3	10 knistert, im Kopf vertikale Risse **12,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 21 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
279	20.4.	31.5.	IIa	1,0	20, 19, 20, 22 20,25	8	3 Risse in der Ecke des Kopfes, **8,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
280	20.4.	31.5.	IIa	1,0	20, 20, 20, 18 19,5	20	4,5 Risse im Kopf, 6 knistert stark, dann plötzlicher Knall, **6,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
281	20.4.	31.5.	IIa	1,0	20, 20, 19, 20 19,75	20	5 Risse im Kopf, **6,75** knistert, Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 71 im Kopf.
282	20.4.	31.5.	IIa	1,5	5, 5, 5, 6 5,25.	10	8 Risse im Kopf, **11,75** Knall, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
283	20.4.	31.5.	IIa	1,5	23, 20, 24, 20 21,75	13	4 knistert, Risse im Kopf, 4,5 bröckelt ab, Ecke des Kopfes fällt ab, **7,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm
284	20.4.	31.5.	IIa	1,5	20, 20, 18, 23 20,25	14	4,5 knistert, Risse im Kopf, **5,95** Kopf abgeschert.	Wie bei 1.
285	22.4.	4.6.	IIa	1,0	20, 19, 16, 21 19,0	4	**6,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
286	22.4.	4.6.	IIa	1,0	20, 20, 16, 24 20,0	—	10,2 knistert, **11,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35,5 cm.
287	22.4.	4.6.	IIa	1,0	20, 20, 19, 19 19,5	35	10 knistert, **12,4** knickt aus.	Anriß im Abstand von 11 cm.
288	22.4.	4.6.	IIa	1,5	5, 4, 5, 5 4,75	2	**12,7** knickt aus.	—
289	22.4.	4.6.	IIa	1,5	5, 2, 5, 8 5,0	8	10 Risse, knistert, **12,25** knickt aus.	Wie bei 287 im Abstand von 25 cm.
290	22.4.	4.6.	IIa	1,5	26, 20, 22, 18 21,5	4	**8** stark verbogen, knickt aus.	Wie bei 287 im Abstand von 63,5 cm.
291	23.4.	4.6.	IIa	1,5	19, 19, 19, 22 19,75	12	**8,025** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 39,5 cm.
292	23.4.	6.6.	IIa	1,5	0	—	**14,45** plötzliche Abscherung.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 28 cm.
293	23.4.	6.6.	IIa	1,5	0	—	10 knistert, **14** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 28 + 36 cm.
294	23.4.	6.6.	IIa	1,5	0	—	Kopf verdorben, **11,4** abgeschert.	Wie bei 1.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
295	23.4.	6.6.	IIa	1,0	0	—	2,5 vertikaler Riß im Kopf, 13 bröckelt ab, **13,35** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 35 cm.
296	23.4.	6.6.	IIa	1,0	0	—	14 Risse im Kopf, **16** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 22 + 36 cm.
297	23.4.	6.6.	IIa	1,0	0	—	12 knistert, 13 bröckelt ab, **14,35** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 37 cm.
298	23.4.	6.6.	IIa	1,0	0	—	10 knistert, Riß im Kopf, 14 bröckelt ab, **15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 42 + 50 cm.
299	23.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	13,5 knistert, 14,5 bröckelt ab, **15,5** Kopf fällt auseinander, abgeschert im Kopf.	Wie bei 71 im Kopf.
300	24.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	11 knistert, 13,5 Risse im Kopf, bröckelt ab, **15,35** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 40 + 51 cm.
301	24.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	17,5 bröckelt ab, **18,1** abgeschert.	Wie bei 71 im Abstand von 23 cm.
302	24.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	13 knistert, **13,3** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 31 cm.
303	24.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	11 Risse im Kopf, **12** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 24 + 34 cm.
304	24.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	12 knistert, **12,6** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 15 + 26 cm.
305	24.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	11 vertikale Risse im Kopf, 15 bröckelt ab, **16,7** abgeschert im Kopf.	Wie bei 1.
306	24.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	12 Risse im Kopf, **14,75** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 27 + 38 cm.
307	25.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	5 Knall, Riß im Kopf, **12,35** Kopf vertikal abgeschert, zertrümmert.	Wie bei 1.
308	25.4.	7.6.	IIb	1,5	0	—	2 Risse im Kopf, **13,8** abgeschert.	Desgl.
309	25.4.	8.6.	IIb	1,5	20,0	—	6 Riß, bröckelt ab, Riß vergrößert sich, **6,05** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
310	25.4.	8.6.	IIb	1,5	20,0	20	**6,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm
311	25.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	15 knistert, **15,46** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 32 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
312	25.4.	6.6.	IIb	1,0	0	—	12 knistert, Kopf rissig, 13 bröckelt ab, **14,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 34 cm.
313	25.4.	7.6.	IIb	1,0	0	—	5 Risse im Kopf, 12 bröckelt ab, **12,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 30 cm.
314	25.4.	8.6.	IIb	1,0	20,0	—	**6,5** Riß im Fuß, nach 1/2 Minute knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
315	26.4.	8.6.	IIb	1,0	20,0	—	6 vertikale Risse im Fuß, **7,5** knickt aus.	Desgl
316	26.4.	8.6.	IIb	1,0	20,0	—	**8,2** knickt langsam aus.	Desgl.
317	26.4.	8.6.	IIb	1,0	20,0	—	**7,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 38 cm.
318	26.4.	8.6.	IIb	1,0	20,0	—	**5** knickt aus, Säule schlecht ausgeführt, Beton brüchig.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
319	26.4.	8.6.	IIb	1,5	20,0	—	5 Risse im Kopf und Hals, 6 Risse im Fuß, **6,5** Fuß zertrümmert.	Wie bei 1.
320	26.4.	8.6.	IIb	1,5	21, 19, 16, 18 18,5	—	5 knistert, **7,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
321	26.4.	8.6.	IIb	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	—	**12,25** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
322	26.4.	8.6.	IIb	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	—	**11,55** knickt aus.	Desgl.
323	27.4.	10.6.	Va	1,5	20, 20, 20, 20 20,0	35	**6,85** biegt sich aus und knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 63 cm.
324	27.4.	10.6.	Va	1,5	20, 18, 22, 20 20,0	20	6 stark verbogen, **6,53** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 51 cm.
325	27.4.	10.6.	Va	1,5	18, 20, 20, 22 20,0	—	7 stark verbogen, **7,55** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 63 cm.
326	27.4.	10.6.	Va	1,0	20, 19, 20, 18 19,5	10	9 knistert, **9,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 61 cm.
327	27.4.	10.6.	Va	1,0	20, 20, 20, 20 20,0	18	7,2 knistert, **8,6** Kopf fällt ab.	Wie bei 1.
328	27.4.	10.6.	Va	1,0	20, 23, 19, 17 19.75	4	7.5 knistert, 10 vertikale Risse im Kopf, **10,4** knickt aus im Kopf.	Wie bei 17 im Abstand von 70 cm.
329	29.4.	14 6.	Va	1,0	35, 31, 30, 28 31,0	14	Fuß beschädigt, **5,72** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 37 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
330	29. 4.	14. 6.	Va	1,0	5, 1, 4, 4 3,5	12	18,6 bröckelt ab, **18,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 15 cm.
331	29. 4.	14. 6.	Va	1,0	5, 5, 6, 5 5,25	16	**18,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34,5 cm.
332	29. 4	14. 6.	Va	1,5	30, 30, 34, 27 30,25	3	3 knistert, **4,2** Fuß vertikal abgeschert.	Wie bei 1
333	29. 4.	14. 6.	Va	1,5	5, 7, 4, 5 5,25	10	10 knistert, Fuß beschädigt, **11,75** große Ausbiegung, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 36 cm.
334	29. 4.	14. 6.	Va	1,5	3, 5, 4, 3 3,75	11	**10,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 32 cm.
335	30. 4.	15. 6.	Va	1,5	5, 7, 5, 3 5,0	8	Säule beschädigt, 10 knistert, **10,45** Kopf zertrümmert.	Wie bei 1.
336	30. 4.	15. 6.	Va	1,5	5, 6, 7, 3 5,25	13	Säule beschädigt, **12,85** knickt aus an der beschädigten Stelle.	Wie bei 17 im Abstand von 43 cm.
337	30. 4.	15. 6.	Va	1,5	9, 5, 3, 13 7,5	12	10 vertikale Risse im Kopf, **11,8** Kopf zertrümmert, kleine Ausbiegung im Hals.	Wie bei 17 im Abstand von 13 cm.
338	30. 4.	14. 6.	Va	1,0	5, 8, 6, 5 6,0	18	**13,7** bröckelt ab, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 20 cm.
339	30. 4.	14. 6.	Va	1,0	4, 6, 3, 5 4,5	18	12 Risse im Fuß, **14,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
340	30. 4.	14. 6.	Va	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	9	16 knistert, **16,5** bröckelt ab, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 29 cm
341	1. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	16 Risse im Kopf, **17,45** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 24 + 38 cm.
342	1. 5.	14. 6.	Va	1,0	2, 8, 7, 4 5,25	27	13,3 vertikale Risse im Kopf, **13,36** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
343	1. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	**16,5** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 16 cm.
344	1. 5.	15. 6.	Va	1,5	5, 8, 5, 5 5,75	12	**10,5** Ausbiegung 9 mm, nach 2 Minuten 14 mm, nach 15 Minuten knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 48 cm.
345	1. 5.	15 6.	Va	1,5	0	—	Die Säule beschädigt, 13 Risse im Kopf, **13,7** Kopf abgeschert.	Wie bei 71 im Kopf.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
346	1. 5.	15. 6.	Va	1,5	0	—	10 knistert, Risse im Kopf, **13,15** abgeschert unten und oben, Fuß rissig.	—
347	2. 5.	15. 6.	Va	1,5	0	—	Unreine Kanten, 14,2 bröckelt ab, **15,45** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 17 + 39 cm.
348	2. 5.	15. 6.	Va	1,5	0	—	16 bröckelt ab, **16,5** abgeschert, Kopf rissig.	Wie bei 18 im Abstand von 45 + 56 cm.
349	2. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	13,15 Risse im Kopf, **17,7** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 13 + 26 cm.
350	3. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	**16,15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 11 + 16 cm.
351	3. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	Abgeschert 12 85	Wie bei 18 im Abstand von 24 + 38 cm.
352	3. 5.	15. 6.	Va	1,5	0	—	12,2 Risse im Kopf und Fuß, **14,25** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 23 + 42 cm.
353	3. 5.	15. 6.	Va	1,5	0	—	**13,1** Risse im Kopf, abgeschert.	Wie bei 71 im Abstand von 28 cm.
354	4. 5.	17. 6.	Va	1,0	0	—	12 Risse im Kopf, 13 bröckelt ab, **15,4** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 41 + 20 cm.
355	4. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	13 knistert, 15 vertikale Risse im Kopf, **16,85** abgeschert im Fuß.	Wie bei 1.
356	4. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	14,4 kleine Risse im Kopf und Fuß, **18,65** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 40 cm.
357	4. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	Ganz geflickt, **14** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 24 + 32 cm.
358	4. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	11 Fuß und Kopf rissig, **14,8** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 cm.
359	4. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	**11,5** Riß im Fuß, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 39 + 10 cm.
360	4. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	10 knistert, Risse im Kopf, **14,1** abgeschert im Hals.	Wie bei 18 im Abstand von 18 + 10 cm.
361	7. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	10 vertikale Risse im Kopf, **14,95** abgeschert im Kopf.	Wie bei 18 im Abstand von 12 + 16 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
362	7. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	9,5 knistert, Risse im Kopf, **13,65** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 16 + 18 cm.
363	7. 5.	19. 6.	Vb	1,5	0	—	13 stark ausgebogen, 16 desgl., bröckelt ab, **16,15** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 13 + 27 cm.
364	7. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	14 knistert, Risse im Kopf und Fuß, **16,04** abgeschert im Hals.	Wie bei 71 im Abstand von 13 cm.
365	7. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	14 vertikale Risse im Fuß, 15 vertikale Risse im Kopf, **15,75** abgeschert unten.	Wie bei 1.
366	7. 5.	18. 6.	Vb	1,0	0	—	12 knistert, Risse im Kopf und Fuß, **17,1** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 32 cm.
367	8. 5.	20. 6	Vb	1,0	20, 20, 20, 19 19,75	4	10,5 knistert, ausgebogen, **10,55** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
368	8. 5.	20. 6.	Vb	1,0	20, 20, 18, 22 20,0	—	6 vertikale Risse im Fuß, **10,8** Fuß abgeschert.	Wie bei 1.
369	8. 5.	20. 6.	Vb	1,0	20, 22, 20, 18 20,0	12	11 knistert, **11,5** stark ausgebogen, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 21 cm.
370	8. 5.	21. 6.	Vb	1,5	20, 21, 22, 19 20,5	1	7 bröckelt ab, Risse im Kopf, **7,35** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
371	8. 5.	20. 6.	Vb	1,5	18, 21, 21, 22 20,5	12	7 stark ausgebogen, Risse im Kopf und Fuß, **7,3** nach 1 Minute knickt aus.	—
372	8. 5.	20. 6.	Vb	1,5	20, 20, 20, 20 20,0	14	3 vertikale Risse im Kopf, 6,5 vertikale Risse im Fuß, 7 stark ausgebogen, **7,25** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
373	10. 5.	22. 6.	Vb	1,5	5, 4, 5, 6 5,0	1	10 knistert, 11 desgl., **11,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
374	10. 5.	22. 6.	Vb	1,5	5, 5, 4, 6 5,0	17	10 Knall, 11 stark ausgebogen, **12,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 46 cm.
375	10. 5.	22. 6.	Vb	1,5	5, 4, 5, 4 4,5	14	10,4 Geräusch, 11 knistert, **11,85** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
376	10. 5.	22. 6.	Vb	1,0	3, 3, 5, 8 —	7	12 knistert, Risse im Hals, **12,45** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 19 cm.
377	10. 5.	22. 6.	Vb	1,0	19, 23, 24, 18 21,0	21	11 knistert, **11,25** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 63 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
378	10. 5.	22. 6.	Vb	1,0	30, 30, 28, 32 30,0	6	**6,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 60 cm.
379	10. 5.	22. 6.	Vb	1,0	3, 5, 8, 6 5,5	16	Säule krumm und geflickt, **12,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 26 cm.
380	11. 5.	22. 6.	Vb	1,0	5, 5, 8, 3 5,25	14	10 knistert, vertikale Risse im Kopf, **13,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 19 cm.
381	11. 5.	22. 6.	Vb	1,0	5, 4, 4, 4 4,25	4	15,2 knistert, **15,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
382	11. 5.	22. 6.	Vb	1,0	5, 2, 4, 3 3,5	10	10 knistert, **13** knickt aus.	Desgl.
383	11. 5.	22. 6.	Vb	1,5	5, 4, 4, 6 4,75	7	9 Geräusch, 10 knistert, **11,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 34 cm.
384	11. 5	22. 6.	Vb	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	3	11 knistert, **12** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 16 cm.
385	11. 5.	22. 6.	Vb	1,5	0, 10, 5, 5 5,0	1	9 knistert, 10 bröckelt ab, **10,85** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 23 cm.
386	11. 5.	22. 6.	Vb	1,5	5, 2, 4, 3 3,5	—	8,5 knistert, **12,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 18 cm.
387	14. 5.	24. 6	VIb	1,5	27, 33, 30, 30 30,0	0	3 Geräusch, **4,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.
388	14 5.	22. 6.	VIb	1,5	28, 20, 20, 18 22,75	5	2 knistert, **4,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 80 cm.
389	14. 5.	24. 6.	VIb	1,5	23, 22, 20, 20 21,25	9	3 knistert, **4,31** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 54 cm.
390	14. 5.	24. 6.	VIb	1,0	33, 30, 31, 30 31,0	11	2 knistert, **4,4** knickt aus, kleine Abscherung auf dem Rande.	Wie bei 17 im Abstand von 54 cm.
391	14. 5.	24. 6.	VIb	1,0	21, 19, 19, 22 20,25	19	3 knistert, **5,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 56,5 cm.
392	14 5.	24. 6.	VIb	1,5	20, 20, 19, 22 20,25	1	4,5 Geräusch, **5,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 62 cm.
393	15. 5.	24. 6.	VIIIa	1,0	2, 3, 3, 3 2,75	14	8 Geräusch, **12,75** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 30 cm.
394	15. 5.	25. 6.	VIb	1,0	8, 5, 8, 4 4,25	10	6,5 knistert, Risse im Kopf, bröckelt ab, **7,65** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 38 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
395	15. 5.	25. 6.	VIb	1,0	18, 22, 20, 18 19,5	5	4 Risse im Kopf, **4,53** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 44 cm.
396	15. 5.	25. 6.	VIb	1,0	5, 5, 4, 6 5,0	12	6 knistert, 7 bröckelt ab, **7,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 82,6 cm.
397	15. 5.	27. 6.	VIIIa	1,5	5, 3, 3, 3 3,5	21	10,2 knistert, **13,95** knickt aus in entgegengesetzter Richtung und abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
398	15. 5.	25. 6.	VIb	1,5	9, 5, 6, 5 6,25	13	6 knistert, vertikale Risse im Kopf, **6,3** bröckelt ab im Hals, knickt aus in der Mitte.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
399	15. 5.	25. 6.	VIb	1,5	5, 4, 3, 8 5,0	20	4,5 knistert, 5 bröckelt ab, **5,25** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 65 cm.
400	15. 5.	25. 5.	VIb	1,5	30, 30, 26, 34 30,0	7	3,5 lauter Knall, biegt sich aus, **4,3** bröckelt ab, Risse im Kopf, knickt aus unten.	Wie bei 17 im Abstand von 20 cm.
401	16. 5.	26. 6.	VIb	1,5	6, 3, 5, 5 4,75	12	2 Risse im Kopf, 4 knistert, bröckelt ab, **6,2** knickt aus, Kopf zerstört.	Wie bei 17 im Abstand von 63 cm.
402	16. 5.	26. 6.	VIb	1,5	5, 2, 4, 6 4,25	1	**5,8** plötzlich ausgeknickt.	Wie bei 17 im Abstand von 15 cm.
403	16. 5.	27. 6.	VIIIa	1,5	2, 5, 2, 5 3,5	11	14 knistert, **14,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 17 cm.
404	16. 5.	26. 6.	VIa	1,5	5, 4, 5, 7 5,25	11	4,4 Risse im Kopf, **5,4** Kopf ausgebogen.	Wie bei 1.
405	16. 5.	26. 6.	VIa	1,0	5, 3, 4, 8 5,0	2	4,5 Risse im Kopf, 5 knistert, **6,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 60 cm.
406	16. 5.	26. 6.	VIa	1,0	4, 6, 3, 5 4,5	9	3,6 Knall, **6,25** bröckelt ab, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 16 cm.
407	17. 5.	26. 6.	VIIIa	1,0	3, 2, 2, 1 2,0	4	10 Geräusch, 12 desgl., **12,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 18 cm.
408	16. 5.	26. 7.	VIa	1,0	4, 4, 6, 7 5,25	4	6 knistert, **10,25** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 14 cm.
409	17. 5.	28. 6.	VIa	1,0	0	—	7,5 knistert, Risse im Hals, **8,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 18 cm.
410	17. 5.	27. 6.	VIa	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	18	7,2 knistert, bröckelt ab am Hals, **7,55** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 18 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
411	17. 5.	28. 6.	VIa	1,0	0	—	2 Risse an der Ecke des Kopfes, 4 knistert, 8 bröckelt ab, **8,45** abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 16 cm.
412	17. 5.	27. 6.	VIIIa	1,0	30, 30, 30, 30 30,0	21	5 knistert, Risse im Fuß, **6,75** knistert, knickt aus im Hals, nach starker Ausbiegung.	Wie bei 1.
413	17. 5.	27. 6.	VIIIa	1,5	30, 28, 34, 26 29,5	29	Säule krumm, **3,5** Risse im Kopf, bröckelt ab, vertikal abgeschert.	Desgl.
414	17. 5.	27. 6.	VIa	1,5	5, 6, 5, 5 5,25	26	6 Risse im Kopf, **6,95** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
415	17. 5.	28. 6.	VIa	1,5	0	—	5 Risse im Kopf, **7,65** bröckelt ab, abgeschert.	Wie bei 17 im Abstand von 55 cm.
416	17. 5.	28. 6.	VIa	1,5	0	—	6,5 Risse im Kopf, knistert, **8,95** weitere Risse, bröckelt ab, abgeschert unten und oben.	Wie bei 71 im Abstand von 19 cm.
417	18. 5.	4. 7.	VIIIa	1,5	30, 27, 30, 29 29,0	16	4 knistert, 5 desgl., stark ausgebogen, **6** knistert, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 79 cm.
418	18. 5.	2. 7.	VIa	1,5	0	—	7,2 knistert, **9,65** bröckelt ab im Hals, nicht deutliche Abscherung, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 100 cm.
419	18. 5.	2. 7.	VIa	1,5	0	—	8 knistert, **8,3** knickt aus (Kopf und Fuß waren nicht parallel).	Wie bei 17 im Abstand von 44 cm.
420	18. 5.	2. 7.	VIa	1,5	0	—	7,5 knistert, bröckelt ab im Hals, **8,45** im Hals abgeschert, die Abscherung nicht deutlich, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 100 cm.
421	18. 5.	2. 7.	VIa	1,0	0	—	6 knistert, 9 Risse im Kopf, **9,25** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 16 cm.
422	18. 5.	2. 7.	VIa	1,0	0	—	**9,5** bröckelt ab, nach 1 Minute abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 16 cm.
423	21. 5.	2. 7.	VIa	1,0	0	—	9 knistert stark, 10 Risse im Fuß, **10,35** bröckelt ab im Hals, plötzlicher Knall, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 44 + 51 cm.
424	21. 5.	2. 7.	VIa	1,0	0	—	7 knistert, Risse im Kopf, **8,3** bröckelt ab, abgeschert im Fuß.	Wie bei 18 im Abstand von 12 + 24 cm.
425	21. 5.	3. 7.	VIa	1,0	0	—	4 knistert, 7 Risse im Kopf, 8,5 knistert, **9** bröckelt ab, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 41 + 51 cm
426	21. 5.	3. 7.	VIb	1,5	0	—	Kopf und Fuß nicht parallel, 2 knistert, vertikale Risse im Kopf, **8** bröckelt ab, Risse im Kopf werden größer, knickt aus.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 20 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
427	21. 5.	4. 7.	VIII a	1,5	30, 28, 30, 31 29,75	9	**6,5** stark ausgebogen, knistert, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 75 cm.
428	22. 5.	2. 7.	VI b	1,0	0	—	5,7 knistert, 6,95 bröckelt ab, 7 Risse im Kopf, **7,35** Kopf zerdrückt.	Wie bei 1.
429	22. 5.	2. 7.	VI b	1,0	0	—	4,2 Risse im Kopf, 7,3 bröckelt ab, 8,08 Risse im Hals, **8,25** knistert, Manometer fällt ab, knistert, 7,8 Kopf zerdrückt.	Desgl.
430	22. 5.	2. 7.	VI b	1,0	0	—	**8,2** plötzlich bröckelt ab und wird abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 13 + 19 cm.
431	22. 5.	4. 7.	IX a	1,0	3, 2, 3, 3 2,75	14	**15,85** knickt allmählich aus.	Wie bei 17 im Abstand von 69 cm.
432	22. 5.	4. 7.	IX a	1,5	30, 29, 30, 27 29,0	14	**6,15** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 51 cm.
433	22. 5.	3. 7.	VI b	1,5	0	—	8 knistert, 9,2 bröckelt ab, Risse im Hals, **9,5** plötzliche Ausknickung.	Wie bei 71 im Abstand von 13 cm.
434	22. 5.	3. 7.	VI b	1,5	0	—	6 Risse im Hals, 7 Risse im Kopf, **8,5** langsame Abscherung.	Wie bei 18 im Abstand von 30 + 38 cm.
435	22. 5.	3. 7.	VI b	1,5	0	—	3 plötzlicher Knall, Risse im Kopf, 8 knistert, 9 bröckelt ab, **9,8** plötzliche Abscherung.	Wie bei 18 im Abstand von 53 + 56 cm.
436	23. 5.	3. 7.	VI b	1,5	0	—	6 knistert, vertikale Risse im Kopf, **7** knistert stark, abgeschert, unten ausgeknickt.	Wie bei 18 im Abstand von 51 + 43 cm.
437	23. 5.	4. 7.	VI b	1,5	5, 5, 5, 5 5,0	6	4,6 knistert, Kopf bröckelt ab, **5,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 35 cm.
438	23. 5.	3. 7.	VI b	1,5	0	—	**5,4** knistert, kleine Ausbiegung, wird abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 33 + 14 cm.
439	23. 5.	4. 7.	VI b	1,5	28, 35, 24, 30 29,25	44	Säule sehr krumm, **5,85** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 71 cm.
440	23. 5.	4. 7.	IX a	1,0	3, 2, 3, 3 2,75	14	9 knistert, 10 Risse im Fuß, 11 knistert, 12 desgl., **20,2** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 19 + 30 cm.
441	23. 5.	3. 7.	VI b	1,0	0	—	Fuß und Kopf nicht parallel, 5 vertikale Risse im Kopf, 9 knistert, **9,05** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 24 cm.
442	23. 5.	3. 7.	IV b	1,0	0	—	6,3 bröckelt ab, knistert, **6,4** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 16 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe *h* m	Exzentrizität *c* mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
443	23. 5.	3. 7.	VIb	1,0	0	—	7 knistert, **8,4** bröckelt ab, abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 21 + 31 cm.
444	24. 5.	5. 7.	VIb	1,5	23, 22, 20, 18 20,75	18	3 knistert, **3,55** Kopf bröckelt ab, Kopf wird zertrümmert.	Wie bei 1.
445	24. 5.	5. 7.	VIb	1,5	5, 5, 4, 5 4,75	4	2 Kopf rissig, **5,2** bröckelt ab, Kopf wird zertrümmert.	Wie bei 17 im Abstand von 17 cm.
446	24. 5.	5. 7.	VIb	1,5	30, 29, 28, 31 29,5	6	**2** knistert, Risse im Kopf, Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
447	24. 5.	5. 7.	IXa	1,5	4, 8, 2, 1 3,75	18	20 still, 21 knistert, **21,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 19 cm.
448	24. 5.	4. 7.	IXa	1,0	30, 30, 29, 31 30,0	19	Rissig, beschädigte Kanten, bröckelt ab, 1,5 ein Teil des Kopfes fällt ab, **4,3** desgl. im Fuß.	—
449	24. 5.	4. 7.	VIb	1,0	5, 4, 5, 5 4,75	14	2 Risse im Kopf, 4 bröckelt ab, 4,5 knistert, **5,1** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 10 + 17 cm.
450	24. 5.	4. 9.	VIb	1,0	5, 7, 4, 6 5,5	0	3 Risse, **5,3** Kopf zertrümmert, der Kern bleibt, Beton fällt auf beiden Seiten ab.	Wie bei 1.
451	24. 5.	4 7.	VIb	1,0	5, 2,5, 4, 6 4,38	7	3 Risse im Kopf, 4 bröckelt ab, **5,75** abgeschert.	Wie bei 18 im Abstand von 12 + 20 cm.
452	25. 5.	5. 7.	VIb	1,0	5, 5, 4, 9 5,75	22	4 knistert, 5 bröckelt ab, **5,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 17 cm.
453	25 5.	5. 7.	VIb	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	20	7 knistert, **9,5** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 16 cm.
454	25. 5.	5. 7.	VIb	1,0	6, 7, 6, 6 6,25	8	2 Risse im Kopf, 5 knistert, **5,45** abgeschert nach kleiner Ausbiegung.	Wie bei 18 im Abstand von 15 + 25 cm.
455	25. 5.	5. 7.	VIIIb	1,0	6, 4, 4, 6 5,0	6	8 Risse im Kopf, knistert, **10,52** Kopf fällt ab, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 25 cm.
456	25. 5.	6. 7.	VIb	1,0	5, 5, 5, 5 5,0	0	6 knistert, Risse im Hals, **6,8** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 11 cm.
457	25. 5.	5. 7.	VIb	1,5	5, 3, 4, 7 4,75	4	5 knistert, Risse im Kopf, 6 knistert, 7 desgl., **7,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 57,5 cm.
458	25. 5.	5. 7.	VIb	1,5	5, 5, 5, 7 5,5	8	5 Risse im Kopf, **7** knistert stark, bröckelt ab im Hals, biegt sich aus, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 15 cm.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe *h* m	Exzentrizität *e* mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
459	25. 5.	5. 7.	IXa	1,5	4, 7, 2, 3 4,0	5	10 Risse unten, 13 knistert, 15 knistert stark, bröckelt, **16,15** nach 1 Minute knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 57 cm.
460	25. 5.	5. 7.	IXa	1,5	32, 31, 29, 29 30,25	17	4 knistert, **6,29** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 61 cm.
461	27. 5.	6. 7.	VIb	1,5	5, 4, 3, 6 4,5	30	4 knistert, bröckelt ab im Hals, **6,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 50 cm.
462	27. 5.	6. 7.	VIb	1,5	5, 8, 5, 6 6,0	1	5 knistert, 6,5 bröckelt ab, **7,37** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 14 cm.
463	27. 5.	6. 7.	VIb	1,5	9, 5, 5, 6 6,25	2	3 knistert, 5 bröckelt ab, **6,2** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 84 cm.
464	27. 5.	6. 7.	VIb	1,5	5, 6, 8, 7 6,5	2	5 knistert, **7,65** abgeschert und nachdem knickt aus (Platte dreht sich).	Wie bei 18 im Abstand von 12 + 30 cm.
465	27. 5.	8. 7.	IXb	1,0	3, 6, 3, 5 4,25	3	10 kleine vertikale Risse im Kopf, 13 knistert, **15,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 14 cm.
466	27. 5.	8. 7.	IXb	1,5	2, 2, 4, 4 3,0	20	10 still, 12 knistert, 13 desgl., 14 bis 16 desgl., 17 kleine Risse im Kopf, nach 30 Sekunden vertikale Risse im Kopf, kleine Ausbiegung, **17,55** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 20 cm.
467	27. 5.	8. 7.	IXb	1,5	3, 3, 5, 0 2,75	19	10 still, 14 Risse im Kopf, 14,5 Knall, **15,7** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 39 cm.
468	28. 5.	8. 7.	VIb	1,5	6, 5, 5, 5 5,25	5	4 Risse im Kopf, 6 knistert, 6,5 desgl., 7 bröckelt ab, 7,5 desgl., **7,6** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 27 cm.
469	28. 5.	8. 7.	VIIIb	1,5	31, 32, 30, 28 30,25	26	5 knistert, biegt sich aus, **6,4** Ausbiegung 18 mm, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 55,5 cm.
470	28. 5.	8. 7.	VIIIa	1,5	31, 31, 30, 30 30,5	16	3 biegt sich aus, 5 knistert, 6 biegt sich aus 16 mm, **6,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 108 cm.
471	28. 5.	8. 7.	VIIIa	1,5	31, 31, 28, 31 30,25	2	5 biegt sich aus, 5,5 knistert, 6 knistert stark, **6,1** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 28 cm.
472	28. 5.	8. 7.	IXb	1,0	3, 8, 3, 5 —	2,25	10 Risse im Kopf, 13 viele vertikale Risse im Kopf, 16,5 knistert, **17** abgeschert, der untere Teil des Kopfes fällt ab.	Wie bei 18 im Abstand von 20 + 31 cm.
473	28. 5.	8. 7.	VIIIa	1,0	29, 31, 30, 30 30,0	13	4 knistert, **4,4** Risse im Kopf, Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.

Nr.	Tag der Anfertigung	Tag der Prüfung	Serie	Höhe h m	Exzentrizität c mm	Abweichung vom Lot mm	Beschreibung des Versuchs	Skizze beim Bruch
474	31. 5.	9. 7.	VIIIb	1,5	3, 2, 3, 7 2,75	24	15 knistert, **15,75** plötzlich knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 19 cm.
475	31. 5.	9. 7.	VIIa	1,5	30, 30, 29, 30 29,75	27	4 biegt sich aus, horizontale Risse im Hals, **4,15** plötzlicher Knall, knickt aus, die Eiseneinlagen brechen.	Wie bei 17 im Abstand von 38 cm.
476	31. 5.	9. 7.	VIIa	1,5	— 5, 3, 3, 9 2,5	—	10 knistert, Risse im Fuß, **11,5** knickt aus im Fuß.	Wie bei 17 im Abstand von 20 cm.
477	31. 5.	10. 7.	VIIa	1,0	30, 31, 29, 30 30,0	—	5 kleine Ausbiegung, **5,75** knickt aus, die Eiseneinlagen reißen.	Wie bei 17 im Abstand von 37,5 cm.
478	31. 5.	10. 7.	VIIa	1,0	31, 29, 30, 31 30,25	0	6 starke Ausbiegung, vertikale Risse im Kopf, **6,05** knickt aus im Kopf.	Wie bei 17 im Abstand von 11 cm.
479	31. 5.	10. 7.	VIIb	1,0	20, 25, 20, 20 21,25	2	3 Risse im Hals, **3,35** leiser Knall, knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 18 cm.
480	1. 6.	9. 7.	VIIIb	1,5	4, 4, 3, 4 3,75	1	12 knistert, vertikale Risse im Kopf und Fuß, 13 knistert, 15 bröckelt ab oben, **17,8** plötzliche Ausknickung unten.	Wie bei 17 im Abstand von 23,5 cm.
481	1. 6.	9. 7.	VIIIb	1,5	1, 1, 3, 5 2,0	8	6 Risse im Kopf, 10 vertikale Risse im Kopf, 12 starker Knall, 13 knistert, **16,7** plötzliche Knickung unten.	Wie bei 17 im Abstand von 37 cm.
482	1. 6.	9. 7.	VIIIb	1,5	30, 30, 30, 31 30,25	8	5 knistert, **5,2** Kopf vertikal knallt.	Wie bei 1.
483	1. 6.	9. 7.	VIIIb	1,5	30, 29, 28, 30 29,25	15	5 Risse unten im Hals, **5,35** knickt aus.	Wie bei 17 im Abstand von 14 cm.
484	1. 6.	10. 7.	VIIIb	1,0	31, 32, 30, 28 30,25	18	3 Risse im Kopf, 5 im unteren Hals, **5,4** unten zerdrückt (ausgeknickt?), oben Kopf vertikal abgeschert.	—
485	1. 6.	10. 7.	IXb	1,0	30, 31, 30, 31 30,5	6	4 vertikale Risse im Kopf, **4,3** Kopf vertikal abgeschert.	Wie bei 1.
486	1. 6.	10. 7.	IXb	1,0	3, 3, 2, 3 2,75	7	17 knistert, Risse im Kopf und Fuß, **18,25** plötzliche Abscherung im Fuß.	Wie bei 18 im Abstand von 16 + 25 cm.

E. Zusammenstellung der Spannungen.

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
									Serie I ab.									
1	1	13 000	1,0	4	—	0	203	171	—	—	2560	—	—	—	196	—	s	
2	4	12 200	1,0	4	—	0	191	161	—	—	2410	—	—	—	184	—	„	
3	11	14 500	1,0	4	—	0	226	191	—	—	2860	—	—	—	218	—	„	
4	12	15 700	1,0	4	—	0	245	207	—	—	3110	—	—	—	236	—	„	
5	49	14 800	1,0	8	—	0	231	195	—	—	2930	—	—	—	223	—	„	
6	50	15 500	1,0	8	—	0	242	204	—	—	3060	—	—	—	233	—	„	
7	51	9 700	1,0	8	—	0	151	128	—	—	1920	—	—	—	146	—	„	
8	55	17 000	1,0	8	—	0	266	224	—	—	3360	—	—	—	256	—	k	
9	56	17 000	1,0	8	—	0	266	224	—	—	3360	—	—	—	256	—	s	im Kopfe
10	57	15 050	1,0	8	—	0	235	198	—	—	2970	—	—	—	227	—	„	
1	7	10 000	1,5	4	—	0	156	132	—	—	1980	—	—	—	176	—	„	
2	8	11 100	1,5	4	—	0	174	146	—	—	2190	—	—	—	195	—	„	
3	9	14 000	1,5	4	—	0	219	184	—	—	2770	—	—	—	245	—	„	
4	10	17 200	1,5	4	—	0	269	227	—	—	3410	—	—	—	303	—	„	
5	13	12 000	1,5	4	—	0	187	158	—	—	2370	—	—	—	211	—	„	
6	14	11 950	1,5	4	—	0	187	158	—	—	2370	—	—	—	211	—	„	
7	52	17 350	1,5	8	—	0	270	228	—	—	3420	—	—	—	304	—	k	
8	53	8 700	1,5	8	—	0	136	115	—	—	1720	—	—	—	153	—	„	ausgeschieden
9	54	14 150	1,5	8	—	0	221	187	—	—	2810	—	—	—	250	—	„	
20	58	10 850	1,5	8	—	0	169	143	—	—	2150	—	—	—	191	—	„	desgl.
1	59	11 100	1,5	8	—	0	173	146	—	—	2190	—	—	—	195	—	s	desgl.
2	60	12 050	1,5	8	—	0	188	159	—	—	2380	—	—	—	212	—	„	desgl.
3	64	15 000	1,5	8	—	0	234	198	—	—	2970	—	—	—	264	—	„	
4	66	13 040	1,5	8	—	0	204	172	—	—	2580	—	—	—	229	—	„	
5	17	11 100	1,0	4	—	0,563	173	146	202	90	2815	—	—	—	228	217	k	desgl.
6	18	13 000	1,0	4	0,1	0,500	203	171	229	113	3210	—	—	—	254	249	„	desgl.
7	23	19 900	1,0	4	0,1	0,525	310	262	355	168	4970	—	—	—	393	417	„	desgl.
8	24	11 150	1,0	4	0,1	0,450	174	147	191	102	2690	—	—	—	212	205	„	im Halse
9	25	16 500	1,0	4	0,1	0,575	258	217	301	132	4190	—	—	—	333	344	„	in der Mitte
30	26	14 050	1,0	4	0,5	0,625	220	185	263	106	3750	—	—	—	290	294	—	im Halse gebrochen
1	29	15 250	1,0	4	0,3	0,550	238	201	275	125	3830	—	—	—	304	309	k	
2	30	14 500	1,0	4	1,2	0,525	226	191	258	122	3610	—	—	—	286	287	„	
3	35	13 450	1,0	8	0,1	0,525	210	177	240	114	3350	—	—	—	266	264	s	ausgeschieden
4	36	13 700	1,0	8	0,7	0,575	214	181	250	110	3480	—	—	—	276	280	k	
5	38	10 750	1,0	8	0,4	0,600	168	142	199	84	2770	—	—	—	220	214	„	
6	39	14 900	1,0	8	1,1	0,588	233	196	274	117	3810	—	—	—	303	308	„	
7	41	11 700	1,0	8	0	0,550	183	154	211	95	2940	—	—	—	233	230	„	
8	44	14 050	1,0	8	0,6	0,525	219	185	250	119	3490	—	—	—	277	276	„	
9	47	13 650	1,0	8	0,7	0,475	213	179	237	121	3330	—	—	—	263	258	„	
40	48	14 000	1,0	8	0,4	0,525	219	184	250	120	3490	—	—	—	277	275	„	
1	62	10 650	1,0	8	2,0	0,500	166	140	188	92	2630	—	—	—	208	200	—	desgl.
2	63	11 350	1,0	8	—	0,525	177	150	202	96	2820	—	—	—	224	219	k	
3	15	15 500	1,5	4	—	0,500	242	204	273	134	3820	—	—	—	341	420	—	desgl.
4	16	10 000	1,5	4	0,4	0,550	156	132	181	82	2520	—	—	—	225	218	—	desgl.
5	19	13 000	1,5	4	2,1	0,550	203	171	235	107	3280	—	—	—	292	325	k	
6	20	13 000	1,5	4	0,5	0,575	203	171	237	104	3290	—	—	—	294	330	„	
7	21	15 100	1,5	4	0,3	0,500	236	199	266	131	3720	—	—	—	332	408	„	
8	22	14 100	1,5	4	0,5	0,525	220	186	252	121	3530	—	—	—	314	368	„	
9	27	9 600	1,5	4	0,6	0,500	150	126	169	83	2380	—	—	—	211	202	„	desgl.
50	28	12 500	1,5	4	0,5	0,500	195	165	220	108	3110	—	—	—	275	292	—	im Halse gebrochen
1	31	13 550	1,5	4	0,7	0,625	212	178	254	102	3520	—	—	—	313	370	k	
2	32	12 450	1,5	4	0,5	0,675	194	164	238	89	3290	—	—	—	293	335	„	
3	33	11 800	1,5	8	1,3	0,550	184	155	213	97	2760	—	—	—	265	268	„	
4	34	11 150	1,5	8	—	0,525	174	147	199	95	2590	—	—	—	248	264	„	
5	37	12 000	1,5	8	0,2	0,675	187	158	230	85	2940	—	—	—	283	320	„	
6	40	11 300	1,5	8	0,2	0,500	176	149	199	98	2590	—	—	—	249	252	„	
7	42	4 800	1,5	8	0,6	0,500	75	63	85	42	1140	—	—	—	106	90	—	ausgeschieden
8	43	15 500	1,5	8	0,2	0,550	242	204	280	128	3630	—	—	—	348	454	k	im Fuße
9	45	11 940	1,5	8	1,6	0,500	186	157	210	104	2730	—	—	—	262	273	„	
60	46	9 500	1,5	8	0,8	0,525	148	125	170	80	2210	—	—	—	212	203	„	

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_r	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
									Serie I c.									
61	259	12 900	1,0	4	—	0	201	176	—	—	2640	—	—	—	202	—	*s*	
2	260	18 200	1,0	4	—	0	284	248	—	—	3720	—	—	—	286	—	„	
3	255	13 900	1,5	4	—	0	217	189	—	—	2830	—	—	—	253	—	*k*	
4	256	13 400	1,5	4	—	0	209	182	—	—	2730	—	—	—	244	—	„	
5	244	12 000	1,0	4	—	0,500	187	163	219	107	3070	—	—	—	243	238	„	
6	245	10 250	1,0	4	—	0,500	160	140	188	92	2630	—	—	—	209	203	„	
7	252	11 200	1,0	4	—	0,500	175	152	204	100	2860	—	—	—	227	220	„	
8	246	11 650	1,5	4	0,4	0,500	182	159	214	104	2995	—	—	—	268	281	„	
9	247	12 000	1,5	4	0,4	0,500	187	163	219	107	1760	—	—	—	274	292	„	
70	251	14 600	1,5	4	0,4	0,500	228	199	267	130	3750	—	—	—	335	417	„	
1	243	6 500	1,0	4	—	2,000	102	88	—	—	—	218	2745	— 199	247	228	„	
2	253	7 350	1,0	4	—	2,000	115	100	—	—	—	244	3105	— 225	277	260	„	
3	254	7 150	1,0	4	—	2,000	112	97	—	—	—	237	3020	— 219	269	253	„	
4	248	6 600	1,5	4	—	2,000	103	90	—	—	—	219	2790	— 202	249	269	„	
5	249	5 150	1,5	4	—	2,000	80	70	—	—	—	171	2175	— 166	194	198	„	
6	250	5 950	1,5	4	—	2,000	93	81	—	—	—	197	2515	— 182	221	236	„	
									Serie II ab.									
77	295	13 350	1,0	4	—	0	208	161	—	—	2320	—	—	—	186	—	*s*	
8	296	16 000	1,0	4	—	0	250	193	—	—	2880	—	—	—	222	—	„	
9	297	14 350	1,0	4	—	0	224	173	—	—	2590	—	—	—	199	—	„	
80	298	15 000	1,0	4	—	0	234	181	—	—	2730	—	—	—	208	—	„	
1	299	15 500	1,0	8	—	0	242	187	—	—	2810	—	—	—	216	—	„	
2	300	15 350	1,0	8	—	0	240	185	—	—	2775	—	—	—	211	—	„	
3	301	18 100	1,0	8	—	0	283	218	—	—	3270	—	—	—	251	—	„	
4	302	13 300	1,0	8	—	0	208	160	—	—	2405	—	—	—	184	—	„	
5	311	15 460	1,0	8	—	0	242	186	—	—	2780	—	—	—	214	—	„	
6	312	14 050	1,0	8	—	0	220	169	—	—	2530	—	—	—	195	—	„	
7	313	12 500	1,0	8	—	0	195	151	—	—	2260	—	—	—	174	—	„	
8	257	14 850	1,5	4	—	0	232	179	—	—	2675	—	—	—	241	—	*k*	im Halse
9	292	14 450	1,5	4	—	0	226	174	—	—	2615	—	—	—	234	—	*s*	
90	293	14 000	1,5	4	—	0	219	169	—	—	2530	—	—	—	227	—	„	
1	294	11 400	1,5	4	—	0	178	137	—	—	2070	—	—	—	184	—	„	im Kopfe
2	303	12 000	1,5	8	—	0	187	145	—	—	2170	—	—	—	196	—	„	
3	304	12 600	1,5	8	—	0	197	151	—	—	2275	—	—	—	203	—	„	
4	305	16 700	1,5	8	—	0	261	200	—	—	3020	—	—	—	269	—	„	desgl.
5	306	14 750	1,5	8	—	0	230	178	—	—	2670	—	—	—	239	—	„	
6	307	12 350	1,5	8	—	0	193	149	—	—	2230	—	—	—	200	—	—	ausgeschieden
7	308	13 800	1,5	8	—	0	216	166	—	—	2485	—	—	—	223	—	*s*	
8	321	12 250	1,5	8	—	0,500	192	147	199	95	2795	—	—	—	250	255	*k*	
9	322	11 150	1,5	8	—	0,500	174	135	183	87	2550	—	—	—	230	227	„	
100	264	13 050	1,0	4	0,4	0,500	204	157	212	101	2960	—	—	—	236	232	„	
1	265	14 000	1,0	4	0,8	0,475	218	169	216	111	3030	—	—	—	242	246	„	
2	266	16 000	1,0	4	0,9	0,475	250	193	258	127	3620	—	—	—	287	285	„	
3	277	14 000	1,0	4	0,6	0,500	218	169	228	109	3185	—	—	—	254	250	„	
4	278	12 150	1,0	4	0,3	0,500	190	147	199	95	2780	—	—	—	221	214	„	
5	267	10 800	1,0	8	0,5	0,400	169	130	166	92	2345	—	—	—	186	176	„	desgl.
6	268	9 900	1,0	8	0,2	0,500	155	119	161	76	2260	—	—	—	179	171	„	
7	269	14 650	1,0	8	1,0	0,525	229	176	241	109	3355	—	—	—	268	267	„	
8	276	11 750	1,0	8	1,0	0,550	183	142	195	85	2710	—	—	—	217	213	„	
9	261	10 450	1,5	4	2,4	0,500	163	126	170	81	2510	—	—	—	214	227	„	
110	262	11 300	1,5	4	0,6	0,600	176	136	192	79	2665	—	—	—	239	248	„	
1	263	12 350	1,5	4	—	0,450	193	149	197	101	2765	—	—	—	249	233	„	
2	273	13 850	1,5	4	0,6	0,550	216	167	231	102	3210	—	—	—	289	324	*s*	desgl.
3	274	13 500	1,5	4	1,0	0,500	210	163	221	105	3075	—	—	—	278	298	*k*	
4	282	11 750	1,5	4	1,0	0,525	183	141	193	89	2690	—	—	—	242	247	„	
5	288	12 700	1,5	4	0,2	0,475	198	175	233	116	3370	—	—	—	292	302	„	
6	289	12 250	1,5	4	0,8	0,500	191	147	199	94	2675	—	—	—	250	256	„	
7	270	12 350	1,5	8	1,2	0,450	193	149	197	101	2765	—	—	—	249	250	„	
8	271	10 450	1,5	8	0,2	0,450	163	125	165	85	2320	—	—	—	209	198	*s*	desgl.
9	272	12 300	1,5	8	—	0,525	192	148	201	92	2800	—	—	—	252	263	*k*	

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
120	275	12 850	1,5	8	0,2	0,575	201	155	217	92	3010	—	—	—	271	293	k	
1	258	6 750	1,0	4	—	2,000	105	81	—	—	—	200	2548	— 206	212	212	„	
2	279	8 500	1,0	4	0,8	2,025	133	102	—	—	—	255	3228	— 294	271	275	„	
3	280	6 200	1,0	4	2,0	1,950	97	75	—	—	—	180	2296	— 134	191	192	„	
4	281	6 750	1,0	4	0,5	1,975	105	81	—	—	—	198	2524	— 176	210	210	s	ausgeschieden
5	285	6 950	1,0	4	0,4	1,900	108	84	—	—	—	199	2544	— 101	212	213	k	
6	286	11 050	1,0	4	—	2,000	173	133	—	—	—	328	4168	— 338	348	370	„	
7	287	12 400	1,0	4	3,5	1,950	194	143	—	—	—	360	4575	— 268	403	416	„	
8	314	6 500	1,0	8	—	2,000	101	78	—	—	—	193	2456	— 199	202	203	„	
9	315	7 500	1,0	8	—	2,000	117	90	—	—	—	223	2834	— 230	237	238	„	
130	316	8 200	1,0	8	—	2,000	128	99	—	—		244	3096	— 251	259	266	„	
1	317	7 800	1,0	8	—	2,000	122	94	—	—	—	232	2946	— 239	246	250	„	
2	318	5 000	1,0	8	—	2,000	78	60	—	—	—	149	1889	— 153	158	154	„	desgl.
3	283	7 200	1,5	4	1,3	2,175	112	87	—	—	—	228	2864	— 435	257	278	„	
4	284	5 950	1,5	4	1,4	2,025	93	72	—	—	—	178	2260	— 206	202	206	s	desgl.
5	290	8 000	1,5	4	0,4	2,150	125	96	—	—	—	251	3163	— 452	284	317	k	
6	291	8 025	1,5	4	1,2	1,975	125	97	—	—	—	236	3000	— 209	269	303	„	
7	309	6 050	1,5	8	—	2,000	94	70	—	—	—	180	2285	— 185	205	212	„	
8	310	6 150	1,5	8	—	2,000	96	74	—	—	—	183	2322	— 188	208	216	„	
9	319	6 150	1,5	8	—	2,000	96	74	—	—	—	183	2322	— 188	208	216	—	desgl.
140	320	7 400	1,5	8	0,2	1,850	115	89	—	—	—	209	2692	— 59	239	259	k	
									Serie III ab.									
141	105	11 050	1,0	4	—	0	173	127	—	—	1095	—	—	—	146	—	s	
2	106	6 200	1,0	4	—	0	97	71	—	—	1065	—	—	—	82	—	„	ausgeschieden
3	107	9 900	1,0	4	—	0	154	106	—	—	1590	—	—	—	122	—	„	
4	108	13 700	1,0	4	—	0	214	156	—	—	2335	—	—	—	179	—	„	
5	109	12 500	1,0	4	—	0	195	142	—	—	2125	—	—	—	163	—	„	
6	110	7 900	1,0	4	—	0	123	90	—	—	1350	—	—	—	103	—	„	desgl.
7	155	16 100	1,0	8	—	0	252	184	—	—	2760	—	—	—	212	—	„	
8	156	16 650	1,0	8	—	0	260	190	—	—	2850	—	—	—	218	—	„	
9	157	18 050	1,0	8	—	0	282	207	—	—	3105	—	—	—	238	—	„	
150	158	13 950	1,0	8	—	0	218	160	—	—	2400	—	—	—	184	—	„	
1	159	16 260	1,0	8	—	0	254	186	—	—	2780	—	—	—	213	—	„	
2	101	14 150	1,5	4	—	0	221	162	—	—	2425	—	—	—	218	—	„	
3	102	11 900	1,5	4	—	0	186	136	—	—	2030	—	—	—	183	—	„	
4	103	12 000	1,5	4	—	0	188	137	—	—	2055	—	—	—	185	—	„	
5	104	15 200	1,5	4	—	0	237	174	—	—	2610	—	—	—	234	—	„	
6	111	12 850	1,5	4	—	0	201	147	—	—	2025	—	—	—	198	—	„	
7	112	12 080	1,5	4	—	0	189	138	—	—	2070	—	—	—	186	—	„	
8	152	16 300	1,5	8	—	0	255	186	—	—	2780	—	—	—	250	—	„	
9	153	15 500	1,5	8	—	0	242	178	—	—	2820	—	—	—	239	—	„	
160	154	17 700	1,5	8	—	0	276	202	—	—	3025	—	—	—	272	—	„	
1	161	16 250	1,5	8	—	0	254	186	—	—	2780	—	—	—	250	—	„	
2	162	14 050	1,5	8	—	0	219	160	—	—	2400	—	—	—	215	—	„	
3	163	15 050	1,5	8	—	0	235	172	—	—	2575	—	—	—	231	—	„	
4	67	11 650	1,0	4	0,1	0,525	182	133	181	85	2538	—	—	—	201	195	„	
5	58	9 100	1,0	4	0,6	0,525	142	104	142	66	2080	—	—	—	158	150	—	Kopf ausgebogen
6	69	12 000	1,0	4	—	0,500	187	137	184	89	2580	—	—	—	205	198	s	ausgeschieden
7	119	12 800	1,0	4	0,6	0,525	200	146	200	92	2970	—	—	—	222	215	k	
8	121	13 100	1,0	4	—	0,475	205	150	200	100	2810	—	—	—	223	217	„	
9	131	15 200	1,0	4	1,2	0,475	237	174	232	116	3250	—	—	—	258	253	„	
170	136	11 100	1,0	8	—	0,500	173	127	171	83	2385	—	—	—	190	182	„	
1	143	15 600	1,0	8	0,5	0,475	244	178	237	119	3330	—	—	—	267	358	„	
2	144	11 100	1,0	8	0,5	0,525	172	127	171	83	2385	—	—	—	190	185	„	
3	145	15 050	1,0	8	0,2	0,525	235	172	235	109	3280	—	—	—	261	258	{k {s	im Kopfe
4	146	12 750	1,0	8	0,8	0,550	199	146	202	90	2800	—	—	—	224	218	k	
5	147	16 750	1,0	8	1,8	0,475	262	191	254	127	3570	—	—	—	283	281	„	
6	148	15 400	1,0	8	2,0	0,500	240	176	237	114	3315	—	—	—	262	260	„	
7	70	7 800	1,5	4	2,2	0,525	122	89	122	56	1700	—	—	—	153	137	„	ausgeschieden
8	126	15 000	1,5	4	0,1	0,550	234	171	237	105	3300	—	—	—	296	336	„	
9	128	14 260	1,5	4	0,5	0,500	222	162	218	105	3060	—	—	—	274	293	„	

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
180	129	15 150	1,5	4	—	0,500	237	173	233	112	3270	—	—	—	293	327	k	
1	140	15 500	1,5	8	2,0	0,500	242	177	238	115	3350	—	—	—	299	340	"	
2	141	14 500	1,5	8	5,0	0,500	227	166	224	108	3130	—	—	—	281	303	"	
3	142	13 650	1,5	8	1,0	0,500	213	156	210	101	2940	—	—	—	264	277	"	
4	149	13 000	1,5	8	1,9	0,450	203	149	196	102	2760	—	—	—	247	248	"	
5	150	14 075	1,5	8	1,8	0,500	220	162	218	106	3065	—	—	—	274	293	—	ausgeschieden
6	151	11 750	1,5	8	0,6	0,500	184	135	182	88	2545	—	—	—	228	225	—	desgl.
7	120	7 450	1,0	4	0,2	2,075	116	85	—	—	—	213	2075	— 256	226	227	k	
8	123	10 900	1,0	4	0	2,125	170	125	—	—	—	318	4020	— 453	337	357	"	
9	133	9 500	1,0	4	1,0	2,000	148	108	—	—	—	265	3375	— 222	281	290	"	
190	134	7 950	1,0	8	1,4	2,075	124	91	—	—	—	227	2880	— 274	241	243	"	
1	135	7 050	1,0	8	1,3	2,000	110	81	—	—	—	197	2508	— 165	209	211	"	
2	113	5 710	1,5	4	0,2	2,125	89	65	—	—	—	166	2105	— 242	188	190	"	
3	118	6 480	1,5	4	—	2,150	101	74	—	—	—	190	2405	— 303	216	225	—	desgl.
4	130	6 350	1,5	4	0,2	1,975	99	75	—	—	—	176	2440	— 126	202	222	—	desgl.
5	137	7 750	1,5	8	0,8	2,050	121	88	—	—	—	220	2790	— 237	251	272	k	
6	138	6 950	1,5	8	—	1,925	108	79	—	—	—	189	2436	— 92	216	227	—	desgl.
7	139	8 050	1,5	8	2,3	1,950	125	92	—	—	—	222	2828	— 138	254	278	k	
8	122	6 200	1,0	4	—	3,025	97	71	—	—	—	241	2900	—1315	252	239	—	desgl.
9	124	1 000	1,0	4	—	3,075	16	11	—	—	—	39	473	— 221	41	35	—	ganz ausgeschieden
200	132	3 150	1,0	4	1,8	3,100	49	36	—	—	—	124	1497	— 707	130	118	—	desgl.
1	125	4 520	1,5	4	1,8	3,000	70	53	—	—	—	174	2105	— 922	193	189	—	desgl.
2	127	1 100	1,5	4	0,1	3,000	17	13	—	—	—	42	512	— 224	47	42	—	desgl.
3	116	1 900	1,5	4	0,1	4,000	30	22	—	—	—	94	1090	— 808	102	88	—	desgl.
4	117	3 300	1,5	4	0,4	4,100	51	38	—	—	—	167	1940	—1437	180	164	—	desgl

Serie IV ab.

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
205	160	13 150	1,0	2	—	0	206	144	—	—	2160	—	—	—	156	—	s	
6	167	15 400	1,0	2	—	0	240	168	—	—	2520	—	—	—	182	—	"	
7	168	17 750	1,0	2	—	0	277	194	—	—	2910	—	—	—	223	—	"	
8	169	12 650	1,0	2	—	0	198	139	—	—	2085	—	—	—	160	—	"	
9	170	17 800	1,0	2	—	0	278	195	—	—	2925	—	—	—	225	—	"	
210	171	16 500	1,0	2	—	0	258	181	—	—	2715	—	—	—	208	—	"	
1	172	17 000	1,0	2	—	0	266	186	—	—	2790	—	-	—	215	—	"	
2	217	16 250	1,0	4	—	0	254	191	—	—	2865	—	—	—	220	—	"	ausgebogen
3	218	13 800	1,0	4	—	0	226	162	—	—	2430	—	—	—	187	—	"	
4	219	21 300	1,0	4	—	0	333	250	—	—	3650	—	—	—	288	—	"	
5	220	16 950	1,0	4	—	0	264	199	—	—	2985	—	—	—	229	—	"	
6	221	18 750	1,0	4	—	0	293	220	—	—	3300	—	—	—	253	—	"	
7	222	20 100	1,0	4	—	0	314	235	—	—	3525	—	—	—	271	—	"	
8	164	19 000	1,5	2	—	0	297	206	—	—	3090	—	—	—	281	—	"	
9	165	18 500	1,5	2	—	0	289	202	—	—	3030	—	—	—	273	—	"	
220	166	17 100	1,5	2	—	0	267	187	—	—	2805	—	—	—	253	—	"	
1	173	14 150	1,5	2	—	0	221	155	—	—	2325	—	—	—	209	—	"	
2	174	14 050	1,5	2	—	0	219	154	—	—	2105	—	—	—	208	—	"	
3	175	16 900	1,5	2	—	0	264	185	—	—	2775	—	—	—	250	—	"	
4	214	13 100	1,5	4	—	0	204	143	—	—	2300	—	—	—	207	—	"	
5	215	12 100	1,5	4	—	0	189	142	—	—	2130	—	—	—	192	—	"	
6	223	19 250	1,5	4	—	0	301	226	—	—	3390	—	—	—	307	—	k	
7	224	16 500	1,5	4	—	0	258	193	—	—	2900	—	—	—	261	—	"	
8	225	19 000	1,5	4	—	0	294	223	—	—	3330	—	—	—	301	—	s	
9	226	15 050	1,5	4	—	0	244	183	—	—	2745	—	—	—	247	—	"	
230	180	14 050	1,0	2	1,3	0,500	220	154	217	91	3015	—	—	—	241	275	k	
1	181	15 900	1,0	2	—	0,500	248	174	245	103	3300	—	—	—	272	267	"	
2	182	14 900	1,5	2	—	0,500	233	163	230	96	3190	—	—	—	255	245	"	
3	183	15 100	1,5	2	—	0,500	236	165	233	97	3230	—	—	—	258	249	"	
4	184	14 150	1,5	2	—	0,500	221	155	219	91	3035	—	—	—	243	233	"	
5	185	14 650	1,5	2	—	0,500	229	160	226	94	3155	—	—	—	251	241	"	
6	205	14 000	1,5	4	—	0,500	219	164	227	101	3165	—	—	—	252	243	"	
7	206	13 100	1,5	4	—	0,500	205	153	212	94	2950	—	—	—	236	225	"	
8	207	11 150	1,5	4	—	0,500	174	131	181	81	2520	—	—	—	201	189	"	
9	208	13 000	1,0	4	—	0,500	203	152	207	97	2890	—	—	—	230	226	"	

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
240	209	13 850	1,0	4	—	0,500	216	162	224	100	3125	—	—	—	245	242	k	
1	210	12 250	1,0	4	—	0,500	191	143	198	88	2755	—	—	—	220	210	„	
2	216	12 100	1,0	4	—	0,500	189	142	197	87	2745	—	—	—	219	208	„	
3	176	13 400	1,5	2	—	0,500	209	147	207	87	2875	—	—	—	259	280	„	
4	176	13 650	1,5	2	—	0,500	213	150	212	88	2945	—	—	—	265	291	„	
5	178	12 100	1,5	2	—	0,500	189	132	187	77	2595	—	—	—	233	236	„	
6	186	12 650	1,5	2	—	0,500	198	139	196	82	2720	—	—	—	245	254	„	
7	187	11 150	1,5	2	—	0,500	174	122	172	72	2390	—	—	—	215	210	„	
8	188	11 800	1,5	2	—	0,500	184	129	182	76	2525	—	—	—	227	228	„	
9	202	13 200	1,5	4	—	0,500	206	154	214	94	2980	—	—	—	268	291	„	
250	203	12 000	1,5	4	—	0,500	187	140	194	86	2700	—	—	—	243	249	„	
1	211	13 700	1,5	4	—	0,500	214	160	222	98	3090	—	—	—	278	310	„	
2	212	13 050	1,5	4	—	0,500	204	153	212	94	2960	—	—	—	266	286	„	
3	213	12 700	1,5	4	—	0,500	198	149	206	92	2870	—	—	—	258	275	„	
4	192	7 100	1,0	2	—	2,000	111	78	—	—	—	224	2844	— 268	236	208	„	
5	193	8 600	1,0	2	—	2,000	134	94	—	—	—	271	3445	— 325	285	257	„	ausgeschieden
6	194	7 950	1,0	2	—	2,000	124	87	—	—	—	251	3585	— 301	264	235	„	
7	195	7 350	1,0	4	—	2,000	115	86	—	—	—	232	2945	— 278	245	231	„	
8	196	8 500	1,0	4	—	2,000	133	100		—	—	268	3405	— 322	283	273	„	
9	197	8 850	1,0	4	—	2,000	138	104	—	—	—	279	3548	— 335	295	286	„	
260	204	7 450	1,0	4	—	2,000	116	87	—	—	—	235	2988	— 282	248	233	„	
1	189	6 500	1,5	2	—	2,000	101	71	—	—	—	205	2605	— 246	230	216	„	
2	190	6 950	1,5	2	—	2,000	108	76	—	—	—	219	2785	— 263	246	234	„	
3	191	6 700	1,5	2	—	2,000	104	73	—	—	—	211	2685	— 254	237	223	„	
4	198	8 200	1,5	4	—	2,000	128	96	—	—	—	259	3285	— 311	293	314	„	
5	199	7 700	1,5	4	—	2,000	120	90	—	—	—	243	3085	— 292	275	286	„	
6	200	8 050	1,5	4	—	2,000	125	94	—	—	—	254	3215	— 304	287	306	„	
7	201	6 700	1,5	4	—	2,000	104	78	—	—	—	211	2685	— 254	238	243	„	
8	179	3 350	1,0	2	—	3,000	52	37	—	—	—	149	1780	— 952	155	122	—	desgl.

Serie V ab.

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
269	341	17 450	1,0	2	—	0	273	183	—	—	2745	—	—	—	212	—	s	
270	343	16 500	1,0	2	—	0	258	173	—	—	2595	—	—	—	199	—	„	
1	349	17 700	1,0	2	—	0	276	186	—	—	2790	—	—	—	214	—	„	
2	350	16 150	1,0	2	—	0	252	169	—	—	2535	—	—	—	195	—	„	
3	351	12 850	1,0	2	—	0	201	135	—	—	2025	—	—	—	155	—	„	
4	354	15 400	1,0	2	—	0	240	162	—	—	2430	—	—	—	186	—	„	
5	355	16 850	1,0	4	—	0	263	189	—	—	2835	—	—	—	217	—	„	im Fuße
6	356	18 650	1,0	4	—	0	291	208	—	—	3120	—	—	—	241	—	„	
7	357	14 000	1,0	4	—	0	218	156	—	—	2340	—	—	—	180	—	„	
8	364	16 040	1,0	4	—	0	250	179	—	—	2685	—	—	—	207	—	„	
9	365	15 750	1,0	4	—	0	246	176	—	—	2640	—	—	—	203	—	„	desgl.
280	366	17 100	1,0	4	—	0	267	191	—	—	2865	—	—	—	220	—	„	
1	345	13 700	1,5	2	—	0	214	144	—	—	2160	—	—	—	194	—	„	
2	346	13 150	1,5	2	—	0	205	138	—	—	2070	—	—	—	186	—	„	ausgeschieden
3	347	15 450	1,5	2	—	0	241	162	—	—	2430	—	—	—	218	—	„	
4	348	16 500	1,5	2	—	0	258	173	—	—	2595	—	—	—	233	—	„	
5	352	14 250	1,5	2	—	0	222	149	—	—	2235	—	—	—	201	—	„	
6	353	13 100	1,5	2	—	0	204	137	—	—	2055	—	—	—	185	—	„	
7	358	14 800	1,5	4	—	0	231	166	—	—	2490	—	—	—	224	—	„	
8	359	11 500	1,5	4	—	0	174	129	—	—	1935	—	—	—	174	—	„	
9	360	14 100	1,5	4	—	0	220	158	—	—	2370	—	—	—	273	—	„	
290	361	14 950	1,5	4	—	0	233	167	—	—	2505	—	—	—	226	—	„	im Kopfe
1	362	13 650	1,5	4	—	0	213	153	—	—	2395	—	—	—	206	—	„	
2	363	16 150	1,5	4	—	0	252	181	—	—	2715	—	—	—	244	—	„	
3	330	18 700	1,0	2	1,2	0,350	292	196	252	140	3560	—	—	—	282	268	k	
4	331	18 400	1,0	2	1,6	0,525	287	193	276	110	3825	—	—	—	305	303	„	
5	338	13 700	1,0	2	1,8	0,600	217	144	215	73	2950	—	—	—	237	227	„	
6	339	14 200	1,0	2	1,8	0,450	222	149	204	94	2850	—	—	—	227	214	„	
7	340	16 500	1,0	2	0,9	0,500	258	173	243	103	3380	—	—	—	269	262	„	
8	342	13 360	1,0	2	0,9	0,525	209	140	186	94	2610	—	—	—	207	211	„	
9	376	12 450	1,0	4	0,7	0,475	194	139	184	94	2950	—	—	—	205	196	„	

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
300	379	12 650	1,0	4	1,6	0,550	197	142	196	81	2720	—	—	—	218	216	*k*	Ausführ. minder gut
1	380	13 950	1,0	4	1,4	0,525	218	156	200	112	2830	—	—	—	224	237	„	
2	381	15 800	1,0	4	0,4	0,425	246	177	209	145	3010	—	—	—	236	253	„	
3	382	13 000	1,0	4	1,0	0,350	203	145	177	113	2520	—	—	—	199	192	„	
4	333	11 750	1,5	2	1,0	0,525	183	123	176	70	2440	—	—	—	219	213	„	der Fuß vernichtet
5	334	10 700	1,5	2	1,1	0,375	167	112	153	71	2140	—	—	—	192	166	„	
6	335	10 450	1,5	2	0,8	0,500	163	110	166	54	2275	—	—	—	203	180	—	ausgeschieden
7	336	12 850	1,5	2	1,3	0,525	201	135	183	87	2560	—	—	—	230	248	*k*	
8	337	11 800	1,5	2	1,2	0,750	184	124	199	49	2700	—	—	—	242	256	—	desgl.
9	344	10 500	1,5	2	1,2	0,575	164	110	175	45	2370	—	—	—	213	190	*k*	
310	373	11 950	1,5	4	0,1	0,500	186	134	183	85	2555	—	—	—	230	231	„	
1	375	11 850	1,5	4	1,4	0,450	185	133	178	88	2490	—	—	—	224	218	„	
2	383	11 200	1,5	4	0,7	0,475	175	125	175	75	2430	—	—	—	219	207	„	
3	384	12 000	1,5	4	0,3	0,550	187	134	192	76	2660	—	—	—	239	241	„	
4	385	10 850	1,5	4	0,1	0,500	169	121	175	67	2415	—	—	—	217	200	„	
5	374	12 200	1,5	4	1,7	0,500	190	136	188	84	2620	—	—	—	235	235	„	
6	386	12 350	1,5	4	—	0,350	193	138	174	102	2470	—	—	—	221	209	„	
7	326	9 500	1,0	2	1,0	1,925	148	100	—	—	—	274	3505	— 171	281	267	„	
8	327	8 600	1,0	2	1,8	2,000	134	90	—	—	—	256	3250	— 264	270	242	—	desgl.
9	328	10 400	1,0	2	0,4	1,975	162	109	—	—	—	306	3900	— 271	323	297	*k*	
320	367	10 550	1,0	4	0,4	1,975	165	118	—	—	—	310	3950	— 274	327	323	„	
1	368	10 800	1,0	4	—	2,000	168	121	—	—	—	321	4075	— 331	339	335	*s*	
2	369	11 500	1,0	4	1,2	2,000	179	128	—	—	—	342	4350	— 352	361	358	„	
3	377	11 250	1,0	4	2,1	2,100	176	126	—	—	—	347	3475	— 533	366	353	*k*	
4	323	6 850	1,5	2	3,5	2,000	107	72	—	—	—	203	2580	— 209	228	216	*s*	
5	324	6 530	1,5	2	2,0	2,000	102	69	—	—	—	194	2465	— 200	218	203	„	
6	325	7 550	1,5	2	—	2,000	118	84	—	—	—	224	2845	— 231	253	258	„	
7	370	7 350	1,5	4	0,1	2,050	115	82	—	—	—	222	2810	— 284	250	255	—	desgl.
8	371	7 300	1,5	4	1,2	2,050	114	81	—	—	—	220	2785	— 282	248	251	*k*	
9	372	7 250	1,5	4	1,4	2,000	113	81	—	—	—	216	2745	— 223	244	247	—	desgl.
330	329	5 720	1,0	2	1,4	3,100	89	60	—	—	—	245	2935	—1555	254	207	*k*	
1	378	6 500	1,0	4	0,6	3,000	101	72	—	—	—	269	3240	—1555	280	248	„	
2	322	4 200	1,5	2	0,3	3,025	66	44	—	—	—	175	2100	—1035	190	158	—	desgl.

Serie VI ab.

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
333	409	8 050	1,0	4	—	0	126	97	—	—	1455	—	—	—	112	—	*s*	
4	411	8 450	1,0	4	—	0	132	102	—	—	1530	—	—	—	117	—	„	
5	421	9 500	1,0	4	—	0	148	115	—	—	1720	—	—	—	133	—	„	
6	423	10 350	1,0	4	—	0	162	125	—	—	1875	—	—	—	144	—	„	
7	424	8 300	1,0	4	—	0	129	100	—	—	1505	—	—	—	115	—	„	
8	422	9 250	1,0	8	—	0	144	112	—	—	1675	—	—	—	129	—	„	
9	428	7 350	1,0	8	—	0	115	89	—	—	1330	—	—	—	103	—	—	ausgeschieden
340	429	8 250	1,0	8	—	0	129	99	—	—	1490	—	—	—	114	—	—	desgl.
1	430	8 200	1,0	8	—	0	128	99	—	—	1485	—	—	—	114	—	*s*	
2	441	9 050	1,0	8	—	0	141	109	—	—	1635	—	—	—	126	—	„	
3	442	6 400	1,0	8	—	0	100	77	—	—	1155	—	—	—	89	—	*k*	
4	443	8 400	1,0	8	—	0	131	101	—	—	1520	—	—	—	117	—	*s*	
5	415	7 650	1,5	4	—	0	119	92	—	—	1385	—	—	—	124	—	„	
6	416	8 950	1,5	4	—	0	140	108	—	—	1620	—	—	—	145	—	„	
7	418	9 650	1,5	4	—	0	151	116	—	—	1745	—	—	—	156	—	*k*	
8	419	8 300	1,5	4	—	0	130	100	—	—	1505	—	—	—	134	—	*s*	
9	420	8 450	1,5	4	—	0	132	102	—	—	1525	—	—	—	138	—	„	
350	425	9 000	1,5	4	—	0	140	108	—	—	1625	—	—	—	146	—	„	
1	426	8 000	1,5	8	—	0	125	96	—	—	1445	—	—	—	130	—	„	
2	433	9 500	1,5	8	—	0	148	114	—	—	1715	—	—	—	154	—	„	
3	434	8 500	1,5	8	—	0	132	102	—	—	1530	—	—	—	138	—	„	
4	435	9 800	1,5	8	—	0	153	118	—	—	1770	—	—	—	159	—	„	
5	436	7 000	1,5	8	—	0	109	84	—	—	1265	—	—	—	113	—	*s*	und ausgeknickt
6	438	5 400	1,5	8	—	0	84	65	—	—	975	—	—	—	88	—	„	desgl.
7	394	7 650	1,0	4	1,0	0,425	119	92	120	64	1695	—	—	—	134	124	*k*	
8	396	7 400	1,0	4	1,2	0,500	115	89	121	58	1695	—	—	—	135	126	„	
9	405	6 350	1,0	4	0,2	0,500	99	77	104	50	1440	—	—	—	115	112	„	

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s / k	Anmerkungen
360	406	6 250	1,0	4	0,9	0,450	98	75	99	51	1395	—	—	—	110	102	*k*	
1	408	10 250	1,0	4	0,4	0,525	160	123	169	77	2365	—	—	—	188	180	„	
2	410	7 550	1,0	4	1,8	0,500	118	91	124	59	1735	—	—	—	138	128	„	
3	437	5 200	1,0	8	0,6	0,500	81	63	86	41	1200	—	—	—	96	80	„	
4	449	5 100	1,0	8	1,4	0,475	80	61	83	41	1150	—	—	—	92	89	*s*	
5	450	5 000	1,0	8	0	0,550	78	60	84	37	1170	—	—	—	93	86	—	ausgeschieden
6	451	5 750	1,0	8	0,7	0,438	90	69	90	48	1270	—	—	—	101	93	*s*	
7	452	5 100	1,0	8	2,2	0,575	80	61	86	36	1195	—	—	—	95	88	*k*	
8	453	9 500	1,0	8	2,0	0,500	148	115	156	74	2180	—	—	—	174	165	„	
9	454	5 450	1,0	8	0,8	0,625	85	66	95	37	1315	—	—	—	105	98	„	
370	456	6 800	1,0	8	0	0,500	106	82	111	53	1555	—	—	—	123	115	„	
1	464	7 650	1,0	8	0,2	0,650	119	92	135	50	1865	—	—	—	149	142	„	
2	398	6 300	1,5	4	1,3	0,625	98	76	110	43	1525	—	—	—	137	122	„	
3	399	5 250	1,5	4	2,0	0,500	81	63	86	41	1200	—	—	—	108	91	„	
4	401	6 200	1,5	4	1,2	0,475	97	75	100	50	1405	—	—	—	126	109	„	
5	402	5 800	1,5	4	0,1	0,425	91	70	91	49	1280	—	—	—	115	98	„	
6	404	5 400	1,5	4	1,1	0,525	84	65	91	41	1265	—	—	—	114	96	—	desgl.
7	414	6 950	1,5	4	2,6	0,525	108	84	116	53	1620	—	—	—	145	128	*k*	
8	445	5 200	1,5	8	0,4	0,475	81	63	84	42	1180	—	—	—	106	91	„	
9	457	7 350	1,5	8	0,4	0,475	115	89	119	59	1670	—	—	—	150	133	„	
380	458	7 000	1,5	8	0,8	0,550	109	84	117	51	1630	—	—	—	146	131	„	
1	461	6 350	1,5	8	3,0	0,450	99	77	102	53	1435	—	—	—	129	111	„	
2	462	7 370	1,5	8	0,1	0,600	115	89	127	51	1760	—	—	—	158	144	„	
3	463	6 200	1,5	8	0,2	0,625	97	75	108	42	1495	—	—	—	134	119	„	
4	468	7 600	1,5	8	0,5	0,525	118	92	126	58	1755	—	—	—	158	143	„	
5	395	4 530	1,0	4	0,5	1,950	71	55	—	—	—	132	1680	— 98	141	138	„	
6	391	5 650	1,0	8	1,9	2,025	88	68	—	—	—	169	2145	— 196	179	177	„	
7	479	3 350	1,0	8	0,2	2,125	52	40	—	—	—	104	1315	— 170	110	104	„	
8	392	5 500	1,5	4	0,1	2,025	86	66	—	—	—	165	2090	— 190	188	189	„	
9	388	4 200	1,5	8	0,5	2,275	66	51	—	—	—	136	1710	— 341	154	151	„	
390	389	4 310	1,5	8	0,9	2,125	67	52	—	—	—	134	1685	— 219	152	147	„	
1	390	4 400	1,0	8	1,1	3,100	69	53	—	—	—	189	2260	—1195	197	180	„	
2	446	2 000	1,0	8	0,6	2,950	31	24	—	—	—	82	978	— 455	86	77	„	
3	400	4 300	1,5	4	0,7	3,000	67	52	—	—	—	178	2140	—1030	196	184	„	
4	387	4 150	1,5	8	0	3,000	55	50	—	—	—	172	2065	— 990	189	178	„	

Serie VII ab.

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s / k	Anmerkungen
395	230	17 450	1,0	4	—	— 0,390	273	200	150	251	2735	—	—	—	279	272	*s*	
6	231	16 100	1,0	4	—	— 0,390	252	185	138	232	2240	—	—	—	258	248	*k*	
7	232	12 900	1,0	4	—	+ 0,110	202	147	157	137	2320	—	—	—	177	160	„	
8	233	13 400	1,0	8	—	+ 0,110	209	153	164	142	2420	—	—	—	185	167	„	
9	234	15 150	1,0	8	—	+ 0,110	237	173	187	162	2750	—	—	—	197	190	„	
400	235	12 100	1,0	8	—	+ 0,110	189	138	148	128	2180	—	—	—	167	150	„	
1	227	7 600	1,5	4	—	— 0,390	119	87	65	109	1055	—	—	—	137	128	—	ausgeschieden
2	228	13 150	1,5	4	—	— 0,390	205	151	113	189	1840	—	—	—	238	225	*k*	
3	229	10 650	1,5	4	—	+ 0,110	166	122	131	113	1920	—	—	—	170	136	„	
4	236	10 150	1,5	4	—	+ 0,110	158	116	124	108	1820	—	—	—	150	130	„	
5	237	11 150	1,5	4	—	+ 0,110	174	127	136	118	2000	—	—	—	177	143	„	
6	238	10 000	1,5	8	—	+ 0,110	156	114	122	106	1820	—	—	—	154	128	„	
7	239	11 950	1,5	8	—	+ 0,110	182	137	147	127	2160	—	—	—	191	155	„	
8	241	11 190	1,5	8	—	+ 0,610	175	128	178	78	2480	—	—	—	219	216	„	
9	242	9 100	1,5	8	0,2	+ 0,110	142	104	111	97	1630	—	—	—	145	115	„	
410	240	7 400	1,5	8	—	+ 1,610	116	85	—	—	—	228	2925	— 60	255	208	„	
1	477	5 700	1,0	8	0,2	+ 2,610	90	66	—	—	—	230	2860	— 684	239	190	„	
2	478	6 050	1,0	8	0	+ 2,635	95	69	—	—	—	243	3020	— 731	253	200	„	
3	475	4 150	1,5	4	2,7	+ 2,585	65	47	—	—	—	165	2050	— 482	181	141	„	

Serie VIII ab.

Ordnungs-zahl	Säulenzahl	Bruch-kraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s / k	Anmerkungen
414	393	12 750	1,0	4	1,4	— 0,115	199	141	130	152	1985	—	—	—	173	155	*k*	
5	407	12 950	1,0	4	0,4	— 0,190	202	143	124	169	1925	—	—	—	185	166	„	
6	397	13 950	1,5	4	2,1	— 0,040	218	154	150	158	2260	—	—	—	210	161	„	und abgeschert

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
417	403	14 150	1,5	4	1,1	— 0,040	221	156	152	160	2290	—	—	—	212	166	k	
8	455	10 520	1,5	8	0,6	+ 0,110	164	127	122	105	2245	—	—	—	139	138	„	
9	474	15 750	1,5	8	2,4	— 0,115	246	174	160	187	2445	—	—	—	245	207	„	
420	480	17 800	1,5	8	0,1	— 0,015	278	196	194	198	2910	—	—	—	264	202	„	
1	481	16 700	1,5	8	0,8	— 0,190	261	184	160	195	2460	—	—	—	257	247	„	
2	444	3 550	1,0	8	1,8	+ 1,685	55	39	—	—	—	104	1330	— 84	112	86	—	ausgeschieden
3	473	4 400	1,0	4	1,3	+ 2,610	69	49	—	—	—	167	2075	— 549	174	143	—	desgl.
4	484	5 400	1,0	8	1,8	+ 2,635	84	60	—	—	—	214	2675	— 712	223	178	—	desgl.
5	413	3 500	1,5	4	2,9	+ 2,560	55	39	—	—	—	137	1700	— 440	150	120	—	desgl.
6	417	4 000	1,5	4	1,6	+ 2,510	63	44	—	—	—	155	1925	— 476	176	133	k	
7	427	6 500	1,5	4	0,9	+ 2,585	101	72	—	—	—	256	3170	— 828	280	238	„	
8	470	6 100	1,5	4	1,6	+ 2,660	95	67	—	—	—	244	3025	— 830	267	237	„	
9	469	6 400	1,5	8	2,6	+ 2,635	100	71	—	—	—	254	3150	— 843	278	238	„	
430	471	6 100	1,5	8	0,2	+ 2,635	95	67	—	—	—	242	3005	— 804	265	236	„	
1	482	5 200	1,5	8	0,8	+ 2,635	81	57	—	—	—	206	2560	— 635	225	184	—	desgl.
2	483	5 350	1,5	8	1 5	+ 2,535	84	59	—	—	—	208	2580	— 647	228	187	k	Belastungsachse durch 4,5 u. 7 Dm.
3	412	6 750	1,0	4	2 1	3,000	105	74	—	—	—	187	2245	—1180	198	193	„	

Serie IX a.

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
434	431	15 850	1,0	2	1,4	— 0,155	248	151	131	169	2460	—	—	—	191	173	k	
5	440	20 200	1,0	2	1,4	— 0,155	316	192	168	214	3120	—	—	—	242	223	s	
6	447	21 800	1,5	2	1,8	— 0,055	341	207	200	216	3205	—	—	—	286	258	k	
7	259	16 150	1,5	2	0,5	— 0,030	252	153	149	157	2335	—	—	—	208	161	„	
8	448	4 300	1,0	2	1,9	+ 2,120	67	41	—	—	—	176	2175	— 595	182	152	—	ausgeschieden
9	432	6 150	1,5	2	1,1	+ 2,120	96	59	—	—	—	237	2945	— 750	257	171	k	
440	439	5 850	1,5	2	4,4	+ 2,145	91	56	—	—	—	228	2825	— 733	247	162	„	
1	460	6 290	1,5	2	1,7	+ 2,635	98	60	—	—	—	266	3290	— 908	286	203	„	

Serie IX b.

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
442	465	15 100	1,0	4	0,3	+ 0,035	236	156	160	152	2360	—	—	—	183	161	k	
3	472	17 000	1,0	4	1,4	— 0,165	265	175	154	196	2845	—	—	—	222	226	s	
4	466	17 750	1,5	4	2,0	— 0,090	224	181	169	193	2840	—	—	—	254	213	k	
5	467	15 700	1,5	4	1,9	— 0,115	245	162	144	180	2625	—	—	—	235	193	„	
6	486	18 250	1,0	4	0,7	— 0,115	285	188	172	204	2990	—	—	—	232	212	s	
7	485	4 300	1,0	4	0,6	+ 2,660	67	44	—	—	—	171	2115	— 567	178	130	—	ausgeschieden

Serie X.

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
448	88	11 650	1,0	—	—	0	182	—	—	—	—	—	—	—	208	—	s	
9	89	13 200	1,0	—	—	0	206	—	—	—	—	—	—	—	235	—	„	
450	90	15 320	1,0	—	—	0	240	—	—	—	—	—	—	—	274	—	„	
1	95	9 500	1,0	—	—	0	148	—	—	—	—	—	—	—	169	—	„	
2	96	15 600	1,0	—	—	0	244	—	—	—	—	—	—	—	280	—	„	
3	97	13 400	1,0	—	—	0	209	—	—	—	—	—	—	—	240	—	„	
4	98	16 750	1,0	—	—	0	262	—	—	—	—	—	—	—	300	—	„	
5	84	8 800	1,5	—	—	0	137	—	—	—	—	—	—	—	188	—	„	
6	91	12 850	1,5	—	—	0	201	—	—	—	—	—	—	—	275	—	„	
7	92	10 800	1,5	—	—	0	168	—	—	—	—	—	—	—	230	—	„	
8	94	10 200	1,5	—	—	0	159	—	—	—	—	—	—	—	218	—	„	
9	99	8 000	1,5	—	—	0	125	—	—	—	—	—	—	—	171	—	„	
460	114	4 000	1,5	—	—	0	62	—	—	—	—	—	—	—	85	—	„	
1	115	9 000	1,5	—	—	0	140	—	—	—	—	—	—	—	192	—	„	
2	61	13 000	1,0	—	1,4	0,525	203	—	283	123	—	—	—	—	313	325	„	
3	71	10 150	1,0	—	0,4	0,475	158	—	214	102	—	—	—	—	237	235	„	
4	72	12 000	1,0	—	—	0,500	187	—	257	117	—	—	—	—	284	290	„	
5	77	13 100	1,0	—	0,3	0,500	204	—	281	127	—	—	—	—	311	320	„	
6	78	13 000	1,0	—	0	0,575	203	—	291	115	—	—	—	—	321	336	„	
7	85	5 680	1,0	—	3,4	0,500	89	—	122	56	—	—	—	—	135	129	„	
8	65	9 500	1,5	—	—	0,500	148	—	204	92	—	—	—	—	259	274	„	
9	74	11 800	1,5	—	1,8	0,475	184	—	249	118	—	—	—	—	317	398	„	
470	75	9 000	1,5	—	0,7	0,500	140	—	193	87	—	—	—	—	245	248	„	
1	76	9 900	1,5	—	1,9	0,500	154	—	212	96	—	—	—	—	269	293	„	

Ordnungszahl	Säulenzahl	Bruchkraft P	h m	e cm	w cm	c cm	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	σ_{b_2}	σ_e	σ_b'	σ_e'	σ_e''	ν_1	ν''	s k	Anmerkungen
472	83	12 500	1,5	—	2,1	0,500	195	—	268	122	—	—	—	—	341	471	s	
3	79	3 700	1,0	—	0	2,300	58	—	159	−42	—	—	—	—	167	169	k	
4	80	6 900	1,0	—	0,6	2,075	108	—	276	−60	—	—	—	—	292	313	„	
5	81	5 250	1,5	—	0,1	2,000	82	—	205	−41	—	—	—	—	235	262	„	
6	82	6 800	1,5	—	1,1	2,000	106	—	265	−53	—	—	—	—	304	353	„	
7	86	900	1,0	—	0	4,075	14	—	57	−29	—	—	—	—	59	58	„	
8	87	950	1,0	—	0,2	4,025	15	—	60	−30	—	—	—	—	62	62	„	
9	93	1 000	1,5	—	1,4	4,000	16	—	64	−32	—	—	—	—	70	67	„	

F. Die Auswertung der Resultate.

Wir wollen die arithmetischen Mittel für Säulen mit verschiedenen e, h und c bilden und hierbei diejenigen Versuche ausscheiden, die als fehlerhaft erscheinen. Um aber auch die in der Praxis möglichen Fälle der minder guten Ausführung zu berücksichtigen, werden wir auch die arithmetischen Mittel aller Versuche ohne Ausscheidung bilden.

Serie Ia und b.

a) Für $c = 0$, $e = 4$, $h = 1,0$ liegen die Versuche 1, 4, 11 und 12 vor. Bei allen wurde der Kopf abgeschert, bei 1 und 4 war der Abstand der Bügel an der Bruchstelle größer (6 cm), bei 11 ist der Bügel gerissen, bei 12 war der Kopf und der Fuß nicht parallel. Wir scheiden jedoch keinen Versuch aus, bemerken nur, daß der Durchschnitt dadurch etwas zu niedrig wird. Wir stellen die Durchschnittswerte in der unten folgenden Tabelle zusammen. Die Zahlen in Klammern bedeuten die Anzahl der Versuche. Dieselbe Gruppe, nur $e = 8$ cm, hat 6 Säulen, die sämtlich abgeschert wurden. Sehr kleine Tragkraft, 9,7 t, hat die Säule Nr. 51, bei welcher aber gar nichts beobachtet wurde, um deren Ausscheidung zu veranlassen.

Für $h = 1,5$ m, $e = 4$ sind 6 Versuche vorhanden. Auch hier ist kein Grund zum Ausscheiden irgend einer Säule. Für $e = 8$ sind 8 Versuche vorhanden. Beim Versuche Nr. 52 liegt der Fuß nicht gut an, dessenungeachtet hat diese Säule die größte Tragkraft, 17,35 t. Bei Nr. 53, welche nur 8,7 trug, wurde angemerkt „Beton minder gut". Wir scheiden daher diesen Versuch aus. Bei der Säule Nr. 58 mit der Tragkraft 10,85 lesen wir: Beton zu trocken, was jedenfalls auf minder gute Ausführung hindeutet, daher scheiden wir auch diese Säule aus. Dasselbe gilt bei Nr. 59 und 60, wo wir auch die Anmerkung: Beton minderer Qualität, lesen.

Tabelle I.

$c = 0$ mit Ausscheidung mißlungener Versuche.

		$h = 1,0$				$h = 1,5$		
		σ_0	σ_b	ν_1		σ_0	σ_b	ν_1
$e = 4$	(4)	216	182	208	(6)	199	168	223
$e = 8$	(6)	232	195	223	(4)	232	196	261
Im Mittel	(10)	226	190	218	(10)	216	179	239

$c = 0$ ohne Ausscheidung.

		$h = 1,0$				$h = 1,5$		
		σ_0	σ_b	ν_1		σ_0	σ_b	ν_1
$e = 4$	(4)	216	182	208	(6)	199	168	223
$e = 8$	(6)	232	195	223	(8)	199	169	225
Im Mittel	(10)	226	190	218	(14)	199	168	224

b) $c = 0,5$. Für $h = 1,0$ m, $e = 4$ cm sind 8 Versuche vorhanden. Bei der Säule Nr. 17 wurde der Kopf zerdrückt wegen der Überwindung der Haftfestigkeit, daher ist es ein Fehlversuch. Nr. 18 brach auch unterhalb des Kopfes, aber nicht unmittelbar, wir scheiden die Säule nicht aus; auch die übrigen nicht, obwohl die Säule Nr. 30 vor der Prüfung umgestürzt und gebrochen ist. Sie hat 14,5 t, also genügend viel getragen.

Dieselbe Gruppe nur mit $e = 8$ cm hat 10 Säulen. Hier könnte nur Säule Nr. 62 ausgeschieden werden, weil der Kopf abgeschert wurde, dann müßte aber Nr. 35 auch aus demselben Grunde ausgeschieden werden, obwohl die Tragkraft dieser Säule bedeutend ist.

Für $h = 1,5$ m, $e = 4$ cm sind 10 Versuche vorhanden. Die Säulen Nr. 15 und 16 wurden nicht ausgeknickt, sondern es wurde nur der Kopf abgeschert. Sie wurden ausgeschieden, obwohl Nr. 15 sehr tragfähig war ($P = 15,5$ t). Nr. 27 wird auch ausgeschieden, weil schlechtes Rammen des Betons konstatiert wurde.

Für $e = 8$ cm sind 8 Versuche vorhanden. Hier ist die Säule Nr. 42 absolut auszuscheiden, Beton war minderer Qualität, der Fuß wurde zertrümmert.

Tabelle II.

$c = 0,5$ mit Ausscheidung mißlungener Versuche.

		$h = 1,0$ m					$h = 1,5$ m			
		σ_0	σ_{b_1}	ν''	ν_1		σ_0	σ_{b_1}	ν''	ν_1
$e = 4$	(7)	233	265	301	296	(7)	209	243	347	302
$e = 8$	(8)	203	235	258	259	(7)	185	214	291	267
	(15)	217	249	278	277	(14)	197	229	316	284

$c = 0{,}5$ ohne Ausscheidung.

		$h = 1{,}0$ m					$h = 1{,}5$ m			
		σ_0	σ_{b_1}	ν''	ν_1		σ_0	σ_{b_1}	ν''	ν_1
$e = 4$	(8)	225	257	290	287	(10)	201	232	327	289
$e = 8$	(10)	200	230	252	255	(8)	171	198	266	247
	(18)	211	242	269	269	(18)	188	217	309	270

Die Schlüsse aus diesen Resultaten werden wir erst später ziehen.

Serie Ic.

a) $c = 0$. Hier ist überall $e = 4$ cm.

Für $h = 1{,}0$ m sind zwei Versuche vorhanden, beide ohne Gebrechen. Für $h = 1{,}5$ m sind auch zwei Versuche vorhanden, beide ohne Gebrechen.

Tabelle III.

$c = 0$ mit Ausscheidung mißlungener Versuche.

	$h = 1{,}0$ m				$h = 1{,}5$ m		
	σ_0	σ_b	ν_1		σ_0	σ_b	ν_1
(2)	242	212	244	(2)	213	185	248

$c = 0$ ohne Ausscheidung.

	$h = 1{,}0$ m				$h = 1{,}5$ m		
	σ_0	σ_b	ν_1		σ_0	σ_b	ν_1
(2)	242	212	244	(2)	213	185	248

b) $c = 0{,}5$. Für $h = 1{,}0$ sind drei Versuche vorhanden, für $h = 1{,}5$ m ebenfalls drei Versuche, kein Versuch wird ausgeschieden. Wir erhalten somit:

Tabelle IV.

$c = 0{,}5$ cm.

	$h = 1{,}0$ m					$h = 1{,}5$ m			
	σ_0	σ_b	ν''	ν_1		σ_0	σ_b	ν''	ν_1
(3)	174	204	221	226	(3)	199	230	257	292

c) $c = 2{,}0$ cm. Für $h = 1{,}0$ und $h = 1{,}5$ m sind je drei Versuche vorhanden, wobei alle als gelungen betrachtet werden können. Wir erhalten:

Tabelle V.

$c = 2{,}0$ cm.

	$h = 1{,}0$ m					$h = 1{,}5$ m			
	σ_0	σ_b	ν''	ν_1		σ_0	σ_b	ν''	ν_1
(3)	110	233	247	264	(3)	92	196	234	221

In derselben Weise wurden alle anderen Serien berechnet und die Resultate sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich.

Zusammenstellung für die Auswertung der Resultate.

Serie	x	c	e	Mit Ausscheidung												Ohne Ausscheidung[1]											
				$h = 1,0$ m						$h = 1,5$ m						$h = 1,0$ m						$h = 1,5$ m					
	vH.	cm	cm	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''
Iab	1,23	0	4	4	216	182		208		6	199	168		223		4	216	182		208		6	199	168		223	
			8	6	232	195		223		4	232	196		261		6	232	195		223		8	199	169		225	
			M.	10	226	190		218		10	216	179		239		10	226	190		218		14	199	168		224	
		0,5	4	7	233		265	296	301	7	209		243	302	347	8	225		257	287	290	10	201		232	289	327
			8	8	203		235	259	258	7	185		214	267	291	10	200		230	255	252	8	171		198	247	266
			M.	15	217		249	277	278	14	197		229	284	316	18	211		242	269	269	18	188		217	270	309
Ic	0,99	0	4	2	242	212		244		2	213	185		248		2	248	212		244		2	213	185		248	
		0,5	4	3	174		204	226	224	3	199		233	292	257	3	174		204	226	224	3	199		233	292	257
		2,0	4	3	110		233	264	257	3	92		196	221	261	3	110		233	264	257	3	92		156	221	261
IIab	1,99	0	4	4	229	177		204		3	229	174		234		4	229	177		204		4	214	165		221	
			8	7	227	179		207		5	218	168		226		7	227	179		207		6	214	165		222	
			M.	11	228	178		206		8	222	170		229		11	228	178		206		10	214	165		222	
		0,5	4	5	216		223	248	246	7	188		201	252	259	5	216		223	248	246	8	191		204	257	267
			8	4	184		191	212	207	5	190		199	250	258	4	184		191	212	207	6	186		194	243	248
			M.	9	202		208	232	228	12	189		200	251	258	9	202		208	232	228	14	189		200	250	259
		2,0	4	6	135		254	273	280	3	122		238	300	270	7	131		246	264	270	4	115		223	253	277
			8	4	117		223	236	239	3	102		197	232	217	5	109		208	220	222	4	100		194	215	229
			M.	10	128		236	258	264	6	112		219	266	243	12	122		230	246	250	8	107		209	234	265
IIIab	2,45	0	4	4	184	125		157		6	204	149		201		6	154	115		136		6	204	149		201	
			8	5	253	185		213		6	247	186		244		5	253	185		213		6	247	186		244	
			M.	9	222	158		188		12	225	167		222		11	202	147		171		12	225	167		222	
		0,5	4	3	214		211	234	228	3	231		229	288	318	6	192		206	211	205	4	204		202	254	274
			8	6	213		217	235	231	5	226		221	276	305	6	213		217	235	231	7	218		215	266	293
			M.	9	213		216	235	230	8	228		224	280	310	12	202		211	223	218	11	213		210	262	286
		2,0	4	3	145		265	281	291	1	89		166	188	190	3	145		265	281	291	3	96		117	202	210
			8	2	117		212	225	238	2	123		221	252	275	2	117		212	225	238	3	118		210	240	259
			M.	5	134		244	259	265	3	112		203	231	247	5	134		244	259	265	6	107		193	221	235
		3,0	4													2	73		182	191	179	2	53		174	193	189
		4,0	4																			1	51		167	180	88
IVab	1,57	0	2	7	246	172		196		6	263	182		246		7	246	172		196		6	263	182		246	
			4	6	281	209		241		6	248	187		252		6	281	209		241		6	248	187		252	
			M.	13	262	190		217		12	255	186		249		13	262	190		217		12	255	186		249	
		0,5	2	6	231		228	254	252	6	195		193	241	250	6	231		228	254	252	6	195		193	241	250
			4	6	201		208	231	206	5	202		210	263	282	6	201		208	231	206	5	202		210	263	282
			M.	12	216		218	243	227	11	198		200	251	265	12	216		218	243	227	11	198		200	251	265
		2,0	2	2	117		237	250	222	3	104		212	238	225	3	123		249	262	233	3	104		212	238	225
			4	4	125		254	268	256	4	119		242	274	288	4	125		254	268	256	4	119		242	274	288
			M.	6	122		248	260	244	7	113		229	258	260	7	124		252	265	246	7	113		229	258	260
		3,0	2													1	52		149	155	122						

[1]) Alle Versuche.

Serie	x	c	e	Mit Ausscheidung												Ohne Ausscheidung											
				$h = 1{,}0$ m						$h = 1{,}5$ m						$h = 1{,}0$ m						$h = 1{,}5$ m					
	vH.	cm	cm	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''
Vab	1,99	0	2	6	250	168		193		5	228	152		204		6	250	168		193		6	224	151		203	
			4	6	256	183		211		6	221	159		215		6	256	183		211		6	221	159		215	
			M.	12	253	176		202		11	224	156		210		12	253	176		202		12	222	155		208	
		0,5	2	6	247		229	255	248	4	154		172	189	203	6	247		229	255	248	6	177		175	200	208
			4	5	211		193	217	219	7	184		181	226	220	5	211		193	217	219	7	184		181	226	220
			M.	11	231		213	239	235	11	173		177	211	214	11	231		213	239	235	13	181		178	214	215
		2,0	2	2	155		290	302	282	3	109		207	233	226	3	148		279	291	269	3	109		207	233	226
			4	4	172		330	348	342	1	114		220	248	251	4	172		330	348	342	3	114		219	247	251
			M.	6	165		317	333	319	4	110		210	237	232	7	162		308	324	311	6	112		213	240	238
		3,0	2	1	89		245	254	207							1	89		245	254	207	1	66		175	190	158
			4	1	101		269	280	248							1	101		269	280	248						
			M.	2	95		257	267	228							2	95		257	267	228	1	66		175	190	158
VIab	1,99	0	4	5	139	108		124		6	131	104		141		5	139			124		6	131	104		141	
			8	5	129	100		115		6	125	97		130		7	127			113		6	125	97		130	
			M.	10	134	104		120		12	128	101		135		12	132			118		12	128	101		135	
		0,5	4	6	118		123	137	129	5	95		101	126	110	6	118		123	137	129	6	93		99	124	107
			8	8	99		105	117	109	7	105		112	140	125	9	96		103	114	104	7	105		112	140	125
			M.	14	107		113	125	118	12	101		107	134	118	15	105		111	123	114	13	100		106	133	117
		2,0	4	1	71		132	141	138	1	86		165	188	189	1	71		132	141	138	1	86		165	188	189
			8	2	70		137	139	141	2	67		135	153	149	2	70		137	139	141	2	67		135	153	149
			M.	3	70		135	140	139	3	73		145	165	162	3	70		135	140	139	3	73		145	165	162
		3,0	4							1	67		178	196	187							1	67		178	196	187
			8	2	50		136	142	129	1	65		172	189	178	2	50		136	142	129	1	65		172	189	178
			M.	2	50		136	142	129	2	66		175	193	183	2	50		136	142	129	2	66		175	193	183
VIIab	2,42	0,5	4	3	242		213	238	229	5	176		145	184	157	3	242		213	238	229	6	167		139	193	152
			8	3	212		167	183	169	3	160		127	163	133	3	212		167	183	169	3	160		127	163	133
			M.	6	227		190	210	198	8	170		138	176	148	6	227		190	210	198	9	165		135	180	146
		2,0	8							2	146		203	237	212							2	146		203	237	212
		3,0	4	2	93		237	246	195	1	65		165	181	141	2	93		237	246	195	1	65		165	181	141
VIIIab	2,78	0,5	4	2	201		158	179	161	2	220		159	211	164	2	201		158	179	161	2	220		159	211	164
			8	1	164		122	139	138	3	262		193	255	219	1	164		122	139	138	3	262		193	255	219
			M.	3	188		146	166	153	5	245		180	238	197	3	188		146	166	153	5	245		180	238	197
		2,0	8	1	55		104	112	86							1	55		104	112	86						
		3,0	4	1	105		187	198	193	4	89		224	247	211	2	87		177	186	193	5	82		207	228	193
			8							2	92		231	253	213	1	84		214	223	138	3	88		223	244	203
			M.	1	105		187	198	193	6	90		227	250	212	3	86		190	198	166	8	84		213	234	198
IXa	2,78	0,5	2	2	282		292	214	198	2	297		187	247	210	2	282		292	214	198	2	297		187	247	210
		2,0	2							2	94		233	252	167	1	67		176	182	152	2	94		233	252	167
		3,0	2							1	98		166	286	203							1	98		266	286	203
IXb	3,05	0,5	4	3	262		187	212	166	2	235		187	245	203	3	262		187	212	166	2	235		187	245	203
		3,0	4													1	67		171	178	130						

Serie	x	c	e	Mit Ausscheidung												Ohne Ausscheidung											
				$h = 1{,}0$ m						$h = 1{,}5$ m						$h = 1{,}0$ m						$h = 1{,}5$ m					
	vH.	cm	cm	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''	Anzahl	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	ν''
X	o	o	—	7	213			244		7	142			194		7	213			244		7	242			194	
		0,5	—	6	174		241	267	272	5	164		225	286	237	6	174		241	267	272	5	164		225	286	337
		2,0	—	2	83		218	230	241	2	94		235	270	308	2	83		218	230	241	2	94		235	270	308
		4,0	—	2	15		59	61	60	1	16		64	70	67	2	15		59	61	60	1	16		64	70	67

G. Schlußfolgerungen.

Die Tabelle ermöglicht, uns einige Schlußfolgerungen aus den Resultaten der vorliegenden Versuche zu ziehen. Wir werden die einzelnen offenen Fragen der Reihe nach auf Grund dieser Tabelle besprechen.

I. Einfluß der Bügelentfernung.

Bei meinen früheren Versuchen vom Jahre 1906[1]) habe ich dargetan, daß bei der Bügelentfernung $e = b$ und $e = 2b$ dieselbe Bruchlast konstatiert wurde. Bei den vorliegenden Versuchen wurden kleinere Bügelentfernungen angenommen, und zwar $e = \frac{b}{2} = 4$ cm und $e = b = 8$ cm.

Bei den zentrisch belasteten längsarmierten Säulen wurde auch hier kein Einfluß der Bügelentfernung wahrgenommen. Ich erhielt nämlich bei $c = 4$ cm die Bruchspannung größer als diejenige bei $c = 8$ cm

		für $h = 1{,}0$	$h = 1{,}5$
bei der Serie I	um	— 7	— 14 vH.
„ „ „ III	„	— 39	— 21 „
„ „ „ II	„	+ 1	+ 5 „
„ „ „ VI	„	+ 8	+ 5 „

Jetzt werden wir die Unterschiede von σ_0, in Prozenten ausgedrückt, bei exzentrisch belasteten Säulen zusammenstellen. Für die Bügelentfernung $e = 8$ cm ist σ_0 kleiner als für $e = 4$ cm

---

[1]) Siehe Thullie. Neue Versuche mit Eisenbetonsäulen in Lemberg. Beton u. Eisen 1906 und 1907.

	bei	$c = 0,5$ cm		$c = 2,0$ cm.	
	und	$h = 1,0$	$h = 1,5$	$h = 1,0$	$h = 1,5$
Serie I	um	10	13	—	— vH.
„ II	„	17	— 1	15	20 „
„ III	„	0,5	2	24	— 28 „
„ VI	„	19	— 10	0	28 „
„ VII	„	14	10	—	— „
„ VIII	„	23	— 16	—	— „

Aus dieser Zusammenstellung ersehen wir, daß der Einfluß der kleineren Bügelentfernung $e = 4 \text{ cm} = \frac{b}{2}$ bei exzentrisch belasteten Säulen nur für 1 m hohe Säulen wahrnehmbar ist. Die Verringerung der Bruchlast bei Annahme $e = b = 8$ cm ist für diese Säulen 0 bis 24 vH., im Mittel 14 vH. Bei höheren Säulen ist dieser Einfluß nicht zu konstatieren.

Bei umschnürten Säulen habe ich die Ganghöhe $2 \text{ cm} = \frac{b}{4}$ und $4 \text{ cm} = \frac{b}{2}$ angewendet.

Bei den zentrisch belasteten Säulen wurde kein Einfluß der kleineren Ganghöhe konstatiert. Wir erhielten nämlich σ_0 kleiner bei $e_1 = \frac{b}{2}$ als bei $\frac{b}{4}$ in Prozenten

	bei	$h = 1,0$	$h = 1,5$
Serie IV	um	— 1	+ 6 vH.
„ V	„	— 2	+ 3 „

Bei $h = 1,0$ ist die Bruchspannung bei der Entfernung $e_1 = \frac{b}{2}$ sogar größer, als bei $e_1 = \frac{b}{4}$, bei $h = 1,5$ m etwas kleiner. Im allgemeinen können wir also behaupten, daß für zentrisch belastete Säulen kein nachweisbarer Unterschied der Tragkraft bei $e_1 = \frac{b}{4}$ und $e_1 = \frac{b}{2}$ besteht.

Bei den exzentrisch belasteten Säulen wurden folgende Unterschiede in Prozenten wahrgenommen.

	$c = 0,5$		$c = 2,0$ m	
	$h = 1,0$	$h = 1,5$	$h = 1,0$	$h = 1,5$ m
Serie IV	15	— 3	— 6	— 13
„ V	17	— 16	— 10	— 4

Ein günstiger Einfluß der kleineren Ganghöhe $e_1 = \frac{b}{4}$ ist also nur bei $h = 1,0$ und der Exzentrizität $c = 0,5$ cm wahrzunehmen, und zwar 13 bis 19 vH., im Mittel 16 vH., sonst kann derselbe nicht nachgewiesen werden.

Wir sehen also, daß wir für die umschnürten Säulen fast dasselbe Resultat erhalten, wie für die längsarmierten. Ein günstiger Einfluß der kleineren Bügelentfernung wurde nur bei exzentrisch belasteten, 1 m hohen Säulen wahrgenommen.

II. Einfluß der Höhe.

Da ein namhafter Einfluß der Bügelentfernung und der Ganghöhe auf die Bruchlast nicht wahrgenommen wurde, so wurden in der Tabelle die arithmetischen Mittel aller Spannungen für alle Säulen einer Serie und gleicher Exzentrizität gebildet. Dieselben werden jetzt bei der Prüfung des Einflusses der Höhe benutzt. Wir vergleichen die Bruchspannung $\sigma_0 = \frac{P}{F_b + 15 F_e}$ und die unter Anwendung der Knickungskoeffizienten der österreichischen Vorschrift (§ 5 Absatz a und b) ausgerechneten Bruchspannung ν_1.

Wir erhalten für die zentrische Belastung:

Die Bruchspannungen σ_0 und ν_1 sind für die 1,5 m hohen Säulen kleiner als für 1 m um

Längsarmiert	σ_0	ν_1	Umschnürt	σ_0	ν_1	Betonsäulen	σ_0	ν_1
Serie I	4,5	— 10 vH.	Serie IV	3	— 15 vH.	Serie X	33	+ 20 vH.
„ Ic	12	— 2 „	„ V	12	— 4 „			
„ II	3	— 15 „						
„ III	— 1	— 28 „						
„ VI	4	— 13 „						

Wir sehen, daß bei Betonsäulen die Höhe einen großen Einfluß auf die Bruchspannung hat. Bei armierten Säulen ist dieser Einfluß sehr klein und beträgt etwa 4 vH., bei umschnürten etwas größer, etwa 7 vH. Die österreichischen Knickungskoeffizienten sind aber zu groß, wir erhalten bei allen armierten und umschnürten Säulen ν_1 für 1,5 m Säulen zu groß. Der Unterschied ist aber nicht bedeutend und beträgt im Mittel 12 bezw. 9 vH. Bei Betonsäulen scheint aber der Knickungskoeffizient zu klein zu sein, der Unterschied beträgt hier 20 vH. Vielleicht sollen andere Koeffizienten für die Betonsäulen und andere für die armierten Säulen aufgestellt werden.

Exzentrische Belastung.

Die Bruchspannungen σ_0 und ν_1 sind für die 1,5 m hohen Säulen kleiner als für die 1 m hohen um:

Längsarmiert

	$c = 0{,}5$		$c = 2{,}0$		$c = 3{,}0$		
	σ_0	ν_1	σ_0	ν_1	σ_0	ν_1	
Serie I	9	— 2	—	—	—	—	vH.
„ Ic	— 14	— 29	+ 16	+ 16	—	—	„
„ II	+ 6	— 11	+ 12	+ 6	—	—	„
„ III	— 7	— 19	+ 16	+ 11	—	—	„
„ VI	+ 6	— 7	— 4	— 18	— 30	— 36	„
„ VII	+ 25	+ 16	—	—	30	+ 27	„
„ VIII	— 30	— 31	—	—	15	— 25	„

Umschnürt

	$c = 0{,}5$		$c = 2{,}0$		
	σ_0	ν_1	σ_0	ν_1	
Serie IV	+ 8	— 3	+ 7	+ 1	vH.
„ V	+ 25	+ 12	+ 33	+ 29	„
„ IXa	— 1	+ 9			„
„ IXb	10	— 13			„

Betonsäulen

	$c = 0{,}5$		$c = 2{,}0$		
	σ_0	ν_1	σ_0	ν_1	
Serie X	+ 6	— 7	— 13	— 17	vH.

Wir sehen, daß die Unterschiede bei längsarmierten und Betonsäulen bald positiv, bald negativ werden, so daß ein Einfluß der Höhe bei der exzentrischen Belastung in der Versuchsgrenze bis $\frac{l}{b} = 18{,}9$ nicht nachgewiesen werden kann. Bei den umschnürten Säulen ist ein Einfluß bemerkbar und beträgt im Mittel 16 vH. Vielleicht ist dieser Einfluß deßhalb größer, weil überhaupt die Bruchlasten größer sind, die deshalb leichter eine Knickung hervorrufen können.

Die Werte von ν_1 sind bald größer bald kleiner, so daß die Unrichtigkeit des Knickungskoeffizienten nicht erwiesen ist.

Wir sehen daher, daß der Einfluß der Höhe bei $\frac{l}{b} = 18{,}9$ bei der zentrischen Belastung für die längsarmierten Säulen mit Bügel und umschnürten Säulen sehr gering ist, daß er sich aber bei den Betonsäulen bemerkbar macht. Bei der exzentrischen Belastung ist der Einfluß der Höhe sehr gering und nur bei den umschnürten Säulen bemerkbar.

Die Knickungskoeffizienten der österreichischen Verordnung geben ziemlich gute Resultate, sind aber etwas zu groß.

III. Berücksichtigung der Knickfestigkeit bei den exzentrisch belasteten Säulen.

Die exzentrisch belasteten Säulen sollten streng genommen nach der allgemeinen Formel

$$\nu'' = \frac{P}{F}\left(\frac{f+c}{r} + 1\right), \text{ wobei } f + c = \frac{c}{1 - \frac{l^2}{8}\frac{P}{\varepsilon J}} \text{ ist} \quad . \quad 39)$$

berechnet werden. Ich wollte bei dieser Versuchsreihe prüfen, ob eine solche Berechnung nötig ist und geboten erscheint, oder ob man f ganz vernachlässigen darf, wie dies laut der österreichischen Verordnung zulässig ist. Daher wurden für alle exzentrisch belasteten Säulen zuerst σ_{b_1}, die größten Druckspannungen ohne Berücksichtigung der Knickung, und ν'' mit Berücksichtigung der Knickung laut Formel 39) berechnet.

Nun sehen wir aus der Zusammenstellung, daß ν'' mit geringen Ausnahmen zu groß erscheint. Wir erhalten nämlich folgende Werte für ν''

Betonsäulen

		$h = 1,0$	$h = 1,5$
Serie X	$c = 0,5$	272	337
	$c = 2,0$	241	235

Längsarmierte Säule

		$h = 1,0$	$h = 1,5$
Serie Iab	$c = 0,5$	278	316
„ Ic	$c = 0,5$	224	259
	$c = 2,0$	257	261
„ II	$c = 0,5$	228	258
	$c = 2,0$	264	266
„ III	$c = 0,5$	230	310
	$c = 2,0$	265	247
„ VI	$c = 0,5$	113	118
	$c = 2,0$	139	162
	$c = 3,0$	129	183
„ VII	$c = 0,5$	198	148
	$c = 2,0$	—	212
„ VIII	$c = 0,5$	153	197
	$c = 3,0$	198	212
„ IXa	$c = 0,5$	198	210
„ IXb	$c = 0,5$	200	203

Umschnürte Säulen

		$h = 1,0$	$h = 1,5$
Serie IV	$c = 0,5$	227	265
	$c = 2,0$	244	260
„ V	$c = 0,5$	235	214
	$c = 2,0$	319	232
	$c = 3,0$	228	—

Serie VI umfaßt Säulen aus wasserreichem Beton mit geringer Festigkeit. Die Druckfestigkeit des Betons der übrigen Serien war laut dem amtlichen Zeugnisse der Prüfungsanstalt für Würfel mit Normalsand maschinell gestampft: 206,208,7 und 220,7, im Mittel 212,9 kg/cm². Die rechnungsmäßige Druckfestigkeit bei Bruch der Betonsäulen ohne Rücksicht auf Knickung bei der Serie X war für 1,0 m hohe Säulen 213, 241 und 218 kg/cm², im Mittel 224 kg/cm², für 1,5 m hohe 142, 225, 235, im Mittel 201 kg/cm². Ohne Rücksicht auf die Höhe war die Druckfestigkeit 212 kg/cm², also ganz genau gleich der Würfeldruckfestigkeit.

Nun sehen wir aber diese Zahl in den Serien I bis V und X überall überschritten, in manchen Fällen sogar bedeutend, sogar bis 337 kg/cm², was deutlich zeigt, daß die Berechnung mit dieser Formel nicht richtig ist.

Serie VI hat Beton von geringer Druckfestigkeit. In der Serie VII bis IX sind die Bruchspannungen möglich und kleiner als ν_1.

In den Versuchsgrenzen bis $\frac{l}{b} = 18{,}9$ können wir also auf Grund der Versuche die Tatsache feststellen, daß die Berechnung der exzentrisch belasteten Säulen auf Knickfestigkeit nicht nötig ist und meistens unrichtige Resultate liefert.

IV. Anwendbarkeit der bisherigen Rechnungsweise und derjenigen nach der österreichischen Verordnung.

Da der Einfluß der Höhe in der gegebenen Grenze überhaupt sehr gering ist, so bilden wir das arithmetische Mittel der Bruchfestigkeit der 1,0 und 1,5 m hohen Säulen und erhalten schließlich folgende Zusammenstellung:

Serie	c	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	Anmerkung	Serie	c	σ_0	σ_b	σ_{b_1}	ν_1	Anmerkung
Iab	0	221	184	—	228		VI	0	131	103	—	128	Gußbeton
	0,5	207	—	239	281			0,5	104	—	110	130	„
Ic	0	228	198	—	246			2,0	72	—	140	147	„
	0,5	186	—	218	259			3,0	58	—	156	167	„
	2,0	101	—	214	242		VII	0,5	194	—	156	190	c sehr klein
IIab	0	225	174	—	218			2,0	146	—	203	237	
	0,5	196	—	204	240			3,0	84	—	210	224	
	2,0	112	—	230	252		VIII	0,5	224	—	167	209	„
IIIab	0	224	163	—	206			3,0	92	—	221	243	
	0,5	221	—	220	255		IXa	0,5	295	—	193	239	„
	2,0	126	—	229	251			3,0	95	—	244	263	
IVab	0	259	188	—	232		IXb	0,5	262	—	187	212	„
	0,5	207	—	209	247		X	0	177	177	—	219	
	2,0	118	—	239	259			0,5	169	—	233	246	
Vab	0	235	176	—	206			2,0	48	—	226	250	
	0,5	202	—	195	225								
	2,0	143	—	274	305								
	4,0	95	—	257	267								

Wir sehen, daß die Druckfestigkeit der zentrisch belasteten Betonsäulen 177 kg/cm² beträgt. Nach der Formel 3) berechnet sich die Druckfestigkeit bei längsarmierten Säulen 176 bis 198, im Mittel 187 kg/cm², wobei Serie VI mit Gußbeton ausgeschaltet wird, bei umschnürten Säulen nach der Formel 23) 163 bis 188, im Mittel 175 kg/cm². In beiden Fällen ist die Übereinstimmung genügend groß, so daß die Anwendbarkeit der Formeln für die zentrische Belastung neuerdings erwiesen wurde. Bei den exzentrisch belasteten Säulen steigt die Druckfestigkeit der Betonsäulen auf 230 kg/cm², also wird fast gleich der Würfeldruckfestigkeit. Dieselbe wurde für 1 Jahr alte mit 258,2 kg/cm² bestimmt, für die 6 Wochen alten war sie naturgemäß kleiner, und zwar 212,9 kg/cm². Bei den armierten Säulen der Serie VII bis IX ist die Ex-

zentrizität, welche in der Rubrik mit 0,5 vorgemerkt ist, gewöhnlich klein, 2 bis 3 mm, daher diese Säulen sich ungefähr wie zentrisch belastete verhalten. Mit Ausscheidung dieser Werte erhalten wir für die längsarmierten Säulen $\sigma_1 = 203$ bis 239 kg/cm², also im Mittel 221 kg/cm², für die umschnürten Säulen $\sigma_1 = 209$ bis 244, im Mittel 226 kg/cm², was ziemlich genau mit der Druckfestigkeit der Betonsäulen und der Würfelfestigkeit übereinstimmt und daher die Berechnungsweise bestätigt. Bei der exzentrischen Belastung entstehen außer dem Druck auch Biegungsspannungen, für welche der Festigkeitskoeffizient höher ist, wie dies aus allen früheren Versuchen hervorgeht. Dementsprechend wird für die zentrische Druckbelastung kleinere zulässige Druckspannung in vielen Vorschriften und auch in der österreichischen Ministerialverordnung vorgeschrieben, was durch die Resultate dieser Versuche bestätigt wird.

Bei der Anwendung der österreichischen Knickungskoeffizienten erhalten wir die Druckfestigkeit ν_1. Dieselbe ist überall zu groß.

Bei den zentrisch belasteten Betonsäulen ist $\nu_1 = 219$, also fast gleich der Druckfestigkeit. Es könnte dieses vielleicht als ein Beweis der Notwendigkeit der Anwendung des Knickungskoeffizienten angesehen werden, wenn die Brucherscheinungen dies nicht verleugnen würden. Die Säulen wurden nämlich mit wenigen Ausnahmen nicht ausgeknickt, sondern abgeschert. Für die zentrisch belasteten Säulen ist ν_1 überall zu groß. Für die Betonsäulen ist $\nu_1 = 263$ kg/cm²; für die längsarmierten Säulen mit Ausscheidung der Serien VII und VIII für $c = 0{,}5$ ist $\nu_1 = 224$ bis 305, im Mittel $\nu_1 = 264$ kg/cm², für die umschnürten Säulen mit Ausscheidung Serie IX für $c = 0{,}5$ ist $\nu_1 = 247$ bis 263, im Mittel 255 kg/cm². Die letzten drei Zahlen stimmen wiederum überein und beweisen, daß die Anwendung des österreichischen Knickungskoeffizienten bei exzentrisch belasteten Säulen bis $\frac{l}{b} = 18$ nicht nötig ist und wir hierdurch um etwa 20 vH. zu niedrige zulässige Spannungen erhalten. Da bei der Aufstellung dieser Koeffizienten in der österreichischen Verordnung fast keine Versuche über exzentrisch belastete Säulen vorlagen, so konnte natürlich eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchen nicht erwartet werden.

V. Das Verhalten der Säulen während der Belastung.

Jetzt werden wir noch einiges über das Verhalten der Säulen während der Belastung sagen. Es wurden einige Säulen geprüft, bei welchen noch vor der Belastung Sprünge im Kopf vorhanden waren; wie Nr. 161, 162, 164, 165, 180. Dennoch war die Bruchlast so groß, oder noch größer, als bei den nicht beschädigten Säulen. Säule Nr. 30 war vor der Prüfung umgeworfen worden und bekam einen Riß in der Mitte. Die Säule ist an der Rißstelle in der Mitte ausgeknickt, aber trug 14,5 t, also ungefähr soviel wie

die nicht beschädigten Säulen. Wir sehen also, daß die anfänglichen Risse die Tragfähigkeit der Säule fast gar nicht beeinträchtigen.

Während der Belastung sind lange vor dem Bruche gewöhnlich zweierlei Vorzeichen des Bruches zu gewärtigen, die Risse und das Knistern. Die Risse entstehen gewöhnlich im Kopf und Fuß, und zwar entweder vertikale, was gewöhnliche Erscheinung ist, oder auch horizontale, wie bei Nr. 112, die Säule bröckelt ab, dann aber tritt plötzlich an anderer Stelle eine Abscherung oder eine Ausknickung. Manchmal, wie bei Nr. 75, tritt die Abscherung erst nach 1 Minute der Höchstbelastung ein.

Ein weiteres Vorzeichen ist das Knistern der Säule, welches bei 60, 70, manchmal 90 vH. der Bruchbelastung anfängt. Was die Ursache dieses Knisterns ist, weiß ich nicht. Es ist eigentümlich, daß das Knistern nicht fortwährend ist, so z. B. lesen wir bei Nr. 18: 11 t knistert, 12 t still, 13 t knistert und wird ausgeknickt. Bei Nr. 23 lesen wir: 12 t knistert, 13 t desgl., 14 t still, 15,5 t knistert, 16,5 t still, 17,6 t knistert, 19,8 t knistert, 19,9 t knickt aus. Vielleicht ist das Verschieben der Eiseneinlage im Beton die Ursache des Knisterns, ob dies aber die wirkliche Ursache ist, weiß ich nicht. Es sind nur wenige Versuche, wo kein Knistern vor dem Bruche gehört wurde, wie z. B. bei den Säulen 402, 431, 432.

Bei der exzentrischen Belastung war die Ausbiegung oft mit bloßem Auge sichtbar, sie wurde aber nicht gemessen, was bei der großen Zahl der Säulen sehr zeitraubend wäre.

Nur in zwei Fällen, Nr. 475 und 477, rissen die Eiseneinlagen bei sehr starker Exzentrizität, $e = 3{,}0$ cm. Die Eisenspannungen waren hierbei:

Siehe Nr. 475: $\sigma_e' = 2050$, $\sigma_e'' = -482$

„ „ 477: $\sigma_e' = 2860$, $\sigma_e'' = -684$.

Die Zugspannungen waren somit sehr klein, es mußte eine fehlerhafte Stelle im Material vorhanden sein. Sonst waren die Eisenspannungen in vielen Fällen ziemlich hoch, z. B.:

Siehe Nr. 286 (Ordnungs-Zahl 126): $\sigma_e' = 4168$
„ „ 287 („ „ 127): „ 4575
„ „ 123 („ „ 188): „ 4020
„ „ 368 („ „ 321): „ 4075
„ „ 369 („ „ 322): „ 4350,

doch die Drähte wurden nicht zerstört, nur ausgeknickt.

VI. Schlußbemerkung.

Das Hauptergebnis meiner Versuche läßt sich in dem Satze ausdrücken, daß die Berechnung der Säulen nach der österreichischen Ministerialverordnung durch diese Versuche als praktisch genug genau erwiesen erscheint.



Abb...
Abscherung ...
(Vergl. S. ...



Abb. 4.
Ausknickung der Säulen.
Vergl. S. 23 Nr. 45—48.



Abb...
Typische A...
(Vergl. S. 2...



Abb. 8.
Pyramidenartige Abscherung
einer Betonsäule.
(Vergl. S. 26 Nr. 95.)

ılen.

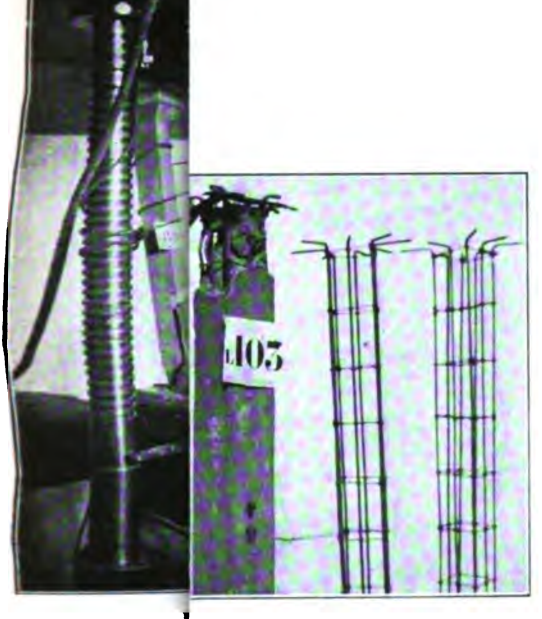


Abb. 12.
seisen und Bügel, links
(Vergl. S. es mit 8 mm-Rundeisen.
7 u. S. 27 Nr. 103.)



Abb. 13.
Abscherung mit eigentümlicher Verbiegung der Längseisen.
(Vergl. S. 27 Nr. 104.)



Alle
eiser
sic

Abb. 16.
bscherung der Säulen, die drei letzteren sind umschnürt.
(Vergl. S. 30 Nr. 157 u. S. 31 Nr. 168—170.)

…n.





Ausknicku…
(Vergl. …

Abb. 20.
Bei der Säule 281 wurde der Kopt vertikal abgeschert, bei der Säule 289 fällt bei der Ausknickung die Betonschale ab.
(Vergl. S. 38 Nr. 281, 286, 289 u. 290.)





Bei der Säu… …sen.
(Vergl. S. 46 Nr. …

Abb. 24.
Bei der Säule 477 reißen die Eiseneinlagen.
(Vergl. S. 50 Nr. 477, 480 u. 481.)

FORSCHERARBEITEN
AUF DEM GEBIETE DES
EISENBETONS

BEITRÄGE ZUR THEORIE UND BERECHNUNG
DER VOLLWANDIGEN BOGENTRÄGER
OHNE SCHEITELGELENK
INSBESONDERE DER BRÜCKENGEWÖLBE
UND DER IM EISENBETONBAU
ÜBLICHEN BIEGUNGS-
FESTEN RAHMEN



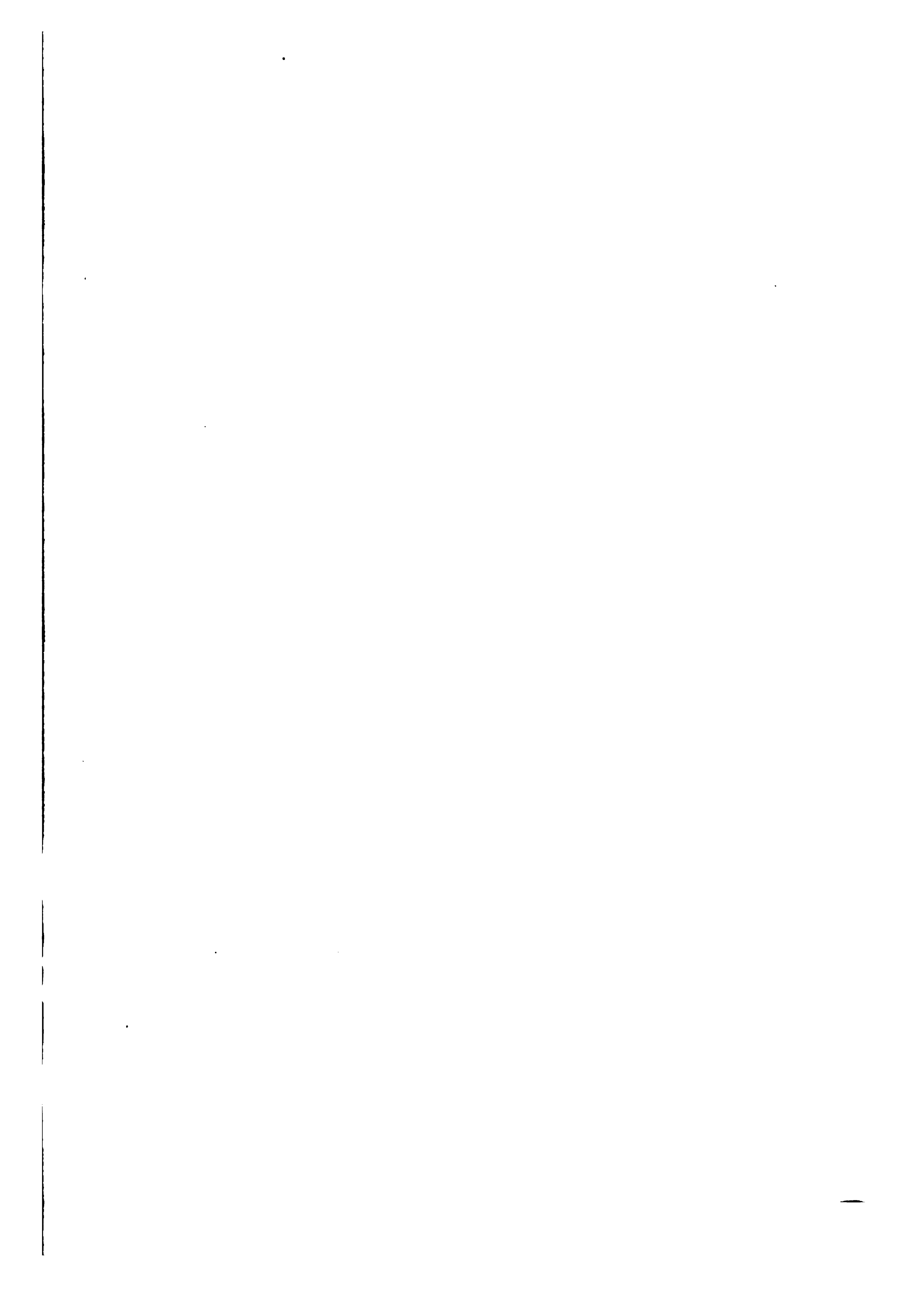
HEFT XI PREIS 3 MARK

VON

DR.-ING. MAX RITTER

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90







Beiträge

zur

Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk

insbesondere der Brückengewölbe und der im Eisenbetonbau üblichen biegungsfesten Rahmen

von

Dr.-Ing. MAX RITTER

Mit 36 Textabbildungen

BERLIN 1909
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

VORWORT.

Die vorliegende Schrift enthält in ihrem ersten Abschnitt eine Darstellung der Theorie des vollwandigen Bogens ohne Scheitelgelenk, dessen Kämpfer in elastisch drehbare Widerlager eingespannt sind. Die Elastizitätsgleichungen werden mit Hilfe des Superpositionsgesetzes und des Maxwell-Mohrschen Satzes entwickelt und in geeigneter Weise derart vereinfacht, daß sich die Auflösung nach den statisch unbestimmten Größen mühelos vollzieht. Der Einspannungsgrad der Kämpfer ist dabei ganz beliebig; die Theorie umfaßt also sowohl den eingespannten Bogen, als auch den Zweigelenkbogen als einfache Sonderfälle.

Der zweite Abschnitt bezieht sich auf eine wichtige Anwendung, nämlich auf die Berechnung der gelenklosen Brückengewölbe als eingespannte, elastische Bogen. Das hier vorgeführte Verfahren beruht darauf, für die Bogenform und die Veränderlichkeit des Querschnittes der Wirklichkeit möglichst nahekommende Gesetze zu wählen, und damit für die statisch unbestimmten Größen geschlossene Ausdrücke herzuleiten, deren Anwendung durch Zahlentabellen erleichtert werden kann. Das Verfahren, das an einem Beispiel erläutert wird, gestattet ein sehr rasches Arbeiten; wer Übung hat, vermag danach die Einflußlinien für die Kernpunktsmomente eines eingespannten Gewölbes bequem in etwa drei Stunden aufzuzeichnen, was nach der allgemeinen Methode nicht wohl möglich ist.

Im dritten Abschnitt wird in Kürze der gelenklose Bogen mit mehreren Öffnungen und elastischen Pfeilern behandelt. Neben der allgemeinen Methode wird ein einfaches Näherungsverfahren vorgeführt und an einem Beispiel (Eisenbetonbrücke in Pyrimont) erläutert. Eine eingehendere Arbeit über den kontinuierlichen Bogen soll demnächst an anderer Stelle folgen.

Endlich werden im vierten Abschnitt eine Reihe von Formeln zur Berechnung der besonders im Eisenbeton üblichen biegungsfesten Rahmen abgeleitet, die mir in der Praxis gute Dienste geleistet haben. Die Formeln

gelten für beliebige Einspannung der Kämpfer und sind leicht für den eingespannten und den zweigelenkigen Rahmen zu spezialisieren.

Die Schrift wendet sich naturgemäß an reifere, mit den Grundlehren der technischen Statik bereits vertraute Leser. Bei der großen Bedeutung, die der vollwandige Bogen in den letzten Jahren, namentlich im Eisenbetonbau erlangt hat, und dem gesteigerten Interesse, das ihm nach aller Voraussicht die nächste Zukunft entgegenbringen wird, hoffe ich insbesondere, daß sie dem praktisch tätigen Statiker von Nutzen sei.

Berlin, im Juli 1909.

Max Ritter.

INHALTS-VERZEICHNIS.

I. Allgemeine Theorie des vollwandigen Bogens ohne Scheitelgelenk.

1. Vorbemerkungen.

Als Bogenträger oder kurz Bogen bezeichnet man in der Statik der Baukonstruktionen einen ebenen Träger, welcher an beiden Enden derart aufliegt, daß unter der Wirkung lotrechter Lasten schiefe Auflagerdrücke entstehen. Der Name steht mit der Definition nicht im Einklang, da die Gestalt der Trägerachse ganz ohne Belang ist; er hat sich aber eingebürgert und wird deshalb am besten beibehalten.

Die nachfolgenden Untersuchungen befassen sich ausschließlich mit dem vollwandigen (stabförmigen) Bogen ohne Zwischengelenke. Die angreifenden Kräfte sollen in der Trägerebene liegen, so daß Torsionsmomente nicht auftreten.

Zunächst sollen ganz allgemein die Rechnungsgrundlagen für den beliebig gekrümmten, unsymmetrischen Bogen auf nachgiebigen Widerlagern entwickelt werden (Abb. 1). Wird der Bogen belastet, so entstehen die nach Größe und Lage unbekannten Kämpferdrücke R_1 und R_2, deren eindeutige Bestimmung sechs Gleichungen erfordert. Der Bogen ohne Zwischengelenke ist also im allgemeinen Falle dreifach statisch unbestimmt.

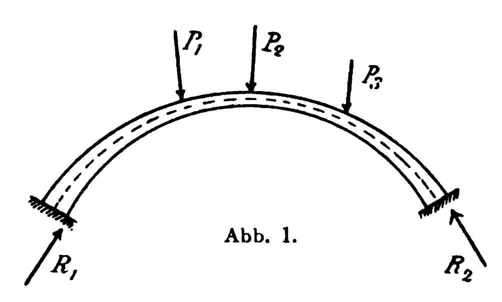


Abb. 1.

2. Das statisch bestimmte Hauptsystem.

Um dieses in möglichst vorteilhafter Weise zu bilden, denken wir uns an den Kämpfern starre Scheiben von den vorläufig beliebigen Längen t_1 und t_2 angeschlossen; die Endpunkte seien mit O_1 und O_2 bezeichnet. Wir zerlegen nun R_1 und R_2 nach Art der Abb. 2

a) in die lotrechten Komponenten V_1 und V_2,

b) in die in der Verbindungslinie $O_1 O_2$ wirkenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte H,

c) in die am rechten Kämpfer angreifende, zu H parallele Kraft T und
d) in die Momente M_1 und M_2.

Stellen wir jetzt den rechten Kämpfer auf ein festes Gelenklager, den linken auf ein Rollenlager, so werden die Kräfte V_1, V_2 und T auf den Untergrund übertragen. Als statisch bestimmtes Hauptsystem ergibt sich ein einfacher Balken, auf den außer den gegebenen Lasten noch die statisch unbestimmten Größen H, M_1 und M_2 wirken.

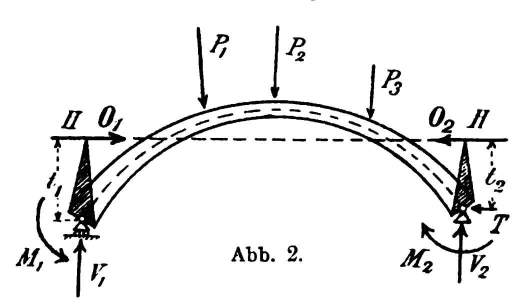


Abb. 2.

Wir nennen H die Bogenkraft, alle übrigen Kräfte die Balkenkräfte. Das Moment M_x aller Kräfte links des Schnittes x in bezug auf irgend einen Punkt des Schnittes entsteht durch algebraische Addition des Balkenmomentes M_x' und des Bogenmomentes Hy, wo y den Hebelarm der Bogenkraft bedeutet. Die Benennung rechtfertigt sich aus den in Nr. 5 enthaltenen Untersuchungen.

Bevor wir zur Aufstellung der Elastizitätsgleichungen schreiten, erscheint es geboten,

3. die Bewegung der Kämpferquerschnitte

infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager und des Untergrundes näher zu erörtern. Wir zerlegen die Bewegung jedes Kämpfers in die Verschiebung Δl_1 bezw. Δl_2 in Richtung der Geraden $O_1 O_2$, die Senkung Δv_1 bezw. Δv_2 und die Drehung $\bar{\alpha}$ bezw. $\bar{\beta}$. Von vornherein läßt sich einsehen, daß die Senkungen Δv_1 und Δv_2 gegenüber den andern Bewegungskomponenten von untergeordneter Bedeutung sind, namentlich wenn sie beide, wie es in praktischen Fällen meist der Fall sein wird, nahezu den gleichen Betrag erreichen; ist $\Delta v_1 = \Delta v_2$, so treten hiervon im Bogen überhaupt keine Spannungen auf. Wir werden deshalb in der Folge, um die Rechnungen nicht unnötig zu komplizieren, diese Senkungen einfach vernachlässigen, also annehmen, die Widerlager seien in lotrechter Richtung starr. Ueber die Vorzeichen der Bewegungskomponenten sei willkürlich wie folgt verfügt: Als positiv rechnen wir Δl_1 und Δl_2 nach innen, $\bar{\alpha}$ im Sinne des Uhrzeigers, $\bar{\beta}$ entgegengesetzt dazu.

Jede Bewegungskomponente zerfällt in einen unelastischen und einen elastischen Teil; der letztere wächst, wenn das Superpositionsgesetz gilt, proportional den ihn erzeugenden Kräften. Die Drehwinkel der Kämpferquerschnitte lassen sich deshalb genauer zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha - \varepsilon_1 (M_1 + Ht_1) \\ \bar{\beta} &= \beta - \varepsilon_2 (M_2 + Ht_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

anschreiben, wobei ε_1 und ε_2 die Drehungen der Widerlager infolge „$M = 1$“ bedeuten. α und β bezeichnen jetzt die unelastischen, sowie den Teil der elastischen Drehungen, der von H, V_1, V_2 und T herrührt. Man könnte die Trennung leicht noch eingehender und auch für die Verschiebungen $\varDelta l_1$ und $\varDelta l_2$ durchführen, was aber für unsere Zwecke nicht nötig erscheint. Es sei gleich darauf aufmerksam gemacht, daß alle mit Hilfe der Ausdrücke (1) abzuleitenden Beziehungen ihre Gültigkeit behalten, wenn man darin nachträglich ε_1 und ε_2 verschwinden läßt und nun unter α und β wieder die gesamten Kämpferdrehungen versteht. Wir werden hiervon im dritten Abschnitt Gebrauch machen. Die Berechnung der Koeffizienten ε_1 und ε_2 vollzieht sich meistens ohne Schwierigkeit nach den bekannten Regeln der Elastizitätslehre; es erübrigt sich, näher darauf einzugehen.

Kennt man die Bewegungskomponenten der Kämpfer, so findet man leicht die Aenderung $\varDelta l$ der Entfernung $O_1 O_2$, in deren ursprünglicher Richtung gemessen (positiv als Verkürzung). Es ist

$$\left.\begin{aligned}\varDelta l = \varDelta l_1 + \varDelta l_2 + \alpha t_1 + \beta t_2 \\ - H(\varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2) \\ - M_1 \varepsilon_1 t_1 - M_2 \varepsilon_2 t_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

4. Die Elastizitätsgleichungen,

die zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H, M_1 und M_2 nötig sind, ergeben sich in ebenso einfacher als übersichtlicher Weise aus dem Gesetze der Superposition, d. h. aus der Erwägung, daß jede Bewegung irgend eines Punktes des Bogens eine lineare Funktion der sie erzeugenden Kräfte sein muß. Danach ist

$$\begin{aligned}\varDelta l &= \varDelta l_0 + H \varDelta l' + M_1 \varDelta l_{M_1} + M_2 \varDelta l_{M_2},\\ \alpha &= \alpha_0 + H\alpha' + M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2,\\ \beta &= \beta_0 + H\beta' + M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2.\end{aligned}$$

Die angewandte Bezeichnungsweise erhellt ohne weiteres aus den Gleichungen; z. B. bedeuten $\varDelta l_0$, $\varDelta l'$, $\varDelta l_{M_1}$, $\varDelta l_{M_2}$ die Veränderung der Entfernung $O_1 O_2$, wenn auf das statisch bestimmte Hauptsystem bezw. die Kräfte P, $H = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 1$ einwirken, usw.

Der Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen gestattet, obige Gleichungen wie folgt umzuschreiben:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta l &= \Sigma P\delta' + H\varDelta l' + M_1 \alpha' + M_2 \beta' \\ \alpha &= \Sigma P\delta_1 + H\alpha' + M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 \\ \beta &= \Sigma P\delta_2 + H\beta' + M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

δ', δ_1 und δ_2 sind darin die Verschiebungen der Lasten P, in deren Richtung gemessen, infolge der Ursachen $H = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 1$.

Ersetzen wir die linken Seiten der Gleichung (3) durch die Beziehungen (1) und (2), so erhalten wir die Elastizitätsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta l_1 + \Delta l_2 + \alpha t_1 + \beta t_2 - H(\varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2) \\
&\qquad - M_1 \varepsilon_1 t_1 - M_2 \varepsilon_2 t_2 = \Sigma P\delta' + H\Delta l' + M_1 \alpha' + M_2 \beta' \\
&\alpha - H\varepsilon_1 t_1 - M_1 \varepsilon_1 = \Sigma P\delta_1 + H\alpha_1 + M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 \\
&\beta - H\varepsilon_2 t_2 - M_2 \varepsilon_2 = \Sigma P\delta_2 + H\beta' + M_1 \beta_1 + M_2 \beta_2
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4)$$

die sich leicht nach H, M_1 und M_2 auflösen lassen.

Wir erzielen jedoch eine sehr erhebliche Vereinfachung, indem wir jetzt über die bisher willkürlich angenommenen Längen t_1 und t_2 passend verfügen, derart nämlich, daß

$$\left.\begin{aligned}
\alpha' + \varepsilon_1 t_1 = 0 \\
\beta' + \varepsilon_2 t_2 = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Dann verschwinden in der ersten der Gleichung (4) M_1 und M_2, während in den beiden anderen H herausfällt. Die Gleichung (4) lautet einfacher

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \alpha t_1 + \beta t_2 = \Sigma P\delta' + H(\Delta l' + \varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2) \; . \; . \quad (6a)$$

$$\alpha = \Sigma P\delta_1 + M_1(\alpha_1 + \varepsilon_1) + M_2 \alpha_2 \; . \; . \quad (6b)$$

$$\beta = \Sigma P\delta_2 + M_1 \beta_1 + M_2(\beta_2 + \varepsilon_2) \; . \; . \quad (6c)$$

die Auflösung ergibt:

$$H = \frac{-\Sigma P\delta' + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \alpha t_1 + \beta t_2}{\Delta l' + \varepsilon_1 t_1^2 + \varepsilon_2 t_2^2} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7a)$$

$$M_1 = -\frac{(\Sigma P\delta_1 - \alpha)(\beta_2 + \varepsilon_2) - (\Sigma P\delta_2 - \beta)\alpha_2}{(\alpha_1 + \varepsilon_1)(\beta_2 + \varepsilon_2) - \alpha_2 \beta_1} \; . \; . \quad (7b)$$

$$M_2 = -\frac{(\Sigma P\delta_2 - \beta)(\alpha_1 + \varepsilon_1) - (\Sigma P\delta_1 - \alpha)\beta_1}{(\alpha_1 + \varepsilon_1)(\beta_2 + \varepsilon_2) - \alpha_2 \beta_1} \; . \; . \quad (7c)$$

5. Berechnung der Balkenmomente.

In den Gleichungen (7b) und (7c) kommen die Verschiebungen Δl_1 und Δl_2 nicht vor; die Momente M_1 und M_2 sind also unabhängig von dem Widerstande der Widerlager in Richtung $O_1 O_2$. Denkt man sich diesen Widerstand ganz aufgehoben, so verschwindet die Bogenkraft, und der Bogen geht in den teilweise eingespannten Balken mit den Einspannmomenten M_1 und M_2 über. Die Bezeichnung „Balkenmomente" findet hierin ihre Rechtfertigung.

Die Momentenfläche des teilweise eingespannten Balkens folgt aus der des beiderseitig frei drehbaren Balkens, indem man die Schlußlinie um M_1 und M_2 senkt (Abb. 3). Die Benutzung der Gleichung (7b) und (7c) erscheint nicht gerade übersichtlich; wir leiten deshalb nachstehend ein einfaches Verfahren zur Ermittlung der Schlußlinie ab, das in praktischen Fällen den Vorzug verdient.

Wir nehmen an, der Balken selbst sei unbelastet, es habe sich jedoch das rechte Widerlager aus irgend welchen Ursachen um einen beliebigen,

sehr kleinen Winkel gedreht. Die Momentenkurve ist dann eine Gerade; der Momentennullpunkt A habe vom linken Auflager den Abstand a. Wie man leicht erkennt, behält bei dieser Deformation Gleichung (6b) Gültigkeit, sofern man darin $\Sigma P\delta_1$ und α gleich Null setzt; aus ihr folgt

$$\frac{a}{l} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \varepsilon_1} \quad \ldots \quad (8a)$$

Analog gilt Gleichung (6c), wenn sich das linke Widerlager um einen beliebigen, sehr kleinen Winkel gedreht hat; sie liefert mit $\Sigma P\delta_2 = 0$ und $\beta = 0$ den Abstand des Momentennullpunktes B vom rechten Auflager zu

$$\frac{b}{l} = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_2} \quad \ldots \quad (8b)$$

In den Punkten A und B errichten wir die Lote und berechnen die Strecken A und B, die auf ihnen von der Schlußlinie der Momentenfläche abgeschnitten werden. Es ergibt sich (Abb. 3)

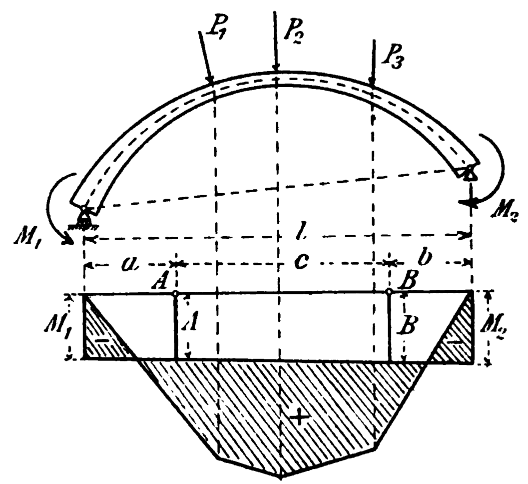


Abb. 3.

$$\left. \begin{aligned} A &= M_1 \frac{l-a}{l} + M_2 \frac{a}{l} \\ B &= M_2 \frac{l-b}{l} + M_1 \frac{b}{l} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (9)$$

Setzen wir hierin für M_1 und M_2 die Ausdrücke (7b) und (7c) ein und eliminieren aus den Gleichungen (8) und (9) ε_1 und ε_2, so erhalten wir[1])

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{a}{l} \frac{\Sigma P\delta_1 - \alpha}{\alpha_2} \\ B &= -\frac{b}{l} \frac{\Sigma P\delta_2 - \beta}{\beta_1} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Ausdrücke sind negativ, wenn M_1 und M_2 negativ sind, was wohl stets der Fall sein wird.

Die Punkte A und B haben eine von den Drehwinkeln der Kämpfer unabhängige Lage. Man nennt sie deshalb die Fixpunkte oder die Festpunkte des Balkens und die entsprechenden Lotrechten die Festlinien. Die Strecken A und B sind natürlich im Maßstabe der Momente zu messen.

[1]) Der Verfasser: „Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment", Schweiz. Bauzeitung 1909, Bd. 53, Nr. 18 u. 19.

Statt die Schlußlinie aufzuzeichnen, kann man M_1 und M_2 aus A und B berechnen. Aus Gleichung (9) folgt

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{A(l-b)-Ba}{c} \\ M_2 &= \frac{B(l-a)-Ab}{c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

c ist die Entfernung der Fixpunkte. Bei symmetrischer Anordnung des Balkens, der Widerlager und der Belastung ist $a = b$ und

$$M_1 = M_2 = A = B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

6. Berechnung der Formänderungen.

Die Benutzung aller bisher abgeleiteten Beziehungen erfordert lediglich die Berechnung elastischer Verschiebungen und Drehungen. Hierbei darf man, um rascher zum Ziele zu kommen, den Einfluß der Schubkräfte auf die Formänderung stets vernachlässigen; auch ist es mit Rücksicht auf die geringe Krümmung der im Bauwesen üblichen Bogenträger immer gestattet, von den für den geraden Stab gültigen Formänderungsgleichungen auszugehen. Um dieses letztere in einwandfreier Weise einzusehen, erinnern wir an die bekannte Formel für die Krümmungsänderung des gebogenen Stabes[1])

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \pm \frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{EF} - \frac{M}{EFr}} \quad \ldots \quad (13)$$

Darin sind r und ϱ die Krümmungshalbmesser der Stabachse vor und nach der Formänderung des durch das Moment M und die Normalkraft N beanspruchten Stabelementes vom Querschnitte F; J_0 ist das sogenannte Krümmungsmoment, das sich, wie in der Literatur des öfteren gezeigt wurde, für praktisch vorkommende Verhältnisse von dem Trägheitsmoment J fast gar nicht unterscheidet.[2]) Die Formel läßt ohne weiteres ersehen, daß der Einfluß der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ auf die Aenderung der Krümmung sehr gering ist; denn der Summand $\frac{M}{EFr}$, der diesen Einfluß darstellt, verschwindet gegen 1. Beispielsweise ergibt sich für ein Stein- oder Betongewölbe mit dem rechteckigen Querschnitte $F = bh$, dem Radius $r = 5\,h$, dem Elastizitätsmodul $E = 210\,000$ kg/cm² und der von M herrührenden Spannung $\sigma = 40$ kg/cm²

$$\frac{M}{EFr} = \frac{\sigma}{6\,E}\,\frac{h}{r} = \frac{40}{6 \cdot 210\,000 \cdot 5} = 0{,}0000063,$$

welche Zahl gegen 1 zu vernachlässigen ist.

[1]) Handbuch der Ing.-Wissensch. II, 5, 3. Aufl., Gl. 183.

[2]) Vergl. besonders Weyrauch, Die elastischen Bogenträger, 2. Aufl. 1897. S. 20.

Weiter zeigt Gleichung (13), wie auch die Formänderung von der Normalkraft N nur wenig ausmacht, indem auch der Wert $\frac{N}{EF}$ gegenüber der Zahl 1 stets klein bleibt. In der Tat darf zur Berechnung der elastischen Drehungen, sowie der Verschiebungen δ', δ_1 und δ_2 der Einfluß von N immer vernachlässigt werden. Nur bei Ermittlung der Größe $\Delta l'$ in Gleichung (7a) empfiehlt es sich, bei flach gespannten Bogen die Formänderung durch N, d. h. die Verkürzung der Bogenachse, in Rechnung zu stellen.

Beschränkt man sich auf den Einfluß der Biegungsmomente, so gestaltet sich die Berechnung der Formänderungen sehr einfach. Denkt man sich nur ein einziges Bogenelement ds elastisch (Abb. 4), so besteht das Diagramm der Durchbiegungen senkrecht zur beliebigen x-Achse aus zwei Geraden, die den Formänderungswinkel

$$d\gamma = \frac{M\,ds}{EJ} = \frac{M\,dx}{EJ\cos\varphi}$$

miteinander bilden; man erhält sie, indem man an dem Bogenelement $1 \cdot d\gamma$ als Gewicht senkrecht zur x-Achse wirken läßt und ein Seileck mit der Polweite $= 1$ zeichnet.

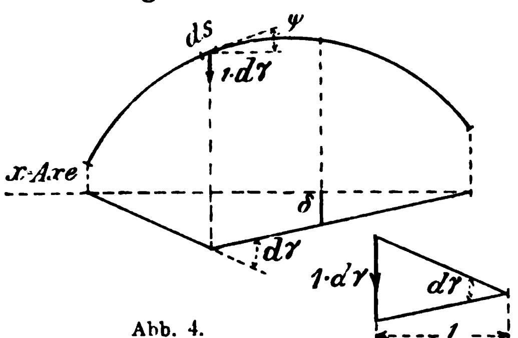


Abb. 4.

Da der gesamte Bogen elastisch ist, so muß danach in jedem Bogenpunkte das entsprechende Gewicht $1 \cdot d\gamma$ angebracht und dazu ein Seileck gezeichnet werden, ganz analog dem Mohrschen Verfahren für den geraden Stab. Die Schlußlinie des Seilecks ergibt sich leicht aus den Auflagerbedingungen. Zur vollständigen Bestimmung der Formänderung müssen natürlich die Durchbiegungsdiagramme für zwei verschiedene Richtungen ermittelt werden.

Analytisch gewinnt man die Durchbiegungen aus der Differentialgleichung

$$\pm \frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EJ\cos\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

wo φ die Neigung der Bogenachse gegen die x-Achse bedeutet. Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt ohne weiteres aus obigen Ausführungen.

Indessen geht man zweckmäßig nur zur Ermittlung der Werte δ', δ_1 und δ_2 in der beschriebenen Weise vor und drückt die anderen Größen analytisch aus, z. B. mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit, angewendet auf den Belastungs- und Verschiebungszustand $H = 1$ bezw. $M_1 = 1$, $M_2 = 1$. Man findet so mit den Bezeichnungen der Abb. 5

$$\left.\begin{aligned} \Delta l' &= \int y^2\,dw + \int \frac{\cos^2\varphi}{EF}\,ds \\ \alpha_1 l^2 &= \int x'^2 dw, \qquad \beta_2 l^2 = \int x^2 dw \\ \alpha_2 l^2 &= \beta_1 l^2 = \int x x' dw, \quad dw = \frac{ds}{EJ} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Die Integrale sind über den ganzen Bogen auszudehnen.

7. Die Lage der Bogenkraft.

Gemäß den Gleichungen (5) bestimmt sich die Angriffslinie der Bogenkraft durch

$$\alpha' + \varepsilon_1 t_1 = 0,$$
$$\beta' + \varepsilon_2 t_2 = 0.$$

Darin sind α' und β' die Drehungen der Kämpfer infolge $H = 1$. Das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert

$$\alpha' l = -\int x' y \, dw, \qquad \beta' l = -\int x y \, dw \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

d. h. $-\alpha' l$ und $-\beta' l$ sind die Zentrifugalmomente der an der Bogenachse angreifenden Gewichte dw, bezogen auf die Achse $O_1 O_2$ und die Auflagerlotrechten. Sie sind wiederum von t_1 und t_2 abhängig, wodurch die Bestimmung dieser Größen erschwert wird.

Wir verfahren wie folgt: Zunächst ermitteln wir — analytisch oder graphisch — den Schwerpunkt S der Gewichte dw und wählen ihn zum

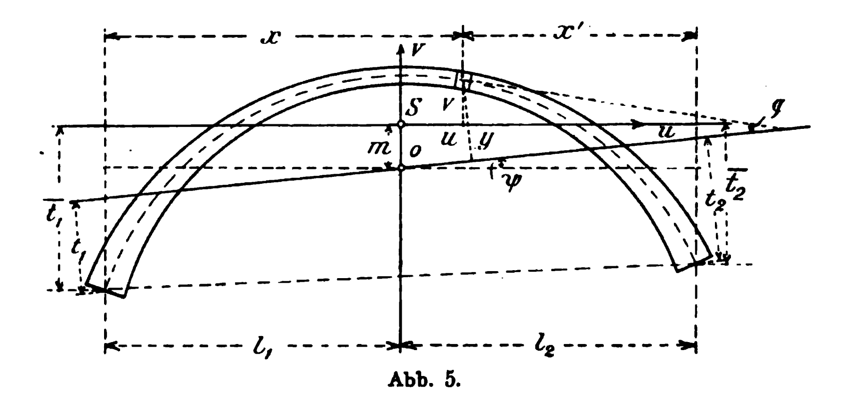


Abb. 5.

Nullpunkt eines Koordinatensystems mit der wagerechten u-Achse und der lotrechten v-Achse (Abb. 5). Die Angriffslinie der Bogenkraft schneidet dann auf der v-Achse die Strecke m ab und bildet mit der u-Achse den Winkel ψ; beide Größen seien positiv gerechnet, wenn sie wie in Abb. 5 gerichtet sind; m und ψ bestimmen die Gerade $O_1 O_2$ eindeutig, können also t_1 und t_2 ersetzen.

Mit den in Abb. 5 eingetragenen Bezeichnungen ergibt sich

$$t_1 = (t_1 - m) \cos \psi - l_1 \sin \psi,$$
$$t_2 = (t_2 - m) \cos \psi + l_2 \sin \psi,$$
$$y = v \cos \psi + m \cos \psi - u \sin \psi.$$

Die Gleichungen (16) und (5) lauten

$$-\alpha' l = \int x' y \, dw = \int (l_2 - u)(v \cos \psi + m \cos \psi - u \sin \psi)\, dw$$
$$= \varepsilon_1 l \,(t_1 \cos \psi - m \cos \psi - l_1 \sin \psi),$$
$$-\beta' l = \int x y \, dw = \int (l_1 + u)(v \cos \psi + m \cos \psi - u \sin \psi)\, dw$$
$$= \varepsilon_2 l \,(t_2 \cos \psi - m \cos \psi + l_2 \sin \psi).$$

Lösen wir die Klammern auf und beachten, daß

$$\int u\,dw = \int v\,dw = 0$$

ist, so erhalten wir die wichtigen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} m l_2 \int dw - \int uv\,dw + \operatorname{tg}\psi \int u^2\,dw - \varepsilon_1 l\,(t_1 - m - l_1 \operatorname{tg}\psi) = 0 \\ m l_1 \int dw + \int uv\,dw - \operatorname{tg}\psi \int u^2\,dw - \varepsilon_2 l\,(t_2 - m + l_2 \operatorname{tg}\psi) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

aus welchen sich m und $\operatorname{tg}\psi$ leicht gewinnen lassen.

Der allgemeine Fall eines unsymmetrischen, beiderseitig in verschieden elastische Widerlager eingespannten Bogens kommt indessen nur sehr selten vor; die Praxis hat es meistens mit einfachen Sonderfällen zu tun. Die drei praktisch wichtigsten Bogenarten, nämlich

a) der vollständig eingespannte Bogen ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$),

b) der Zweigelenkbogen ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$) und

c) der symmetrische und symmetrisch gelagerte Bogen ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $\psi = 0$)

werden nachstehend getrennt besprochen.

8. Der vollständig eingespannte Bogen (Abb. 6).

Die Widerlager sind starr oder doch nur parallel verschiebbar, ihre Elastizitätsmaße ε_1 und ε_2 gleich Null.

Abb. 6.

Die Fixpunkte haben gemäß den Gleichungen (8) und (15) von den Auflagerlotrechten die Abstände

$$a = \frac{\alpha_2 l}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{l \cdot \int x x'\,dw}{\int x'^2\,dw + \int x x'\,dw}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\int x x'\,dw}{l_2 \int dw} \\ b &= \frac{\int x x'\,dw}{l_1 \int dw} = a\,\frac{l_2}{l_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{(analog für } b\text{)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Die Ordinaten A und B, die die Schlußlinie der Balkenmomentenfläche festlegen, ergeben sich nach den Gleichungen (10) zu

$$\left.\begin{aligned} A &= -a l\,\frac{\Sigma P\delta_1}{\int x x'\,dw} = -\frac{l\,\Sigma P\delta_1}{l_2 \int dw} \\ B &= -b l\,\frac{\Sigma P\delta_2}{\int x x'\,dw} = -\frac{l\,\Sigma P\delta_2}{l_1 \int dw} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Die Lage der Bogenkraft folgt aus den Gleichungen (17) zu

$$m = 0, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\int uv\,dw}{\int u^2\,dw} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Ist der Bogen derart geformt, daß die v-Achse jede zur Verbindungslinie der Kämpfer parallele Sehne halbiert (schiefe Symmetrie), so wirkt die Bogenkraft ebenfalls parallel zur Kämpfergeraden; die Anwendung der Gleichung (20) ist dann entbehrlich. Bei rechtwinkliger Symmetrie ist $\psi = 0$.

Die Größe der Bogenkraft ist nach Gleichung (7a) und (15)

$$H = \frac{-\Sigma P\delta' + \Delta l_1 + \Delta l_2}{\int y^2 dw + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EF} ds} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Hierin darf bei Bogen mit einigermaßen großem Pfeilverhältnis das zweite Glied des Nenners vernachlässigt werden. Bei flachen Bogen ist dies aber nicht zulässig; doch genügt es dort, dafür näherungsweise den Wert $\frac{l}{EF_s}$ zu setzen, wo F_s den Querschnitt im Scheitel bedeutet.

Eine gleichmäßige Temperaturänderung $\pm t^0$ hat dieselbe Wirkung wie eine Verschiebung der Kämpfer um $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha t^0 l$, wo α den Temperaturausdehnungskoeffizienten bezeichnet, erzeugt also keine Balkenmomente, sondern nur die Bogenkraft

$$H = \frac{\alpha t^0 l}{\int y^2 dw + \frac{l}{EF_s}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

9. Der Zweigelenkbogen (Abb. 7).

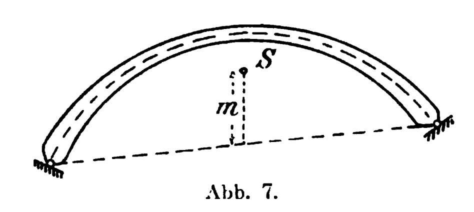


Abb. 7.

Für diesen Sonderfall ist in den allgemeinen Gleichungen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \infty$ zu setzen. Die Gleichungen (8) und (10) liefern hierfür

$$a = b = 0, \quad A = B = 0.$$

Die Momente M_1 und M_2 verschwinden also, weshalb die Angriffslinie der Bogenkraft in die Kämpfergerade fallen muß, da ja Kämpfermomente nicht auftreten können. Die Bestimmung des Schwerpunktes der elastischen Gewichte dw fällt weg.

Für die Größe der Bogenkraft liefert Gleichung (7a) denselben Ausdruck wie beim eingespannten Bogen, nämlich

$$H = \frac{-\Sigma P\delta' + \Delta l_1 + \Delta l_2 + \alpha t^0 l}{\int y^2 dw + \frac{l}{EF_s}} \quad . \ . \ . \ . \ (23)$$

Da jetzt y von der Kämpfergeraden aus zu messen ist, fällt $\int y^2 dw$ wesentlich größer aus als beim eingespannten Bogen; der Einfluß der Verkürzung der Bogenachse, einer Verschiebung der Widerlager oder einer Temperaturänderung tritt deshalb hier zurück.

Abb. 8.

10. Der symmetrische und symmetrisch gelagerte Bogen (Abb. 8).

Es sei $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, während die Bewegungskomponenten Δl_1,

Δl_2, α und β verschwinden. Dann folgt für den symmetrischen Bogen gemäß den Gleichungen (8), (10) und (15)

$$a = b = \frac{\int x x' dw}{\frac{l}{2}\int dw + \varepsilon l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= -al\frac{\Sigma P\delta_1}{\int x x' dw} = -\frac{\Sigma P\delta_1}{\frac{1}{2}\int dw + \varepsilon} \\ B &= -al\frac{\Sigma P\delta_2}{\int x x' dw} = -\frac{\Sigma P\delta_2}{\frac{1}{2}\int dw + \varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (25)$$

Die Bogenkraft wirkt wagerecht; ihre Lage folgt aus Gleichung (17) mit Beachtung, daß aus Symmetriegründen $\int u v dw = 0$ ist, zu

$$m = \frac{\varepsilon t}{\frac{1}{2}\int dw + \varepsilon} .$$

Der Abstand von der Kämpfergeraden ist

$$t' = t - m = \frac{t\int dw}{\int dw + 2\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Für die Größe der Bogenkraft gibt Gleichung (7a) in Verbindung mit Gleichung (15)

$$H = \frac{-\Sigma P\delta'}{\int y^2 dw + \frac{l}{EF_s} + 2\varepsilon t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Der Fall einer elastischen Einspannung kommt neuerdings im Eisenbetonbau nicht selten vor, namentlich bei den zu Dachbindern angewandten, biegungsfesten Rahmen. Auf deren Berechnung wird im vierten Abschnitt näher eingegangen.

II. Die Berechnung der gelenklosen Brückengewölbe.

II. Vorbemerkungen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Elastizitätstheorie des Vollwandbogens bezieht sich auf die Berechnung und Dimensionierung gewölbter Brücken. Nachdem das elastische Verhalten der Gewölbematerialien durch ungezählte Versuche außer Zweifel gestellt ist, hat die Berechnung auf Grund der Elastizitätstheorie die älteren Gewölbetheorien nach und nach verdrängt und wird gegenwärtig bei wichtigeren Objekten stets durchgeführt. Allerdings ist die Elastizität der Gewölbebaustoffe ziemlichen Schwankungen unterworfen und nur näherungsweise durch das Superpositionsgesetz auszudrücken, das man der Theorie zugrunde legt; es steht deshalb auch nicht zu erwarten, daß die letztere ein der Wirklichkeit völlig entsprechendes

Bild liefert. Eine Reihe von Belastungsproben an Versuchsobjekten[1]) haben aber die Ueberzeugung gefestigt, daß die Elastizitätstheorie den Sicherheitsgrad der Gewölbe befriedigend beurteilt, und das ist alles, was die Praxis nötig hat; eine genaue Uebereinstimmung der rechnerischen Durchbiegungen mit den tatsächlichen kann entbehrt werden. Uebrigens vermag nach Ansicht des Verfassers[2]) selbst ein vom Superpositionsgesetz erheblich abweichendes Verhalten des Materials die Ergebnisse der Theorie nur in geringem Maße zu beeinflussen.

Die Theorie des beiderseitig eingespannten Bogens wurde bereits in Nr. 8 entwickelt. Etwas prinzipiell Neues ist hier nicht beizufügen; es handelt sich jetzt nur noch darum, das Rechnungsverfahren in eine für die praktische Anwendung geeignete Form zu bringen. Die Berechnung nach den allgemeinen Gleichungen würde einen erheblichen Zeitaufwand erfordern, hauptsächlich deshalb, weil die statisch unbestimmten Größen mit den Abmessungen des Bogens zusammenhängen. Da in der Regel weder die Bogenform, noch die Veränderlichkeit des Querschnitts gesetzmäßig sind, lassen sich für die Gleichungen (18) bis (22) keine geschlossenen Ausdrücke ableiten; man müßte vielmehr die Integrale näherungsweise als Summen berechnen oder graphisch durch Seilpolygone ermitteln. In der Tat wird dieser Weg vielfach eingeschlagen, obgleich er — namentlich bei den modernen Eisenbetongewölben — ziemlich mühsam ist.

Viel einfacher und kürzer gestaltet sich die Berechnung, wenn man die Bogenform und die Veränderlichkeit des Querschnitts von vornherein durch Gesetze ausdrückt, die der Wirklichkeit möglichst nahekommen und sich zugleich leicht integrieren lassen. Man erhält dann für die statisch unbestimmten Größen geschlossene Formeln, deren Anwendung durch Zahlentabellen erleichtert werden kann. Besonders gut eignet sich dieses Vorgehen auch zu vergleichenden Untersuchungen über den Einfluß der Bogenform und der Querschnittsänderung auf die Schnittkräfte, die für ein zweckmäßiges Dimensionieren nicht ohne Wert sind.

Wir gehen in der Folge auf die zuletzt beschriebene Weise vor. Der Kürze wegen beschränken wir alle Darlegungen auf symmetrische Gewölbe, die ja in den weitaus häufigsten Fällen zur Anwendung gelangen.

12. Gesetz für die Querschnittsänderung.[3])

Gelenklose Brückengewölbe werden stets so entworfen, daß ihr Trägheitsmoment J vom Scheitel (J_s) gegen die Kämpfer (J_k) stetig zu-

[1]) Eine Zusammenstellung gibt das Handbuch für Eisenbetonbau, I. Bd., S. 302 u. f.

[2]) Der Verfasser: „Zur Berechnung gelenkloser Brückengewölbe", Schweizer. Bauzeitung 1907, Bd. 49, Nr 2

[3]) Die in dieser und den Nummern 14, 15 und 18 enthaltenen Untersuchungen finden sich in etwas anderer Fassung bereits in dem Aufsatze des Verfassers: „Vereinfachung der Berechnung gelenkloser Brückengewölbe", Schweizer Bauzeitung 1908, Bd. 51, Nr. 22, 24. 26.

nimmt. Wir drücken diese Zunahme durch das Gesetz

$$\frac{J_s'}{J\cos\varphi} = 1 + c\,(l_1 - x)^2$$

aus, wo c eine Konstante bedeutet (Abb. 9). Für $x = 0$ ergibt sich

$$c = \frac{-1 + \dfrac{J_s}{J_k\cos\varphi_k}}{l_1^2},$$

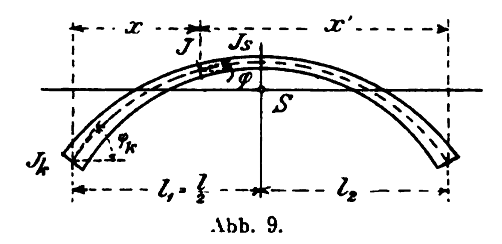


Abb. 9.

weshalb obige Gleichung mit der Abkürzung

$$n = \frac{J_s}{J_k\cos\varphi_k}$$

in die Form

$$\frac{J_s}{J\cos\varphi} = 1 - (1-n)\,\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

übergeht, die wir weiterhin benutzen werden.

Das Gesetz (28) lehnt sich eng an die Verhältnisse der Praxis an. Eine beliebte, in vielen Lehrbüchern enthaltene Regel empfiehlt, die Querschnitte der Brückengewölbe so zu wählen, daß ihre Vertikalprojektion konstant bleibt. Ein Kreisbogengewölbe vom Radius r derart dimensioniert, befriedigt das Gesetz (28) genau; denn es ist

$$\frac{J_s}{J\cos\varphi} = \frac{F_s^3}{F^3\cos\varphi} = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = 1 - \frac{(l_1 - x)^2}{r^2},$$

d. i. obiges Gesetz. In anderen Fällen weicht das Gesetz nur ganz unwesentlich von der Wahrheit ab und darf als gute Annäherung stets unbedenklich benutzt werden, um so eher, als der Einfluß der Querschnittsänderung auf die Schnittkräfte nicht beträchtlich ist.

13. Die Balkenmomente.

Auf Grund des Gesetzes (28) läßt sich das Gewicht dw eines Bogenelementes zu

$$dw = \frac{ds}{EJ} = \frac{dx}{EJ\cos\varphi} = \left[1 - (1-n)\,\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2}\right]\frac{dx}{EJ_s}$$

anschreiben. Die Summe aller Gewichte ist

$$\int dw = \int^l \left[1 - (1-n)\,\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2}\right]\frac{dx}{EJ_s} = \frac{n+2}{3}\,\frac{l}{EJ_s} \qquad (29)$$

Ferner ergibt sich

$$\int x x'\,dw = \int^l x\,(l - x)\left[1 - (1-n)\,\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2}\right]\frac{dx}{EJ_s} = \frac{n+4}{30}\,\frac{l^3}{EJ_s} \qquad (30)$$

Der Abstand der Fixpunkte von den Auflagern beträgt gemäß den Gleichungen (18)

$$a = b = \frac{\int x x'\,dw}{l_1\int dw} = \frac{n+4}{5\,(n+2)}\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Zur Berechnung der Einsenkungen δ_1 und δ_2 der lotrechten Lasten P infolge $M_1 = 1$, bezw. $M_2 = 1$ benutzen wir die Differentialgleichung der elastischen Linie, d. i. Gleichung (14). $M_1 = 1$ erzeugt das Schnittmoment $+\frac{l-x}{l}$; es ist also die Gleichung

$$-EJ_s \frac{d^2\delta_1}{dx^2} = \frac{l-x}{l}\left[1-(1-n)\frac{(l_1-x)^2}{l_1^2}\right]$$

zweimal zu integrieren. Letzteres bietet keine Schwierigkeiten; wir erhalten mit Berücksichtigung der Integrationskonstanten und nach kurzer Umformung

$$EJ_s \cdot \delta_1 = \frac{n+4}{30}\,\frac{xx'(l+x')}{l} + \frac{1-n}{15}\,\frac{xx'^3(3x-l)}{l^3};$$

indem wir x mit x' vertauschen, folgt

$$EJ_s \cdot \delta_2 = \frac{n+4}{30}\,\frac{xx'(l+x)}{l} + \frac{1-n}{15}\,\frac{x'x^3(3x'-l)}{l^3}.$$

Für die Ordinaten A und B, die die Schlußlinie der Balkenmomentenfläche festlegen, lassen sich jetzt geschlossene Ausdrücke aufstellen. Mit Benutzung der Gleichungen (19) und (30) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} A &= -a\cdot\Sigma P\left[\frac{xx'(l+x')}{l^3} + \frac{2(1-n)}{n+4}\,\frac{xx'^3(3x-l)}{l^5}\right] \\ B &= -a\cdot\Sigma P\left[\frac{xx'(l+x)}{l^3} + \frac{2(1-n)}{n+4}\,\frac{x'x^3(3x'-l)}{l^5}\right] \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die Anwendung dieser Gleichungen wird durch die nachfolgende Tabelle erleichtert, in welcher für die um je $\frac{1}{24}$ der Spannweite fortschreitenden Werte x die Klammerausdrücke zusammengestellt sind (Abb. 10).

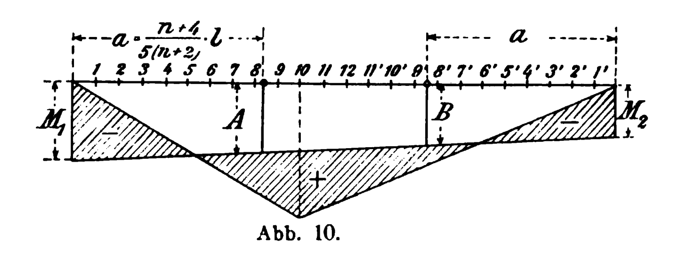


Abb. 10.

Die Tabelle läßt erkennen, daß in Gleichung (32) das zweite von n abhängige Glied der Klammer nur eine geringe Rolle spielt. Für $n = 1$ verschwindet dieses Glied vollständig, ebenso für eine gleichmäßig verteilte Belastung, denn es ist

$$\int_0^l x(l-x)^3(3x-l)\,dx = 0.$$

Wenn es daher auf sehr große Genauigkeit nicht ankommt, kann dieses Glied vernachlässigt werden. Die Gleichungen (32) lauten dann

Tabelle der Werte $-\frac{A}{a}$ und $-\frac{B}{a}$ für $P=1$,

berechnet nach Gleichung (32), vergl. Abb. 10 $\left(\begin{array}{l} -\frac{A}{a} = \text{obere Zahl} \\ -\frac{B}{a} = \text{untere Zahl} \end{array}\right)$

Lastpunkt n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,078	0,146	0,205	0,255	0,296	0,328	0,353	0,370	0,381	0,385	0,383	0,375
	0,042	0,083	0,123	0,162	0,199	0,234	0,267	0,296	0,322	0,344	0,362	0,375
0,8	0,075	0,142	0,201	0,251	0,293	0,326	0,352	0,370	0,382	0,387	0,385	0,378
	0,042	0,083	0,123	0,163	0,200	0,235	0,269	0,298	0,324	0,347	0,365	0,378
0,7	0,074	0,140	0,199	0,249	0,291	0,325	0,351	0,370	0,382	0,388	0,386	0,379
	0,042	0,083	0,123	0,163	0,200	0,236	0,269	0,299	0,325	0,348	0,366	0,379
0,6	0,072	0,138	0,196	0,247	0,289	0,324	0,351	0,370	0,383	0,389	0,387	0,380
	0,042	0,083	0,124	0,163	0,201	0,236	0,270	0,300	0,327	0,349	0,368	0,380
0,5	0,071	0,136	0,193	0,245	0,287	0,322	0,350	0,370	0,383	0,390	0,389	0,382
	0,042	0,083	0,124	0,163	0,201	0,237	0,271	0,302	0,328	0,351	0,369	0,382
0,4	0,069	0,133	0,191	0,242	0,286	0,321	0,349	0,370	0,384	0,391	0,390	0,383
	0,042	0,083	0,124	0,164	0,202	0,238	0,272	0,303	0,330	0,353	0,371	0,383
0,3	0,068	0,131	0,188	0,240	0,284	0,320	0,349	0,370	0,385	0,392	0,392	0,385
	0,042	0,083	0,124	0,164	0,202	0,239	0,273	0,304	0,331	0,354	0,372	0,385
0,25	0,066	0,128	0,186	0,237	0,282	0,318	0,348	0,370	0,385	0,393	0,393	0,387
0,2	0,042	0,083	0,124	0,164	0,203	0,240	0,274	0,305	0,332	0,356	0,374	0,387
0,15	0,065	0,126	0,184	0,235	0,280	0,317	0,348	0,370	0,385	0,394	0,394	0,388
	0,042	0,083	0,124	0,164	0,203	0,240	0,275	0,306	0,333	0,357	0,375	0,388

$$\left.\begin{array}{l} A = -a\Sigma P \frac{xx'(l+x')}{l^3} \\ B = -a\Sigma P \frac{xx'(l+x)}{l^3} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Bezeichnet man (Abb. 11) mit $F\xi'$ und $F\xi$ die statischen Momente der einfachen Momentenfläche bezüglich der Auflagerlotrechten, so ist, wie

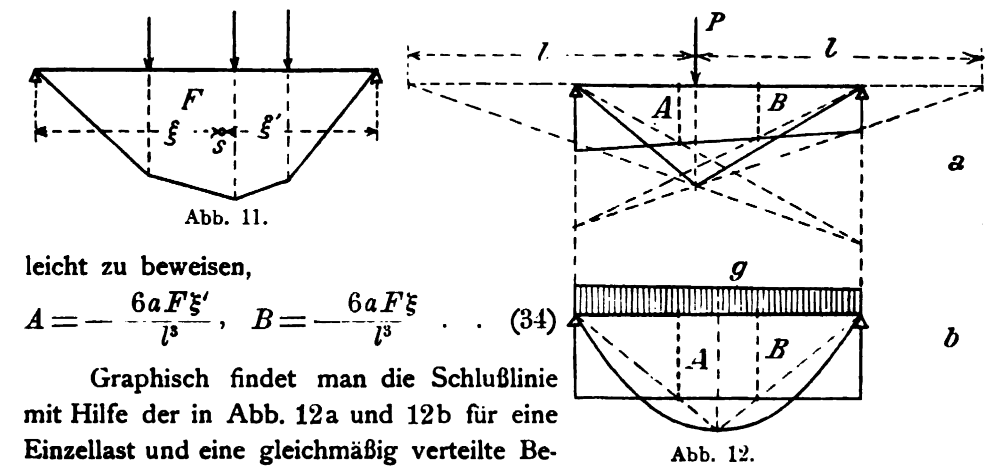


Abb. 11.

Abb. 12.

leicht zu beweisen,

$$A = -\frac{6aF\xi'}{l^3}, \quad B = -\frac{6aF\xi}{l^3} \quad . \quad . \quad (34)$$

Graphisch findet man die Schlußlinie mit Hilfe der in Abb. 12a und 12b für eine Einzellast und eine gleichmäßig verteilte Be-

lastung dargestellten, aus der Theorie des kontinuierlichen Balkens bekannten Konstruktionen, deren Richtigkeit an Hand der Gleichung (33) leicht erkannt wird. Allerdings gilt Abb. 12a, wie oben erwähnt, nur näherungsweise; Abb. 12b gilt dagegen streng und, wie sich zeigen läßt, auch dann noch, wenn in dem Gesetz (28) der Exponent 2 durch einen beliebigen anderen, positiven oder negativen, ersetzt wird. Die Anwendung der Zahlentabelle ist freilich ebenso einfach wie die Konstruktion.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß die Balkenmomente von der Form des Gewölbes unabhängig sind; letztere beeinflußt bloß die Bogenkraft

14. Die Größe der Bogenkraft.[1])

Wir nehmen vorläufig an, die Gewölbeachse sei eine gewöhnliche Parabel. Dies wird allerdings in praktischen Fällen meist nicht zutreffen; wir werden aber weiter unten zeigen, daß man zur Berechnung der Größe der Bogenkraft (nicht auch zu deren Lage) stets ohne wesentlichen Fehler eine Parabel annehmen darf.

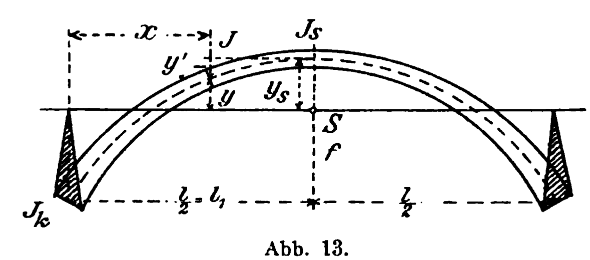


Abb. 13.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 13 lautet dann die Gleichung der Gewölbeachse

$$y' = \frac{f}{l_1^2}(l_1 - x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Der Abstand y_s des Schwerpunktes S der Gewichte dw ergibt sich zu

$$y_s = \frac{\int y' dw}{\int dw} = \frac{f\int (l_1 - x)^2 \left[1 - (1-n)\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2}\right] dx}{l_1^2 \int \left[1 - (1-n)\frac{(l_1 - x)^2}{l_1^2}\right] dx} = \frac{3n+2}{5(n+2)} f \quad (36)$$

Die Gleichung zeigt, wie der Punkt S mit abnehmendem Verhältnis n in die Höhe reicht, um für $n = 0$ die höchste Lage $y_s = {}^1/_5 f$ zu erreichen. Für $n = 1$ folgt $y_s = {}^1/_3 f$.

Die Gleichung der Bogenachse, bezogen auf das Koordinatensystem x, y, ist

$$y = y_s - y' = \frac{3n+2}{5(n+2)} f - \frac{f}{l_1^2}(l_1 - x)^2.$$

[1]) Der Name „Bogenkraft", der von Prof. Mehrtens eingeführt wurde (vergl. dessen Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen), paßt für die durch Gleichung (7a) definierte Kraft besser, als der in der Literatur meist gebrauchte „Horizontalschub", schon deshalb, weil bei unsymmetrischen Bogen diese Kraft gar nicht horizontal wirkt. Die Bezeichnung empfiehlt sich aber namentlich, weil sie stets an die Definition des Bogenträgers erinnert, die aus dem eingespannten Balken eben durch Hinzutreten der „Bogenkraft" entsteht. Bei schiefer Belastung übt ja auch ein Balkenträger auf das feste Auflager einen Horizontalschub aus, der aber keine „Bogenkraft" im Sinne der Gleichung (7a) darstellt.

Die Bogenkraft folgt aus Gleichung (21) zu

$$H = \frac{-\Sigma P\delta'}{\int y^2\,dw + \frac{l}{EF_s}} = \frac{-\Sigma P\delta'}{\int y^2\,dw\,(1+\mu)}, \qquad \mu = \frac{l}{EF_s \int y^2\,dw}.$$

Für den Nenner ergibt sich

$$\int y^2 dw\,(1+\mu) = f^2 \int \left[\frac{3n+2}{5(n+2)} - \frac{(l_1-x)^2}{l_1^2}\right]^2 \left[1-(1-n)\frac{(l_1-x)^2}{l_1^2}\right] dx\cdot(1+\mu)$$

$$= \frac{4}{175}\cdot\frac{n^2+8n+\frac{8}{3}}{(n+2)EJ_s} f^2 l\,(1+\mu).$$

Zur Berechnung des Zählers dient die Differentialgleichung (14)

$$-\frac{d^2\delta'}{dx^2} = \frac{y}{EJ\cos\varphi} = \frac{y}{EJ_s}\left[1-(1-n)\frac{(l_1-x)^2}{l_1^2}\right].$$

Setzt man für y den oben angegebenen Wert ein, so folgt nach zweimaliger Integration

$$-EJ_s\cdot\delta' = \frac{n(n+4)}{5(n+2)}\,\frac{x^2x'^2}{l^2}\,f + \frac{8(1-n)}{15}\,\frac{x^3x^3}{l^4}\,f.$$

Die Integrationskonstanten sind gleich Null, weil für $x=0$ sowohl δ' als auch $\frac{d\delta'}{dx}$ verschwinden müssen; die Lage des Punktes S wurde in Nr. 8 an diese Forderung geknüpft.

Die Bogenkraft ergibt sich jetzt zu

$$H = \frac{-\Sigma P\delta'}{\int y^2 dw\,(1+\mu)}$$

$$= \Sigma P \frac{3n(n+4)x^2x'^2 + 8(1-n)(n+2)\frac{x^3x'^3}{l^2}}{\frac{12}{35}\left(n^2+8n+\frac{8}{3}\right) f l^3 (1+\mu)} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

darin ist

$$\mu = \frac{l}{EF_s\int y^2 dw} = \frac{175(n+2)}{4\left(n^2+8n+\frac{8}{3}\right)}\,\frac{J_s}{F_s f^2},$$

wofür mit großer Genauigkeit etwas einfacher

$$\mu = \frac{56}{3n+2}\cdot\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

gesetzt werden kann; i_s bezeichnet den Trägheitsradius des Scheitelquerschnitts. Das Glied μ berücksichtigt die Verkürzung der Bogenachse durch

die Normalkräfte; es tritt, wie ersichtlich, besonders bei flachen und reichlich dimensionierten Gewölben hervor.

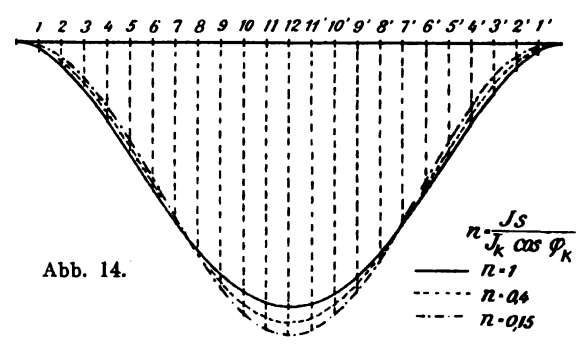


Abb. 14.

Wir geben nachstehend eine Tabelle, welche die Anwendung der Gleichung (37) sehr erleichtert. Sie enthält die nach Gleichung (37) berechneten Einflußlinien der Bogenkraft, bezw. die Werte $H\frac{f(1+\mu)}{l}$ für $P = 1$ und $n = 1$ bis 0,15. In Abb. 14 sind die Einflußlinien für $n = 1$, 0,5 und 0,25 aufgetragen.

Tabelle der Werte $H\frac{f}{l}(1+\mu)$ für $P = 1$ (Einflußlinien),

berechnet nach Gleichung (37), vergl. Abb. 14.

Ordinate Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n												
1,0	0,0060	0,0219	0,0449	0,0723	0,1020	0,1318	0,1601	0,1852	0,2060	0,2215	0,2311	0,2344
0,8	0,0056	0,0208	0,0432	0,0704	0,1002	0,1306	0,1595	0,1857	0,2075	0,2238	0,2339	0,2374
0,7	0,0054	0,0201	0,0421	0,0692	0,0991	0,1298	0,1593	0,1860	0,2084	0,2252	0,2356	0,2392
0,6	0,0051	0,0194	0,0410	0 0678	0,0978	0,1289	0,1590	0,1864	0,2094	0,2268	0,2376	0,2413
0,5	0,0048	0,0185	0,0396	0,0662	0,0963	0,1279	0,1587	0,1869	0,2103	0,2288	0,2399	0,2438
0,4	0,0044	0,0174	0,0379	0,0641	0,0945	0,1266	0,1583	0,1875	0,2122	0,2310	0,2428	0,2468
0,3	0,0040	0,0160	0,0357	0,0617	0,0922	0,1250	0,1577	0,1880	0,2140	0,2339	0,2464	0,2506
0,25	0,0037	0,0152	0,0344	0,0602	0,0909	0,1240	0,1573	0,1885	0,2152	0,2357	0,2486	0,2530
0,2	0,0033	0,0142	0,0329	0,0585	0,0892	0,1229	0,1569	0,1889	0,2166	0,2377	0,2511	0,2557
0,15	0,0029	0,0131	0,0311	0,0564	0,0873	0,1215	0,1565	0,1892	0,2181	0,2401	0,2541	0,2588

15. Der Einfluß der Bogenform auf die Bogenkraft.

In der Praxis wird die Gewölbeachse in der Regel einer Stützlinie für das Eigengewicht der Brücke angepaßt[1]). Das Eigengewicht, bezogen auf die Längeneinheit, sei mit g bezeichnet. Trägt man g von einer Horizontalen in irgend einem Maßstabe auf, so erhält man die zur Stützlinie gehörige „Belastungslinie" (Abb. 15), die im

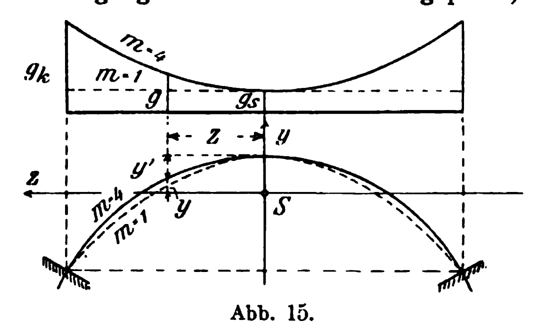


Abb. 15.

[1]) E. Mörsch, „Berechnung von eingespannten Gewölben", Schweizer. Bauzeitung 1906, Bd. 47, S. 98.

Scheitel eine wagerechte Tangente besitzt und wegen der Zunahme der Gewölbestärke und der Aufbauhöhe gegen die Kämpfer ansteigt. Die Stützlinie ist daher keine gewöhnliche Parabel, sondern etwas mehr ausgebaucht; sie nähert sich der Kreisform oder der kubischen Parabel. Es soll nun im folgenden der Einfluß der Bogenform auf die Bogenkraft näher untersucht werden, um einen Anhalt für den Fehler zu bekommen, den man begeht, wenn man die Gleichung (37) auch auf Stützliniengewölbe anwendet.

Dem Zwecke dieser Untersuchung entsprechend, wird es ziemlich gleichgültig sein, wie groß das Verhältnis n gewählt wird. Wir setzen der Einfachheit halber $n = 1$, betrachten also ein Gewölbe, dessen Querschnitte gegen die Kämpfer nur wenig wachsen. Für die Belastungslinie nehmen wir eine gewöhnliche Parabel an. g_s und g_k seien die speziellen Werte von g im Scheitel und Kämpfer; dann ist an irgend einer Stelle $z = l_1 - x$

$$g = g_s + \frac{g_k - g_s}{l_1^2} z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Die Gleichung der diesem Belastungsgesetze entsprechenden, mit der Polweite H_s gezeichneten Stützlinie ergibt sich nach einer bekannten Beziehung durch zweimalige Integration der Differentialgleichung

$$H_s \frac{d^2 y'}{dz^2} = g = g_s + \frac{g_k - g_s}{l_1^2} z^2.$$

Indem wir das Koordinatensystem wie in Abb. 15 legen, verschwinden die Integrationskonstanten, und wir erhalten

$$H_s \cdot y' = \frac{g_s}{2} z^2 + \frac{g_k - g_s}{12\, l_1^2} z^4.$$

Für $z = l_1$ ist $y' = f$, also

$$H_s = \frac{5\, g_s + g_k}{12\, f} l_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Gleichung der Stützlinie bezw. der Gewölbeachse lautet somit, wenn noch zur Abkürzung das Verhältnis $\frac{g_k}{g_s} = m$ gesetzt wird,

$$y' = \frac{f}{m+5}\left[6\left(\frac{z}{l_1}\right)^2 + (m-1)\left(\frac{z}{l_1}\right)^4\right] \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Der Abstand y_s der Angriffslinie der Bogenkraft läßt sich mit $J \cos \varphi =$ konstant zu

$$y_s = \frac{\int y' dw}{\int dw} = \frac{1}{l} \int y' dz$$

anschreiben, d. h. die Bogenkraft wirkt in der Geraden, welche die zwischen ihr und der Gewölbeachse liegenden Flächen ausgleicht. Wird für y' der obenstehende Ausdruck eingesetzt, so folgt

$$y_s = \frac{f}{(m+5)\, l} \int \left[6\left(\frac{z}{l_1}\right)^2 + (m-1)\left(\frac{z}{l_1}\right)^4\right] dz = \frac{m+9}{5\,(m+5)} f, \text{ wo } m = \frac{g_k}{g_s}.$$

Die Gleichung der Gewölbeachse, bezogen auf das Koordinatensystem y, z, heißt

$$y = y_s - y' = \frac{f}{m+5}\left[\frac{m+9}{5} - 6\left(\frac{z}{l_1}\right)^2 - (m-1)\left(\frac{z}{l_1}\right)^4\right].$$

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich jetzt die Gleichung der Bogenkraft

$$H = \frac{-\Sigma P\delta'}{\int y^2 dw\,(1+\mu)}, \text{ wo } \mu = \frac{l}{EF_s \int y^2\,dw},$$

leicht auf geschlossene Form bringen. Der Nenner wird

$$\int y^2 dw\,(1+\mu) = \frac{1}{EJ_s}\int y^2 dz\,(1+\mu)$$

$$= \frac{f^2}{EJ_s(m+5)^2}\int\left[\frac{m+9}{5} - 6\left(\frac{z}{l_1}\right)^2 - (m-1)\left(\frac{z}{l_1}\right)^4\right]^2 dz\,(1+\mu)$$

$$= \frac{16\,(7\,m^2 + 76\,m + 232)}{1575\,(m+5)^2\,EJ_s}\,f^2 l\,(1+\mu),$$

worin

$$\mu = \frac{1575\,(m+5)^2}{16\,(7\,m^2 + 76\,m + 232)}\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Der Zähler δ' folgt aus der Differentialgleichung der elastischen Linie infolge $H = 1$, also aus

$$-\frac{d^2\delta'}{dz^2} = \frac{y}{EJ_s}.$$

Führt man für y den oben angegebenen Ausdruck ein, so ergibt sich nach zweimaliger Integration

$$\delta' = \frac{(2\,m+13)\,l_1^6 - 3\,(m+9)\,l_1^4 z^2 + 15\,l_1^2 z^4 + (m-1)\,z^6}{30\,(m+5)\,l_1^4}\,f.$$

Von den Integrationskonstanten verschwindet die erste, während die zweite aus der Erwägung, daß für $z = l_1$, $\delta' = 0$ wird, leicht zu ermitteln ist. Die Bogenkraft lautet jetzt

$$H = \Sigma P\,\frac{(2\,m+13)\,l_1^6 - 3\,(m+9)\,l_1^4 z^2 + 15\,l_1^2 z^4 + (m-1)\,z^6}{\dfrac{64\,(7\,m^2 + 76\,m + 232)}{105\,(m+5)}\,f l_1^5\,(1+\mu)}; \quad (43)$$

für μ gilt Gleichung (42).

Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich nun der Einfluß der Bogenform auf die Bogenkraft leicht überblicken, indem man das Verhältnis $m = \frac{g_k}{g_s}$ variieren läßt. In den Fällen der Praxis liegt m wohl stets zwischen 1 und 4; der letztere Wert wird nur selten bei Brücken mit Hinterfüllung etwa erreicht.

Zunächst möge der Einfluß der Bogenform auf das Glied μ gezeigt werden. Die Berechnung nach Gleichung (42) ergibt für

$$m = \quad 1 \qquad 2 \qquad 4$$

$$\mu\left(\frac{f}{i_s}\right)^2 = 11{,}25 \qquad 11{,}71 \qquad 12{,}30.$$

Wie man sieht, hängt μ von m nur sehr schwach ab; selbst für den extremen Fall $m = 4$ wird μ kaum 10 vH. höher als für $m = 1$. Zieht man noch die untergeordnete Rolle dieses Gliedes in Betracht, so hat man sich überzeugt, daß zur Berechnung von μ stets $m = 1$ gesetzt, also Gleichung (38) benutzt werden darf.

Der Einfluß der Bogenform auf die Bogenkraft geht aus nachstehender Tabelle hervor, in welcher die um je $^1/_8$ der Spannweite abstehenden, nach Gleichung (43) berechneten Einflußordinaten für $m = 1$, 2 und 4 zusammengestellt sind. Abb. 16 enthält die graphische Darstellung.

Ordinate Nr.	m	1	2	3	4
$H \frac{f(1+\mu)}{l} =$	1	0,0449	0,1318	0,2060	0,2344
	2	0,0468	0,1352	0,2090	0,2369
	4	0,0495	0,1394	0,2143	0,2393

Aus der Tabelle und der Abb. 16 erhellt die wichtige Erkenntnis, daß der Einfluß der Bogenform auf die Größe der Bogenkraft nur ganz unbedeutend ist; er äußert sich in der Weise, daß mit wachsendem m die Einflußfläche etwas vergrößert wird. Man darf also in den Fällen der Praxis $(1 < m < 4)$ stets $m = 1$ setzen, auch dann, wenn die Gewölbeachse nicht parabolisch, sondern als Stützlinie für Eigengewicht gewählt wurde; selbst in dem extremen Fall $m = 4$ ändert sich dadurch die Rechnung nur um wenige Prozente.

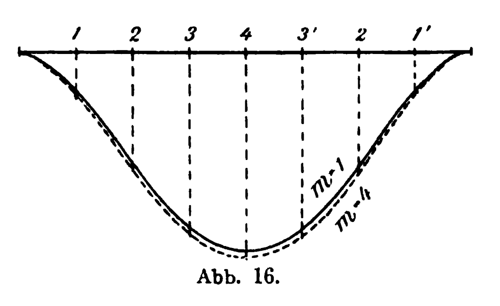


Abb. 16.

Die Gleichungen (37) und (38) sind also in allen Fällen anwendbar.

16. Die Lage der Bogenkraft.

Sie ist von der Bogenform wesentlich abhängig und wird am besten nach folgendem Verfahren bestimmt.

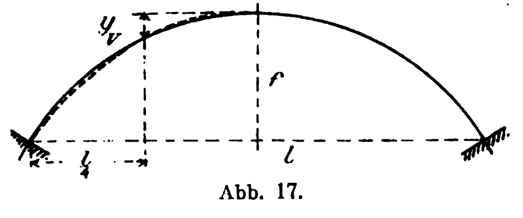


Abb. 17.

Man ersetzt die Gewölbeachse durch eine Kurve der Gleichung (41), die jene im Scheitel, Kämpfer und Gewölbeviertel schneidet (Abb. 17). Für die gemeinsame Ordinate y_v im Gewölbeviertel liefert dann Gleichung (41)

$$y_v = \frac{f}{m+5}\left[6\,\frac{\left(\frac{l_1}{2}\right)^2}{l_1^2} + (m-1)\,\frac{\left(\frac{l_1}{2}\right)^4}{l_1^4}\right] = \frac{m+23}{16\,(m+5)}\,f,$$

woraus

$$m = \frac{23\,f - 80\,y_v}{16\,y_v - f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

Nun läßt sich der Abstand der Bogenkraft vom Scheitel leicht ermitteln, Es ist nach Gleichung (29)

$$EJ_s \int dw = \int \left[1 - (1-n)\frac{z^2}{l_1^2}\right] dz = \frac{n+2}{3}\, l,$$

$$EJ_s \int y' dw = \frac{f}{m+5} \int \left[6\,\frac{z^2}{l_1^2} + (m-1)\,\frac{z^4}{l_1^4}\right]\left[1 - (1-u)\,\frac{z^2}{l_1^2}\right] dz$$

$$= \frac{2\,m + 26 + n\,(5\,m+37)}{35\,(m+5)}\, fl;$$

und daraus

$$y_s = \frac{\int y' dw}{\int dw} = \frac{2\,m + 26 + n\,(5\,m+37)}{\frac{35}{3}\,(m+5)\,(n+2)}\, f \quad . \quad . \quad (45)$$

Diese Formel liefert die Lage der Bogenkraft mit großer Genauigkeit. Die Abweichung der Gewölbeachse von der supponierten Kurve (41) ist nämlich naturgemäß äußerst gering; zudem liegen die eingeschlossenen Flächen, wie es Abb. 17 zeigt, auf verschiedenen Seiten der Gewölbeachse, so daß sie für die Lage des Schwerpunktes der Gewichte dw kaum in Betracht kommen.

17. Berechnung der Einflußlinien für die Kernpunktsmomente.

Die Ermittlung der Beanspruchungen von der Verkehrslast erfolgt zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinien für die Kernpunktmomente. Nach dem bereits auf Seite 2 Gesagten erhält man das Moment in bezug auf irgend einen Kernpunkt K, indem man zum Balkenmoment M_x' das Bogenmoment $H \cdot y_k$ algebraisch addiert. Rechnet man die Momente wie üblich rechtsdrehend als positiv, so ist

$$M_x = M_x' - H \cdot y_k.$$

Die Balkenmomente ergeben sich nach Bestimmung der Fixpunkte mittels der Tabelle auf Seite 15. Die Einflußlinie der Bogenkraft wird der Tabelle auf Seite 18 entnommen, wobei man μ vernachlässigt. In praktischen Fällen ist nämlich stets $m > 1$; die Tabelle gibt daher, wie die Untersuchung in Nr. 15 lehrte, für H etwas weniges zu kleine Werte; wenn man μ vernachlässigt, so gleicht sich der Fehler wieder teilweise aus.

Zur Erläuterung des Verfahrens wird in Nr. 20 ein Zahlenbeispiel vorgeführt werden.

18. Die Beanspruchungen vom Eigengewicht.

Wie bereits erwähnt, wird in der Praxis die Gewölbeachse meist einer Stützlinie für das Eigengewicht der Brücke angepaßt. Zunächst erscheint es fraglich, ob diese Stützlinie wirklich die günstigste ist. Beim Dreigelenkbogen fällt die günstigste Bogenachse näherungsweise mit einer für das Eigengewicht + der halben, gleichmäßig verteilten Verkehrsbelastung $\left(g + \frac{p}{2}\right)$ zusammen, und es ist wohl möglich, daß eine derartige Be-

stimmung beim eingespannten Bogen für die Schnitte in der Nähe des Gewölbeviertels vorteilhafter sein würde. Dem ist jedoch entgegenzuhalten, daß beim eingespannten Bogen nur die Randspannungen im Scheitel und Kämpfer den zulässigen Betrag erreichen, weil dort die Beanspruchungen infolge der Verkürzung der Gewölbeachse durch die Normalkräfte und infolge von Temperaturschwankungen weitaus am größten sind. Im Gewölbeviertel läßt sich das Material fast nie ausnutzen, es wäre denn, daß man das Gewölbe nach Art der Abb. 18 dimensionieren wollte, was aber aus Schönheitsrücksichten niemand tun wird. Es hat deshalb nicht viel Zweck, lange nach der günstigsten Gewölbeform zu suchen, um so weniger, als gerade die Wärmespannungen hiervon nahezu unabhängig sind. Aus diesen Gründen erscheint dem Verfasser die oben erwähnte Formgebung wohl gerechtfertigt.

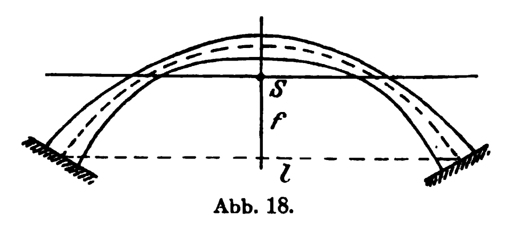


Abb. 18.

Wird ein nach der Stützlinie für Eigengewicht geformtes Gewölbe ausgerüstet, so senkt sich seine Achse ein wenig, da sie durch die Normalkräfte verkürzt wird; die Tangenten an den Kämpfern behalten jedoch wegen der Einspannung ihre Lage bei. Die Folge davon ist, daß die ursprüngliche Krümmung der Achse in der Nähe des Scheitels verkleinert, in der Nähe des Kämpfers vergrößert wird, daß also die „Drucklinie" nahe am Scheitel nach oben, nahe am Kämpfer nach unten ausschlägt (Abb. 19). Vernachlässigt man den Einfluß der Verkürzung der Bogenachse, so liegt kein Grund für irgend welche Abweichung der Stützlinie vor, es ist alsdann in jedem Querschnitt eine gleichmäßige Kraftverteilung zu erwarten.

Die Bogenkraft eines Gewölbes, dessen Achse als Stützlinie mit der Poldistanz H_s gezeichnet wurde, ist danach gleich H_s oder gleich $\frac{H_s}{1+\mu}$, je nachdem man den Einfluß der Verkürzung der Bogenachse vernachlässigt oder berücksichtigt. Die Balkenmomente sind von μ unabhängig; die Abweichungen der Drucklinie von der Gewölbeachse können also nur herrühren von der in der Angriffslinie der Bogenkraft wirkenden Kraftdifferenz

$$\varDelta H = \frac{H_s}{1+\mu} - H_s = -\frac{\mu}{1+\mu} H_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Indem man die von dieser Kraft erzeugten Randspannungen zu den gleichmäßig verteilten addiert, erhält man die totalen Beanspruchungen vom Eigengewicht; es ist

$$\sigma = \frac{H_s}{F \cos \varphi} \pm \frac{\varDelta H \cdot y_k}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Man kann Gleichung (46) noch etwas vereinfachen, indem μ als sehr kleines Glied im Nenner gegen 1 vernachlässigt werden darf. Mit Beachtung der Gleichung (38) ergibt sich dann

$$\varDelta H = -\frac{56}{3n+2}\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \cdot H_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

Je flacher und stärker das Gewölbe ist, desto größer wird der Einfluß der Verkürzung der Bogenachse.

Es möge noch in Kürze der Verlauf der Drucklinie dargelegt werden. Für irgend einen Querschnitt ist das Schwerpunktmoment

$$M = -y\varDelta H = \frac{\mu}{1+\mu}\, y \cdot H_s.$$

Die lotrecht gemessene Entfernung der Drucklinie von der Gewölbeachse (Abb. 19) beträgt also

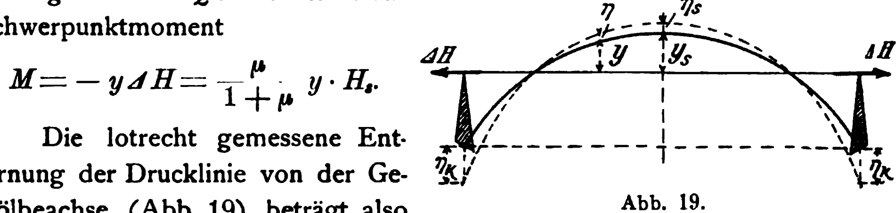


Abb. 19.

$$\eta = \frac{M(1+\mu)}{H_s} = \mu \cdot y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

Die Exzentrizität im Scheitel ist

$$\eta_s = \frac{56}{3n+2}\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \cdot y_s,$$

diejenige im Kämpfer

$$\eta_k = -\frac{56}{3n+2}\left(\frac{i_s}{f}\right)^2 \cdot t.$$

Die Drucklinie läßt sich danach leicht aufzeichnen; sie schneidet natürlich die Bogenachse in Höhe der Angriffslinie der Bogenkraft.

19. Wärme- und Schwindspannungen.

Eine gleichmäßige Temperaturänderung um $\pm t^0$ erzeugt nach Gleichung (22) die Bogenkraft

$$H_t = \frac{\alpha t^0 l}{\int y^2 dw\,(1+\mu)} = \frac{\mu}{1+\mu}\, E\alpha t^0 F_s \quad . \; . \; . \quad (50)$$

α ist darin der Wärmeausdehnungskoeffizient, der für Stein und Beton etwa gleich 0,000012 gesetzt werden kann. Vernachlässigt man im Nenner von Gleichung (50) das kleine Glied μ, so folgt mit Beachtung von Gleichung (38) einfacher

$$H_t = \frac{56}{3n+2}\,\frac{E\alpha t^0 J_s}{f^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Man erkennt: Je flacher und steifer das Gewölbe ist, desto größer ist der Einfluß von Wärmeschwankungen.

Obige Gleichungen können auch benutzt werden, um bei Betongewölben die Spannungen infolge des Schwindens des Betons zu berechnen; man

hat nur statt αt^0 das spezifische Schwindmaß einzuführen. Für dieses wird der Wert 0,00025 angegeben,[1]) was einer Temperaturerniedrigung von

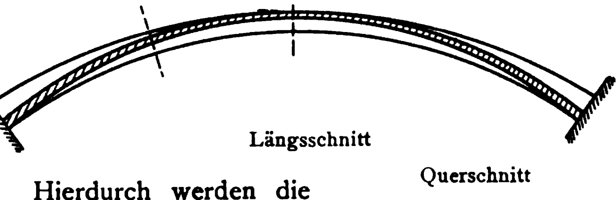
$$t^0 = \frac{0{,}00025}{0{,}000012} = \backsim 20^\circ$$

entspräche. Dem Schwinden des Betons ist danach eine große Bedeutung beizumessen. In der Tat hat man bei neueren Betonbrücken, um zugleich der Schwinderscheinung Rechnung zu tragen, eine Temperaturerhöhung von 10° bis 15°, dagegen eine Temperaturerniedrigung von 25° bis 35° (von der mittleren Jahrestemperatur aus gerechnet) in Rechnung gezogen. Im Prinzip erscheint dieses Vorgehen sehr berechtigt, immerhin überschätzen obige Zahlen jedenfalls die Schwinderscheinung beträchtlich. Man darf nicht vergessen, daß der größte Teil des Schwindmaßes kurz nach dem Abbinden des Betons entsteht; da nun die Betongewölbe in einzelnen Lamellen betoniert werden, die für sich abbinden, so erzeugt nur ein kleiner Teil des Schwindmaßes wirklich Spannungen.

Verfasser ist der Ansicht, daß in unserem Klima durch + 10° und — 20° den Wärme- und Schwindspannungen reichlich Rechnung getragen wird.

Bei flachgespannten Brückengewölben erreichen die Wärmespannungen hohe Beträge und erzeugen im Verein mit den Beanspruchungen vom Eigengewicht und von der Verkehrslast Zugspannungen, die eine Eiseneinlage notwendig machen. Für Gewölbe vom Pfeilverhältnis $^1/_8$ und darunter kommt der Eisenbeton als einziges Baumaterial in Frage. Gegenteilige Ausführungen kommen vor; sie wurden eben dadurch ermöglicht, daß die Berechnung mangelhaft durchgeführt wurde.

Zu einer für flachgespannte Eisenbetongewölbe höchst vorteilhaften Konstruktion gelangt man, wenn man das Gewölbe als Plattenbalken ausbildet und die Platte, entsprechend den Biegungsmomenten einer Temperaturerniedrigung, zwischen den Rippen nach Art der Abb. 20 variieren läßt. Hierdurch werden die Druckspannungen im Vergleich zum Rechteckquerschnitt bedeutend erniedrigt, weil die Nullinie gegen die Druckseite verschoben wird; der Bogen wird auch leichter und erzeugt eine kleinere Bogenkraft, so daß auch an den Widerlagern gespart werden kann. Die Konstruktion scheint bisher nur in Frankreich wiederholt angewendet worden zu sein; in der Literatur



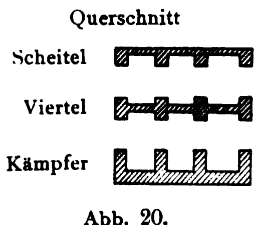


Abb. 20.

[1]) Büsing und Schumann, Der Portlandzement und seine Anwendung im Bauwesen, 3. Aufl. 1905, S. 30.

hat zuerst Prof. E. Mörsch auf ihre Vorzüge hingewiesen.[1]) In Deutschland ist sie bei den drei Hauptöffnungen der neuen, vom Verfasser im Dienste der Firma Ed. Züblin & Cie. berechneten Eisenbetonbogenbrücke über die Mosel bei Novéant-Metz (Lichtweiten 47, 40 und 33 m) zur Ausführung gelangt; dem Vernehmen nach ist dies das einzige Beispiel.

Früher war man allgemein der Ansicht, daß der Sicherheitsgrad einer gewölbten Brücke proportional der Gewölbestärke sei und dimensionierte deshalb die Gewölbe sehr kräftig. Gegenwärtig bricht sich die Erkenntnis Bahn, daß diese älteren Brücken gerade wegen ihrer Steifigkeit den hohen Sicherheitsgrad nicht besitzen, den ihre Erbauer zu geben glaubten. Die schlanken Eisenbetonbrücken der neuesten Zeit bieten deshalb eine hohe Sicherheit, weil sie infolge ihrer Biegsamkeit die durch Wärmeschwankungen und kleine Verschiebungen der Widerlager bedingten Deformationen leicht ertragen können.

20. Beispiel.

Für die in Abb. 21a skizzierte gewölbte Straßenbrücke sind die Grenzwerte der Randspannungen zu bestimmen. Spannweite $l = 40$ m, Pfeilhöhe $f = 5$ m, Pfeilverhältnis $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$. Als Verkehrsbelastung ist eine Dampfwalze von 23 t Dienstgewicht (10 t + 2 · 6,5 t, Radstand 3 m) vorgeschrieben. Ferner soll eine Wärmeschwankung von ± 20° in Rechnung gestellt werden.

Die Gewölbestärke ist auf Grund einiger rasch gezeichneter Stützlinien vorläufig im Scheitel zu 0,60 m, im Gewölbeviertel zu 0,70 m und im Kämpfer zu 1,00 m festgesetzt worden.

a) Die genaue Formgebung der Gewölbeachse

als Stützlinie vom Eigengewicht wird hier nicht vorgeführt, da sie nichts Neues bietet. Die Poldistanz der Stützlinie wurde analytisch zu $H_s = 480$ t gefunden. Ferner ergab sich im Gewölbeviertel $\cos\varphi = 0,96$ und im Kämpfer $\cos\varphi_k = 0,86$. Das Verhältnis n beträgt daher

$$n = \frac{J_s}{J_k \cos\varphi_k} = \frac{0,60^3}{1,00^3 \cdot 0,86} = 0,25.$$

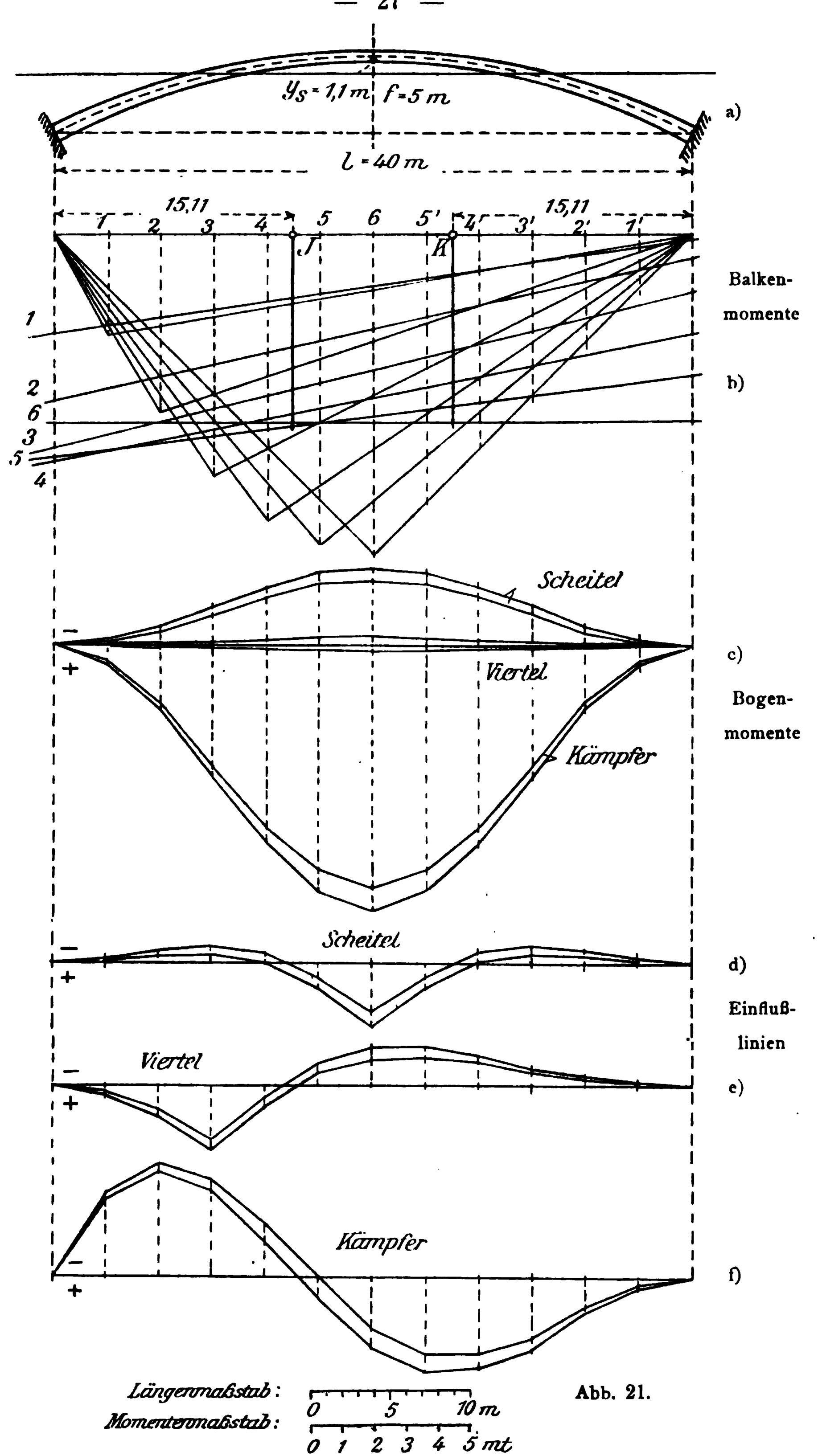
b) Die Lage der Bogenkraft.

Wir benutzen das in Nr. 16 angegebene Verfahren. Die Ordinate der Gewölbeachse im Viertel der Spannweite wurde zu $y_v = 1,06$ m gemessen. Nach Gleichung (44) ergibt sich der Parameter m zu

$$m = \frac{23f - 80y_v}{16y_v - f} = \frac{23 \cdot 5 - 80 \cdot 1,06}{16 \cdot 1,06 - 5} = 2,52 \text{ m}.$$

Die Angriffslinie der Bogenkraft hat daher nach Gleichung (45) vom Scheitel den Abstand

[1]) E. Mörsch, Der Eisenbetonbau, 3. Aufl., S. 302.



$y_s = 1,1\,m$ $f = 5\,m$
a)
$l = 40\,m$
15,11
15,11
1 2 3 4 5 6 5' 4' 3' 2' 1'
J
K
Balken-
momente
b)
Scheitel
c)
Viertel
Bogen-
momente
Kämpfer
Scheitel
d)
Einfluß-
linien
Viertel
e)
Kämpfer
f)
Längenmaßstab:
0 5 10 m
Momentenmaßstab:
0 1 2 3 4 5 mt

Abb. 21.

$$y_s = \frac{2m + 26 + n(5m + 37)}{\frac{35}{3}(m + 5)(n + 2)} \cdot f$$

$$= \frac{2 \cdot 2{,}52 + 26 + 0{,}25(5 \cdot 2{,}52 + 37)}{\frac{35}{3}(2{,}52 + 5)(0{,}25 + 2)} \cdot 5$$

$$y_s = 1{,}10 \text{ m}.$$

Die Ordinaten der Kernpunkte können aus der Zeichnung gemessen werden. Genauer ist die Berechnung nach der Formel

$$y_k = y \pm \frac{k}{\cos\varphi},$$

wo y die Schwerpunktordinate und k den Kernradius bezeichnen. Die sehr einfache Berechnung wird hier übergangen; es ergaben sich die in den Tabellen auf Seite 30 enthaltenen Werte.

Zu beachten ist, daß die Schnitte im Gewölbeviertel und Kämpfer vertikal gelegt sind. y_{ko} und y_{ku} gehören also streng genommen nicht zum gleichen Querschnitt, was aber nichts zu sagen hat.

c) Eigengewichts- und Wärmespannungen.

Die Kraftdifferenz $\varDelta H$ ist nach Gleichung (48)

$$\varDelta H = -\frac{56}{3n + 2} \frac{i_s^2}{f^2} \cdot H_s = -\frac{56 \cdot 0{,}60^2}{(3 \cdot 0{,}25 + 2) \cdot 12 \cdot 5^2} \cdot 480 = -11{,}7 \text{ t}.$$

Die Bogenkraft einer gleichmäßigen Temperaturänderung von $\pm 20^\circ$ folgt aus Gleichung (51) zu

$$H_t = \pm \frac{56 E \alpha t^0 J_s}{(3n + 2) f^2} = \pm \frac{56 \cdot 2100000 \cdot 0{,}000012 \cdot 20^\circ \cdot 5 \cdot 0{,}60^3}{(3 \cdot 0{,}25 + 2) \cdot 5^2 \cdot 12} = \pm 37{,}0 \text{ t}.$$

Die Berechnung der Randspannungen ist auf Seite 30 tabellarisch durchgeführt; eine Erläuterung ist wohl nicht nötig.

d) Die Beanspruchungen der Verkehrslast

ergeben sich mit Hilfe der Einflußlinien für die Kernpunktmomente, die nach dem in Nr. 17 Gesagten ermittelt werden. Der Abstand der Fixpunkte von den Auflagerlotrechten beträgt nach Gleichung (31)

$$a = \frac{n + 4}{5(n + 2)} l = \frac{0{,}25 + 4}{5(0{,}25 + 2)} \cdot 40$$

$$a = 15{,}11 \text{ m}, \quad \frac{a}{l} = 0{,}378.$$

In Abb. 21b sind zunächst die einfachen Momentenflächen für die wandernde Einzellast $P = 1$ gezeichnet worden, der Symmetrie wegen nur für die eine Bogenhälfte. Die Momentenflächen für den beiderseitig eingespannten Balken erhält man, indem man die Schlußlinien um die Ordinaten A und B senkt. In untenstehender Tabelle I sind A und B nach Gleichung (33) berechnet und hiernach die Schlußlinien aufgezeichnet worden. Die Einfluß-

linien für die Balkenmomente im Scheitel, Viertel und Kämpfer ergeben sich jetzt in bekannter Weise, indem man alle in den betreffenden Schnitten liegenden Ordinaten unter den zugehörigen Lastpunkten aufträgt, genau wie es beim kontinuierlichen Balken gemacht wird. Da diese Einflußlinien direkt nicht gebraucht werden, sind sie nicht aufgetragen.

Die Einflußlinie der Bogenkraft H folgt aus der Tabelle auf Seite 18. Die Werte für $n = 0,25$ sind mit $\frac{l}{f} = \frac{40}{5} = 8$ zu multiplizieren. μ kann vernachlässigt werden, vergl. die Bemerkung auf Seite 22. Durch Multiplikation mit den Kernpunktordinaten ergeben sich die Einflußlinien der Bogenmomente (Abb. 21c).

Nun ist $$M_k = M_x' - H y_k,$$
d. h. man hat von der Einflußordinate des Balkenmoments (die leicht aus Abb. 21b erhältlich ist), diejenige des Bogenmoments zu subtrahieren, um die Einflußordinate für das Kernpunktmoment zu erhalten. Diese Subtraktion wird am besten mit dem Zirkel gemacht; man findet so die Linienzüge, Abb. 21d, e, f.

Nachstehende Tabelle I enthält die Berechnung der Ordinaten A und B, der Bogenkraft und der Bogenmomente.

Tabelle I.

Ordinaten A, B; Bogenkraft und Bogenmomente. Einheiten m und t.

Lastpunkt	1	2	3	4	5	6
$-\frac{A}{a}$	0,128	0,237	0,318	0,370	0,393	0,387
$-\frac{B}{a}$	0,083	0,164	0,240	0,305	0,356	0,387
$-A$	1,934	3,581	4,805	5,591	5,938	5,848
$-B$	1,254	2,478	3,626	4,609	5,379	5,848
$H\frac{f}{l}$	0,0152	0,0602	0,1240	0,1885	0,2357	0,2530
H	0,122	0,482	0,992	1,508	1,886	2,024
Scheitel						
$H \cdot 1{,}20$	0,146	0,578	1,190	1,810	2,263	2,429
$H \cdot 1{,}00$	0,122	0,482	0,992	1,508	1,886	2,024
Viertel						
$H \cdot 0{,}16$	0,020	0,077	0,159	0,242	0,302	0,324
$-H \cdot 0{,}08$	0,010	0,039	0,079	0,121	0,151	0,162
Kämpfer						
$-H \cdot 3{,}71$	0,452	1,788	3,680	5,595	6,097	7,509
$-H \cdot 4{,}09$	0,499	1,971	4,057	6,168	7,714	8,278

Tabelle II.

Berechnung der Randspannungen von Eigengewicht, Verkehrslast und Wärmeschwankung ± 20°. Einheiten m u. t (Spannungen also t/m²).

	Scheitel	Viertel	Kämpfer	
$(b = 5\ m)\ h$	0,60	0,70	1,00	
$\cos\varphi$	1,00	0,96	0,86	
$F = bh$	3,00	3,50	5,00	
$W = \frac{bh^2}{6}$	0,300	0,408	0,833	
y_{ko}	1,20	0,16	— 3,71	
y_{ku}	1,00	— 0,08	— 4,09	
$\frac{H_s}{F\cos\varphi}$	160	143	112	$H_s = 480$ t
$\frac{\Delta H y_{ku}}{W}$	39	— 2	— 57	$\Delta H = -11{,}7$ t
$\frac{\Delta H y_{ko}}{W}$	47	5	— 52	
Eigengewicht				
σ_o	199	141	55	
σ_u	113	138	164	
Temperatur				
σ_o	± 123	± 7	± 182	$H_t = \pm 37$ t
σ_u	± 148	± 15	± 165	
Verkehrslast				
$+ M_{ku}$	34,4	37,3	68,0	aus den Einflußlinien
$- M_{ko}$	11,8	27,6	74,0	
$- M_{ku}$	6,9	18,4	68,6	
$+ M_{ko}$	25,8	31,4	55,4	
$+ \sigma_o$	115	91	82	t/m²
$+ \sigma_u$	39	68	89	
$- \sigma_o$	23	45	83	
$- \sigma_u$	86	77	67	
Grenzwerte				
max σ_o	437	239	319	+ = Druck
max σ_u	300	221	418	— = Zug
min σ_o	53	89	— 210	
min σ_u	— 123	46	— 68	t/m²

e) Grenzwerte der Spannungen.

Die Berechnung der Randspannungen ist in nebenstehender Tabelle II durchgeführt, die keiner Erläuterung bedarf. Als untere Grenzwerte ergeben sich Zugspannungen, die eine Armierung des Gewölbes notwendig machen.

21. Näherungsberechnung der Scheitelstärke.

Für Vorprojekte begnügt man sich mit der Untersuchung des Scheitelquerschnitts und läßt die Gewölbestärke gegen die Kämpfer ohne weitere Berechnung derart zunehmen, daß ihre Vertikalprojektion ungefähr gleich der Scheitelstärke ist. Die definitive Berechnung lehrt dann allerdings, daß nach diesem Vorgehen der Kämpferquerschnitt etwas zu schwach gewählt wurde, wenigstens bei flachen Gewölben; die erforderliche Verstärkung ist aber nicht beträchtlich und beschränkt sich auf die ganz nahe am Kämpfer liegenden Querschnitte, so daß das Verfahren zur Aufstellung von Kostenanschlägen vollständig ausreicht.

Die Poldistanz der Stützlinie vom Eigengewicht bestimmt man genau genug aus der Formel (Gleichung 40)

$$H_s = \frac{5g_s + g_k}{48f} l^2,$$

wobei nur g_s genau ermittelt zu werden braucht, während g_k zu 1,5 bis $3g_s$ geschätzt wird.

Zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen nimmt man die Gewölbeachse näherungsweise parabolisch an und setzt $n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k} = 1$. Dies ist für vorläufige Berechnungen immer zulässig, da der Einfluß der Veränderlichkeit des Querschnitts auf die Schnittkräfte nicht bedeutend ist. Die durch die Verkürzung der Achse bedingte Bogenkraft ergibt sich dann nach Gleichung (48) zu

$$\varDelta H = -\frac{56}{5} \frac{i_s^2}{f^2} H_s,$$

während die Wärmeänderung $\pm t^0$ gemäß Gleichung (51)

$$H_t = \frac{56}{5} \frac{E \alpha t^0 J_s}{f^2}$$

erzeugt. Die obere bezw. untere Randspannung von Eigengewicht und der Wärmewirkung ist

$$\sigma = \frac{H_s}{F_s} \mp \frac{\varDelta H + H_t}{W} y_k.$$

Statt der Kernpunktordinate y_k kann genügend genau die Schwerpunktordinate y_s eingeführt werden, für die Gleichung (45) $y_s = \frac{1}{3} f$ liefert. Ferner

setzen wir $\frac{56}{5} \approx 12$, $W = \frac{J}{e}$, (e = Schwerpunktsabstand der äußersten Faser) $\frac{H_s}{F_s} = \sigma_s$ = mittlere Spannung; obiger Ausdruck geht dann über in

$$\sigma = \sigma_s \pm \frac{4e}{f}(\sigma_s - E\alpha t^0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Die Verkehrslast sei gleichmäßig verteilt mit p für die Längeneinheit. Damit das größte positive Moment entsteht, muß sie sich, wie ein Blick auf die Einflußlinien in Abb. 21 d lehrt, ungefähr über das innere Drittel der Spannweite erstrecken. Zur Bestimmung der Lastscheiden sollte, streng genommen, von den Kernpunktmomenten ausgegangen werden; für unseren Zweck genügt es, den größten Wert des Schwerpunktmoments zu berechnen.

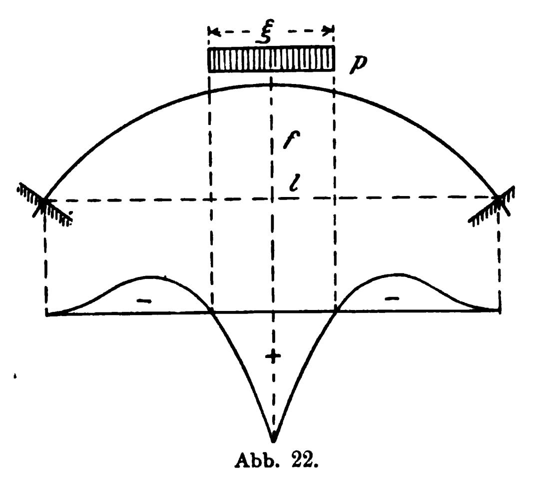


Abb. 22.

Die Verkehrslast liege auf der Strecke ξ symmetrisch zum Scheitel (Abb. 22). Wir berechnen zunächst das Moment für den beiderseitig eingespannten Balken. Da $n = 1$ ist, dürfen wir die bekannte Formel der Festigkeitslehre benutzen, nach der das Einspannmoment $M = -\frac{F}{l}$ ist, unter F den Inhalt der einfachen Momentenfläche verstanden. Für diesen findet man leicht

$$F = p\,\frac{\xi\,(l^2 - \xi^2)}{8} + p\,\frac{\xi^3}{12}.$$

Das Balkenmoment im Scheitel ist daher

$$M_s' = p\,\frac{\xi}{4}\left(l - \frac{\xi}{2}\right) - \frac{F}{l} = p\,\frac{\xi}{8}\left(l - \xi + \frac{\xi^2}{3l}\right).$$

Hiervon ist das Bogenmoment zu subtrahieren. Mit $n = 1$ und $\mu = 0$ liefert Gleichung (37) für die Einflußlinie der Bogenkraft

$$H = \frac{15\,x^2\,x'^2}{4\,f\,l^3};$$

die Verkehrslast p erzeugt also

$$H = \frac{15\,p}{4\,f\,l^3}\int\limits_{x=\frac{l-\xi}{2}}^{\frac{l+\xi}{2}} x^2\,(l-x)^2\,dx = \frac{p\,\xi}{64\,f\,l}\left(15\,l^2 - 10\,\xi^2 + 3\,\frac{\xi^4}{l^2}\right) \qquad (53)$$

Das Moment im Scheitel ist

$$M_s = M_s' - H y_s = \frac{p\xi}{8}\left(l - \xi + \frac{\xi^2}{3l}\right) - \frac{p\xi}{64 f l}\left(15 l^2 - 10\xi^2 + 3\frac{\xi^2}{l^2}\right)\frac{f}{3} \quad (54)$$

Der Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{d M_s}{d\xi} = 0 = 5\left(\frac{\xi}{l}\right)^4 - 18\left(\frac{\xi}{l}\right)^2 + 16\frac{\xi}{l} - 3.$$

Durch Probieren findet man leicht die gültige Wurzel $\frac{\xi}{l} = 0{,}265$. Setzt man sie in die Gleichungen (53) und (54) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \max M_s &= \frac{p l^2}{186} \\ H &= \frac{p l^2}{16{,}8 f} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Ist die Strecke ξ unbelastet, während die Außenstrecken die gleichmäßig verteilte Last p für eine Längeneinheit tragen, so entsteht das größte negative Moment, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \min M_s &= -\frac{p l^2}{186} \\ H &= \frac{p l^2}{8 f} - \frac{p l^2}{16{,}8 f} = \frac{p l^2}{15{,}3 f} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Obige höchst einfache Näherungsformeln leisten für eine erste Dimensionierung wertvolle Dienste; ihre Genauigkeit ist größer, als man anzunehmen geneigt ist und reicht zur Aufstellung von Vorprojekten und Kostenanschlägen vollständig aus.

Um die Anwendbarkeit der Formeln darzulegen, mögen für das in Nr. 20 behandelte Beispiel die Beanspruchungen im Scheitel nach dem Näherungsverfahren ermittelt werden. Es ist

$$\sigma_s = \frac{H_s}{F_s} = \frac{480}{5 \cdot 0{,}60} = 160\,\text{t/m}^2.$$

Das Eigengewicht und die Wärmeerniedrigung — 20° liefern nach Gleichung (52)

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s \pm \frac{4e}{f}(\sigma_s - E\alpha t^0) \\ &= 160 \pm \frac{4 \cdot 0{,}30}{5}(160 + 2100000 \cdot 0{,}000012 \cdot 20^0) \\ &= 160 \pm 159 \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = 160 + 159 = 319\ \text{t/m}^2, \quad \sigma_u = 160 - 159 = 1\ \text{t/m}^2.$$

Die Dampfwalze von 23 t Dienstgewicht wird durch eine gleichmäßig verteilte Belastung p ersetzt. Da die positive Beitragsstrecke, wie oben gezeigt, $\xi = 0{,}265\, l = 0{,}265 \cdot 40 = 10{,}60$ m ist, so ergibt sich

$$p = \frac{23}{10{,}60} = 2{,}17\ \text{t/lfm}.$$

Da die konzentrierte Last der Dampfwalze ungünstiger wirkt als die gleichmäßig verteilte Last, runden wir diesen Wert schätzungsweise auf 2,5 t/lfm auf.

Das positive Scheitelmoment ist nach Gleichung (55)

$$M_s = \frac{p\,l^2}{186} = \frac{2{,}5 \cdot 40^2}{186} = 21{,}5 \text{ mt}$$

und die Normalkraft

$$H = \frac{p\,l^2}{16{,}8\,f} = \frac{2{,}5 \cdot 40^2}{16{,}8 \cdot 5} = 47{,}7 \text{ t.}$$

Die Spannungen von der Verkehrslast sind

$$\sigma = \frac{H}{F_s} \pm \frac{M_s}{W} = \frac{47{,}7}{3{,}00} \pm \frac{21{,}5}{0{,}300} = 16 \pm 72,$$

$$\sigma_s = 88 \text{ t/m}^2, \quad \sigma_u = -56 \text{ t/m}^2.$$

Die Größtwerte der Randspannungen betragen:

$$\sigma_0 = 319 + 88 = 407 \text{ t/m}^2,$$

$$\sigma_u = 1 - 56 = -55 \text{ t/m}^2.$$

Der Vergleich mit den genaueren Werten auf Seite 30 zeigt, daß das Näherungsverfahren befriedigende Werte liefert.

III. Der kontinuierliche Bogen ohne Gelenke.

22. Vorbemerkungen.

Im Nachfolgenden betrachten wir eine Reihe gelenkloser Bogenträger, die auf elastischen, unten eingespannten Pfeilern ruhen (Abb. 23). Man bezeichnet diese Konstruktion als kontinuierlichen Bogen oder auch als Bogenreihe; sie kommt namentlich zu Talbrücken (Viadukten), neuerdings im Eisenbetonbau zu Rahmenbindern für Hallen, Fabriken usw. zur Anwendung. Sofern die Pfeiler im Verhältnis zu den Bogen sehr starr ausgebildet sind, verhält sich jede Oeffnung wie ein vollständig eingespannter Bogen. In der Tat wird bei der Berechnung massiver Bogenbrücken mit mehreren Oeffnungen die Elastizität der Zwischenpfeiler gewöhnlich außer acht gelassen, in der Annahme, daß hierdurch das Ergebnis nur unbedeutend beeinflußt wird. Bei hohen und verhältnismäßig schlanken Zwischenpfeilern muß aber im Interesse der Sicherheit die Elastizität der Pfeiler in Rechnung gezogen werden; jedenfalls sollte man nicht verfehlen, sich von der Größe dieses Einflusses ein Bild zu machen, sei es auch nur auf Grund einer angenäherten Rechnung.

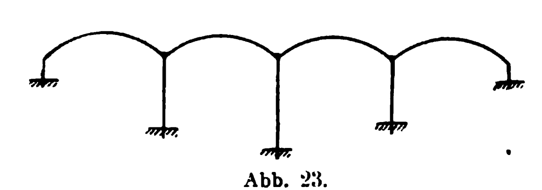


Abb. 23.

Wir geben in der Folge sowohl die strenge Lösung der Aufgabe, als auch ein sehr einfaches Näherungsverfahren, indem wir gleich bemerken, daß letzteres für die Bedürfnisse der Praxis in den meisten Fällen vollständig ausreicht. Indessen werden wir in beiden Untersuchungen die

elastische Senkbarkeit der Pfeiler vernachlässigen. Von vornherein steht ja zu erwarten, daß die Senkung der Pfeilerköpfe gegenüber deren wagerechter Verschiebung und Drehung von sehr geringem Einflusse auf die Schnittkräfte sein wird; senken sich alle Pfeilerköpfe um dasselbe Maß, so treten in den Bogen überhaupt keine Kräfte auf. Eine Berücksichtigung der Pfeilersenkungen würde die Aufgabe ganz wesentlich erschweren. Des weiteren wollen wir, um nicht zu weitläufig zu werden, nur vertikale Lasten in den Bereich der Betrachtungen ziehen und schließlich für jede Oeffnung einen symmetrischen Bogen voraussetzen.

23. Die Formänderung der Pfeiler.

Wir erledigen zunächst die folgende einfache Aufgabe aus der Elastizitätslehre. Auf das obere Ende eines lotrechten Pfeilers wirke die horizontale Kraft H und das Drehmoment M; man bestimme die Bewegung des Endquerschnitts (vergl. Abb. 24). Das Gesetz der Superposition liefert

$$\left.\begin{array}{ll}\text{die horizontale Verschiebung} & \Delta l = \lambda' H + \lambda M \\ \text{und die Drehung} \quad . \quad . \quad . \quad . & \alpha = \varepsilon' H + \varepsilon M\end{array}\right\} \quad . \quad (57)$$

wobei λ' und ε' die Bewegungen infolge $H = 1$, λ und ε diejenigen infolge $M = 1$ bezeichnen. Für den unten eingespannten Pfeiler ergibt sich nach bekannten Regeln der Elastizitätslehre

$$\lambda' = \int \frac{y^2\,dy}{EJ}, \quad \lambda = \varepsilon' = \int \frac{y\,dy}{EJ}, \quad \varepsilon = \int \frac{dy}{EJ}.$$

Abb. 24.

Im allgemeinen ist J veränderlich, die Integrale sind dann näherungsweise durch Summen zu ersetzen. Bei hohen Brückenpfeilern wächst J vom Pfeilerkopf (J_1) nach dem Pfeilerfuß (J_2), ungefähr derart, daß man setzen kann

$$\frac{J_1}{J} = 1 - \frac{J_2 - J_1}{J_2 h^2}\, y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Ein nach diesem Gesetze dimensionierter Pfeiler sieht wie in Abb. 25 skizziert aus; das Gesetz kommt also den Verhältnissen der Praxis entgegen. Setzt man den Ausdruck in die Integrale ein, so lassen sich die Integrationen leicht durchführen; man findet

$$\left.\begin{array}{l}\lambda' = h^3 \dfrac{3\,J_1 + 2\,J_2}{15\,EJ_1J_2} \\ \lambda = \varepsilon' = h^2 \dfrac{J_1 + J_2}{4\,EJ_1J_2} \\ \varepsilon = h\,\dfrac{J_1 + 2\,J_2}{3\,EJ_1J_2}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Ist der Querschnitt konstant, so folgt mit $J_1 = J_2 = J$

$$\lambda' = \frac{h^3}{3\,EJ}, \quad \lambda = \varepsilon' = \frac{h^2}{2\,EJ}, \quad \varepsilon = \frac{h}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Abb. 25.

Besondere Erwähnung verdient noch der Fall, wo die Drehung α verschwindet. Dann ist Δl eine Funktion von H allein; es ist

$$\Delta l = \lambda' H + \lambda M,$$
$$0 = \lambda H + \varepsilon M,$$

woraus

$$\Delta l = \left(\lambda' - \frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right) H = k \cdot H \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

folgt. Wächst der Pfeilerquerschnitt nach dem Gesetze (58), so ergibt sich

$$k = \frac{h^3 \left[3 J_1^2 + 19 J_2 (2 J_1 + J_2)\right]}{240\, E J_1 J_2 (J_1 + 2 J_2)} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Für konstanten Querschnitt folgt hieraus

$$k = \frac{h^3}{12\, EJ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

24. Allgemeines Verfahren.[1])

Jedes Feld eines kontinuierlichen Bogens läßt sich auffassen als ein in verschiebliche Widerlager eingespannter, einfacher Bogen ohne Gelenke. Der letztere ist bereits im ersten Abschnitt eingehend untersucht worden; die dort gefundenen Beziehungen sind auch hier anwendbar. Immerhin muß beachtet werden, daß jetzt die Bewegung der Widerlager auch von Lasten herrühren kann, die außerhalb der betreffenden Oeffnung liegen, weshalb es nicht angängig ist, die Kämpferdrehungen einfach proportional den Ein-

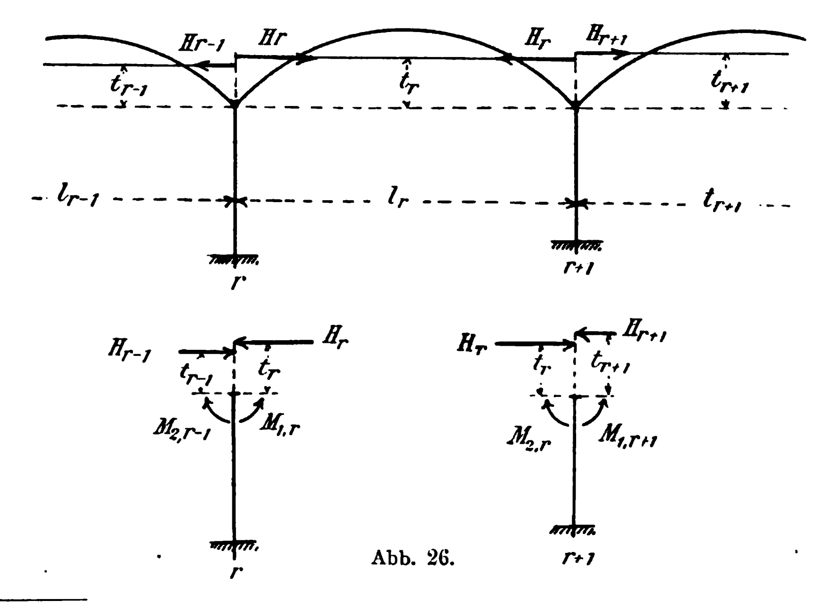


Abb. 26.

[1]) In anderer Weise, als dies hier geschieht, wurde der kontinuierliche Bogen ohne Gelenke bereits von Prof. Engeßer behandelt, vergl. dessen Abhandlung, „Ueber Bogenbrücken auf elastischen Pfeilern", Zeitschrift für Bauwesen 1901. Prof. W. Ritter-Zürich fand eine graphische Lösung mit Benutzung der Elastizitätsellipse, die von Lossier veröffentlicht wurde. Vergl. Génie civil 1903, S 153 und 1908, S. 268.

spannmomenten zu setzen. Mit anderen Worten: die im ersten Abschnitt abgeleiteten Gleichungen gelten nur dann, wenn die Elastizitätsmasse ε^1 und ε_2 gleich Null gesetzt und unter α und β die gesamten Drehwinkel der Kämpfer verstanden werden. Auf die Zulässigkeit dieses Vorgehens wurde bereits auf Seite 3 hingewiesen.

Wir greifen irgend eine von den Pfeilern r und $r+1$ begrenzte Oeffnung l_r heraus (Abb. 26) und schreiben die der Gleichung (6) entsprechenden Elastizitätsgleichungen an. Sie lauten für den symmetrischen Bogen

$$\left.\begin{aligned} \varDelta l_r - \varDelta l_{r+1} + (\alpha_r - \alpha_{r+1})\, t_r &= \sum_r P\delta' + H_r\, \varDelta l_r' \\ \alpha_r &= \sum_r P\delta_1 + M_{1,r}\,\alpha_{1,r} + M_{2,r}\,\alpha_{2,r} \\ -\alpha_{r+1} &= \sum_r P\delta_2 + M_{1,r}\,\beta_{1,r} + M_{2,r}\,\beta_{2,r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (64)$$

Hierbei sind $\varDelta l_r$ und $\varDelta l_{r+1}$ die Verschiebungen der Pfeilerköpfe r und $r+1$ ($+$ nach rechts), α_r und α_{r+1} deren Drehungen ($+$ im Sinne des Uhrzeigers). Auf den Pfeiler r wirkt die horizontale Kraft $H_{r-1} - H_r$, sowie das Moment $M_{2,r-1} + H_{r-1}t_{r-1} - (M_{1,r} + H_r t_r)$. Die Gleichung (57) lautet daher

$$\left.\begin{aligned} \varDelta l_r &= \lambda'_r\,(H_{r-1} - H_r) + \lambda_r\,(M_{2,r-1} + H_{r-1}t_{r-1} - M_{1,r} - H_r t_r) \\ \alpha_r &= \lambda_r\,(H_{r-1} - H_r) + \varepsilon_r\,(M_{2,r-1} + H_{r-1}t_{r-1} - M_{1,r} - H_r t_r) \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Die Angriffslinie der Bogenkraft bestimmt sich genau wie beim vollständig eingespannten Bogen, indem man den Schwerpunkt der Gewichte $dw = \frac{ds}{EJ}$ ermittelt.

Die Gleichung (64) läßt sich für jede Oeffnung, die Gleichung (65) für jeden Pfeiler des kontinuierlichen Bogens niederschreiben. Für den Bogen mit n Oeffnungen erhalten wir also $3n + 2(n+1) = 5n + 2$ Elastizitätsgleichungen. Unbekannt sind die $2n$ Balkenmomente, die n Bogenkräfte, sowie die $2(n+1)$ Bewegungskomponenten der Pfeilerköpfe. Im ganzen ergeben sich also $5n+2$ Unbekannte, zu deren Bestimmung die obigen Elastizitätsgleichungen gerade ausreichen.

Die Aufgabe ist damit gelöst. Die praktische Durchführung der Berechnungen gestaltet sich allerdings schon bei wenigen Oeffnungen äußerst mühsam. Wir geben deshalb nachstehend ein einfaches Näherungsverfahren an, das sehr befriedigende Ergebnisse liefert und für die Zwecke der Praxis vollständig genügt.

25. Näherungsverfahren.

Wenn man nach dem allgemeinen Verfahren ein Beispiel durchrechnet, so erkennt man, daß der Einfluß der Elastizität der Pfeiler auf die Schnittkräfte hauptsächlich durch die Verschiebungen $\varDelta l$ der Endquerschnitte zum Ausdruck kommt, während deren Drehungen α kaum eine Rolle spielen.

In praktischen Fällen ist eben das Trägheitsmoment der Pfeiler meist sehr viel größer als dasjenige der Bogen, die Drehung der Pfeilerköpfe daher nur geringfügig.

Es erscheint deshalb gerechtfertigt, die Drehwinkel α näherungsweise einfach zu vernachlässigen, also anzunehmen, die Pfeilerköpfe verschieben sich parallel. Hierdurch vereinfacht sich die Berechnung des kontinuierlichen Bogens ganz wesentlich. Die Gleichung (64) lautet jetzt

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_r - \Delta l_{r+1} &= \sum_r P\delta' + H_r \Delta l_r' \\ 0 &= \sum_r P\delta_1 + M_{1,r}\,\alpha_{1,r} + M_{2,r}\,\alpha_{2,r} \\ 0 &= \sum_r P\delta_2 + M_{1,r}\,\beta_{1,r} + M_{2,r}\,\beta_{2,r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Die Bestimmung der Balkenmomente $M_{1,r}$ und $M_{2,r}$ erfolgt genau wie beim Bogen mit starren Widerlagern; bei Brückengewölben also nach dem in Nr. 13 enthaltenen Verfahren. An Stelle der Gleichung (65) tritt die Beziehung

$$\Delta l_r = k_r\,(H_{r-1} - H_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

indem jetzt der auf Seite 36 behandelte Sonderfall der Pfeilerdeformation vorliegt; die Faktoren k_r lassen sich nach dem dort Gesagten leicht berechnen (vergl. Gleichung 62). Für den Pfeiler $r+1$ ist analog wie oben

$$\Delta l_{r+1} = k_{r+1}\,(H_r - H_{r+1}).$$

Setzen wir die Werte für Δl_r und Δl_{r+1} in die erste der Gleichung (66) ein, so erhalten wir die wichtige Beziehung

$$H_{r-1}\,k_r - H_r\,(\Delta l'_r + k_r + k_{r+1}) + H_{r+1}\,k_{r+1} - \sum_r P\delta' = 0 \quad . \quad (68)$$

Die Gleichung ist ganz ähnlich gebaut und anzuwenden, wie die bekannte Dreimomentengleichung des kontinuierlichen Balkens auf festen Stützen. Sie enthält die Bogenkräfte dreier aufeinander folgender Oeffnungen und läßt sich für den kontinuierlichen Bogen mit n Oeffnungen n mal anschreiben, ermöglicht also die Berechnung aller n Bogenkräfte.

Die Werte $\Delta l'$ und $\Sigma P\delta'$ werden genau wie beim Bogen mit starren Widerlagern ermittelt. Das Näherungsverfahren gestaltet sich also sehr einfach, namentlich in dem in der Praxis meist vorliegenden Falle, daß man die einzelnen Bogen bereits als vollständig eingespannt berechnet hat und sich nun nachträglich ein Bild von dem Einfluß der Pfeilerelastizität machen will.

Bogenbrücken auf elastischen Pfeilern (Viadukte) haben gewöhnlich starre Endwiderlager, und die Zwischenpfeiler sind derart angeordnet, daß das Eigengewicht in jeder Oeffnung dieselbe Bogenkraft erzeugt. Der Einfluß der Pfeilerelastizität erstreckt sich dann nur auf die Verkehrsbelastung; der ungünstigste Zustand für irgend eine Oeffnung l_r tritt dann ein, wenn die

Verkehrslast auf diese Oeffnung beschränkt bleibt (Abb. 27). Die unbelasteten Oeffnungen werden ebenfalls beansprucht, jedoch in vermindertem Maße; wie man leicht einsieht, nimmt die Bogenkraft von der belasteten Oeffnung

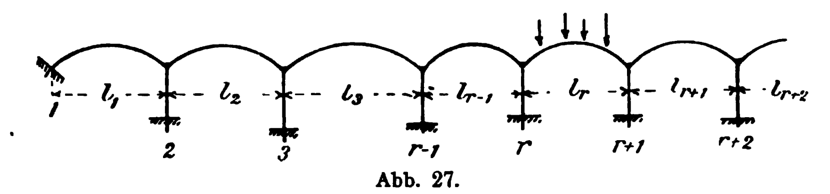


Abb. 27.

nach beiden Seiten ab. Das Verhältnis c jeder Bogenkraft zur nächstfolgenden läßt sich leicht berechnen, indem man die Gleichung (68), vom Endwiderlager ausgehend, für jede Oeffnung niederschreibt. Mit der in Abb. 27 eingetragenen Numerierung ergibt sich

$$-H_1(\varDelta l_1' + k_2) + H_2 k_2 = 0, \qquad \frac{H_1}{H_2} = c_2 = \frac{k_2}{\varDelta l_1' + k_2};$$

$$H_1 k_2 - H_2(\varDelta l_2' + k_2 + k_3) + H_3 k_3 = 0, \qquad \frac{H_2}{H_3} = c_3 = \frac{k_3}{\varDelta l_2' + k_2 + k_3 - c_2 k_2}$$

usw., allgemein ist

$$c_r = \frac{k_r}{\varDelta l_{r-1}' + k_{r-1} + k_r - c_{r-1} k_{r-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Das Verhältnis c ist von der Größe und Lage der Belastung unabhängig.

Wir berechnen in obiger Weise die Verhältnisse $c_r = \frac{H_{r-1}}{H_r}$ und (vom rechten Endwiderlager ausgehend) $c_{r+1} = \frac{H_{r+1}}{H_r}$. Dann lautet für die r^{te} Oeffnung Gleichung (68)

$$H_r k_r c_r - H_r(\varDelta l_r' + k_r + k_{r+1}) + H_r k_{r+1} c_{r+1} - \sum_r P\delta' = 0,$$

woraus

$$H_r = \frac{-\sum_r P\delta'}{k_r(1-c_r) + k_{r+1}(1-c_{r+1}) + \varDelta l_r'} \quad . \quad . \quad (70)$$

Für die Anwendung ist es bequem, die Bogenkraft $\overline{H}_r$ einzuführen, die man erhält, wenn man die Pfeiler als starr ansieht. Dann ist

$$\overline{H}_r \varDelta l_r' + \sum_r P\delta' = 0$$

und

$$\overline{H}_r + \varDelta H_r = H_r,$$

wobei $\varDelta H_r$ den Einfluß der Pfeilerelastizität darstellt. In Verbindung mit Gleichung (70) ergibt sich schließlich

$$\varDelta H_r = -\overline{H}_r \cdot \frac{k_r(1-c_r) + k_{r+1}(1-c_{r+1})}{k_r(1-c_r) + k_{r+1}(1-c_{r+1}) + \varDelta l_r'} \quad . \quad (71)$$

26. Der kontinuierliche Bogen mit unendlich vielen, gleichen Oeffnungen (Mittelfeld).

Die einzelnen Bogen und Pfeiler seien einander kongruent; wir setzen also $k_r = k_{r+1} = k$, $c_r = c_{r+1} = c$, $\varDelta l_r' = \varDelta l'$, $\overline{H}_r = \overline{H}$, $\varDelta H_r = \varDelta H$. Das Verhältnis c folgt aus Gleichung (69) zu

$$c = 1 - \frac{\varDelta l'}{2\,k}\left(\sqrt{1 + \frac{4\,k}{\varDelta l'}} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Gleichung (71) geht über in

$$\varDelta H = -\overline{H} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\varDelta l'}{2\,k\,(1-c)}} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

Diese Beziehungen leisten zur Berechnung gewölbter Viadukte sehr wertvolle Dienste. In den Fällen der Praxis ist nämlich der Wert $\frac{\varDelta l'}{k}$ stets sehr groß, das Verhältnis c also sehr klein. $\varDelta H$ kommt daher in der Hauptsache durch die Elastizität der an die belastete Oeffnung angrenzenden Bogen und Pfeiler zustande. Die Anwendung der Gleichungen (72) und (73) ist deshalb nicht auf den Bogen mit unendlich vielen Oeffnungen beschränkt, sondern auch zur Untersuchung der Mittelfelder eines Bogens mit nur wenigen Feldern gestattet.

Wie einfach sich nach dem Gesagten bei Bogenbrücken mit mehreren Oeffnungen die Elastizität der Zwischenpfeiler in Rechnung stellen läßt, möge das folgende Beispiel zeigen.

27. Beispiel.

Die im Jahre 1907 erbaute Straßenbrücke über die Rhône bei Pyrimont[1]) besteht aus drei (und einem halben) Eisenbetonbogen von rd. 54 m Spannweite und 7,60 m Pfeilhöhe auf 23 m hohen, massiven Pfeilern (Abb. 28).

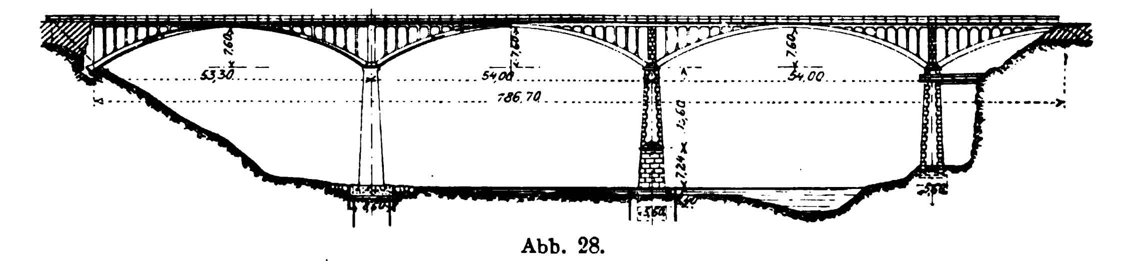


Abb. 28.

Die Bogen wurden von den Entwurfsverfassern als vollständig eingespannt berechnet. Nachstehend soll nun der Einfluß der Pfeilerelastizität auf den mittleren Bogen untersucht werden, und zwar, da es auf große Genauigkeit nicht ankommt, an Hand der Gleichungen (72) und (73).

---

[1]) Vergl. Schweiz. Bauzeitung 1907, 7. Dezember, S. 287.

Die Berechnung des Ausdrucks $\varDelta l' = \int \frac{y^2 ds}{EJ}$ wurde auf Grund der in der angegebenen Veröffentlichung enthaltenen Ausführungspläne vorgenommen. Da sie nichts Neues bietet, wird sie hier nicht vorgeführt; es ergab sich $E \cdot \varDelta l' = 1790$ t/m.

Der Pfeilerkopf ist ein Rechteck von ungefähr 2,6 × 3,5 m, der Pfeilerfuß ein solches von ungefähr 5,6 × 8,0 m. Für die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments kann das Gesetz (58) angenommen, das Elastizitätsmaß k also aus Gleichung (62) bestimmt werden. Demnach ist

$$J_1 = \frac{3{,}5 \cdot 2{,}6^3}{12} = 5{,}1 \text{ m}^4$$

$$J_2 = \frac{8{,}0 \cdot 5{,}6^3}{12} = 117{,}1 \text{ m}^4$$

$$E \cdot k = h^3 \frac{3\,J_1^2 + 19\,J_2\,(2\,J_1 + J_2)}{240\,J_1 J_2\,(J_1 + 2\,J_2)} = 23^3 \frac{3 \cdot 5{,}1^2 + 19 \cdot 117{,}1\,(10{,}2 + 117{,}1)}{240 \cdot 5{,}1 \cdot 117\,1\,(5{,}1 + 234{,}2)}$$

$$E \cdot k = 100{,}4 \text{ t/m}.$$

Gleichung (72) ergibt

$$c = 1 - \frac{\varDelta l'}{2\,k}\left(\sqrt{1 + \frac{4\,k}{\varDelta l'}} - 1\right) = 1 - \frac{1790}{2 \cdot 100{,}4}\left(\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 100{,}4}{1790}} - 1\right)$$

$$c = 0{,}050$$

und aus Gleichung (73) folgt

$$\varDelta H = -\overline{H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\varDelta l'}{2\,k\,(1-c)}} = -\overline{H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1790}{2 \cdot 100{,}4\,(1 - 0{,}05)}}$$

$$\varDelta H = -0{,}096 \cdot \overline{H}.$$

Es ist nun leicht, den Einfluß der Pfeilerelastizität für irgend einen Belastungszustand in Rechnung zu stellen; zu dem Schnittmoment, das sich bei Annahme starrer Pfeiler ergibt, tritt noch das (positive) Moment $\varDelta H \cdot y$ hinzu. Verfasser hat die Einflußlinie für das Moment im Scheitel berechnet; in Abb. 29 ist sie aufgetragen. Wie man sieht, ist der Einfluß der Pfeilerelastizität noch nicht sehr groß, jedenfalls für die Standsicherheit des Bauwerkes ganz ungefährlich.

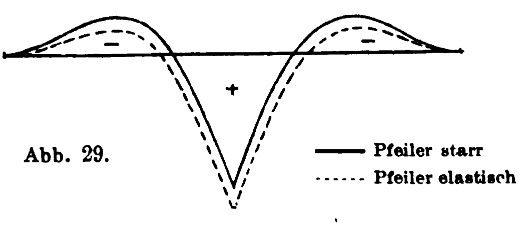


Abb. 29.

Den Pfeilern selbst kommt ihre Elastizität zugute. Da $\varDelta H$ entgegengesetzt zu $\overline{H}$ wirkt, so ist die Exzentrizität der Drucklinie im Pfeiler bei einseitiger Belastung kleiner, als die Berechnung unter Annahme starrer Pfeiler erwarten läßt.

IV. Untersuchung einiger häufig vorkommender, biegungsfester Rahmen.

28. Vorbemerkungen.

Der biegungsfeste, polygonale Rahmen kommt neuerdings, namentlich im Eisenbetonbau, häufig zur Anwendung, besonders zu Dach- und Hallenkonstruktionen. Statisch ist er ein Bogenträger mit eingespannten oder gelenkigen, zuweilen auch elastisch drehbaren Kämpfern, daher nach den im ersten Abschnitt gegebenen Grundsätzen zu berechnen. Die gebräuchlichen symmetrischen Rahmenformen gestatten aber wesentliche Vereinfachungen, die das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen bilden. Wir berücksichtigen die gleichmäßig verteilte Last g für die Längeneinheit, die lotrechte Einzellast P, den wagerechten, gleichmäßig verteilten Winddruck w für die Längeneinheit, sowie einen konzentrierten Winddruck W.

29. Der elastisch drehbare Rahmen nach Abb. 30.

Die beiden Kämpfer werden als unverschieblich, jedoch elastisch drehbar vorausgesetzt; die Elastizitätsmaße der Widerlager seien einander gleich, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Die Pfosten sind durch einen gebrochenen Querbalken verbunden, für welchen $J_1 = J \cos\varphi$ zutrifft. Diese Voraussetzung vereinfacht die statische Berechnung wesentlich und darf ohne merklichen Fehler auch in anderen Fällen angenommen werden, z. B. wenn $J_1 \sim J$ ist, da der Einfluß der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes nicht groß ist.

Zur Anwendung kommen die in Nr. 10 entwickelten Rechnungsgrundlagen. Die zur Bestimmung der Balkenmomente dienlichen Fixpunkte haben nach Gleichung (24) von den Kämpferlotrechten den Abstand

$$a = b = \frac{\int x x' dw}{\frac{l}{2}\int dw + \varepsilon l}.$$

In unserem Falle ist (Abb. 30)

$$\int x x' dw = \int_{l_1} \frac{x x' dx}{E J_1} + 2\int_{l_2} \frac{x x' ds}{E J_1 \cos\varphi} = \frac{l^3}{6 E J_1},$$

$$\int dw = \frac{l}{E J_1} + \frac{2h}{E J_2};$$

das gibt

$$a = b = \frac{1}{1 + 2k + \frac{2\varepsilon E J_1}{l}} \cdot \frac{l}{3}, \text{ wo } k = \frac{h J_1}{l J_2} \quad . \quad . \quad (74)$$

Die Angriffslinie der Bogenkraft hat gemäß Gleichung (26) von der Kämpferwagerechten den Abstand

$$t = \frac{\bar{t}\int dw}{\int dw + 2\varepsilon},$$

wobei $\bar{t}$ den Abstand des Schwerpunktes der elastischen Gewichte bedeutet. Es ist

$$\bar{t} = \frac{\int y' dw}{\int dw} = \frac{\frac{l_1}{EJ_1} f + \frac{2 l_2}{EJ_1}\left(f - \frac{h'}{2}\right) + \frac{h^2}{EJ_2}}{\frac{l}{EJ_1} + \frac{2h}{EJ_2}}$$

$$= \frac{f + hk - \frac{l_2 h'}{l}}{1 + 2k},$$

$$t = \frac{f + hk - \frac{l_2 h'}{l}}{1 + 2k + \frac{2 \varepsilon E J_1}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

a) Lotrechte Belastung.

Zur Festlegung der Schlußlinien der Momentenfläche des elastisch eingespannten Balkens sind in den Fixpunkten die mit Hilfe der Gleichung (25) zu berechnenden Strecken A und B abzutragen. Es erscheint zweckmäßig, diese Ausdrücke hier in der Schreibweise

$$A = -a\, l \frac{\alpha_0}{\int x x' dw}, \qquad B = -b\, l \frac{\beta_0}{\int x x' dw}$$

zu verwenden; α_0 und β_0 sind darin die Winkeldrehungen am beiderseitig frei drehbaren Balken infolge der Belastung. α_0 und β_0 sowie auch $\int x x' dw$ sind von der Höhe und Stärke der Pfosten unabhängig. Da wir das Trägheitsmoment des geneigten Balkenstückes gleich $\frac{J_1}{\cos \varphi}$ setzen, so bestimmen sich A und B genau wie beim elastisch eingespannten Balken konstanten Querschnitts, d. h. mit den aus Abb. 12 ersichtlichen Konstruktionen oder mittels der Gleichung (34). Für die gleichmäßig verteilte Last g für eine Längeneinheit und die Einzellast P lauten jene Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -A &= \frac{gal}{4} + \frac{P a x x' (l + x')}{l^3} \\ -B &= \frac{gal}{4} + \frac{P a x x' (l + x)}{l^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

M_1 und M_2 lassen sich nach Auftragen der Schlußlinie leicht abmessen oder auch mit Hilfe der Gleichung (11) berechnen.

Die Bogenkraft folgt aus Gleichung (27) mit Vernachlässigung des sehr kleinen Gliedes $\frac{l}{EF_s}$ im Nenner zu

$$H = \frac{-\Sigma P \delta'}{\int y^2 dw + 2 \varepsilon t^2} = -\frac{\Sigma P \delta' \cdot E J_1}{N}.$$

In unserem Falle ist (Abb. 30)

$$\left.\begin{aligned} N = EJ_1\left(\int y^2 dw + 2\varepsilon t^2\right) = l_1 t'^2 + \frac{2}{3} l_2 (t'^2 + t't'' + t''^2) \\ + \frac{2}{3} kl (t''^2 - tt'' + t^2) + 2\varepsilon EJ_1 t^2 \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

hierin ist $k = \frac{hJ_1}{lJ_2}$, t aus Gleichung (75).

Zur Berechnung des Zählers dient die Differentialgleichung (14)

$$\frac{d^2\delta'}{dx^2} = -\frac{M}{EJ\cos\varphi}.$$

Für das geneigte Balkenstück ist $M = -t'' - x\frac{h'}{l_2}$, $J\cos\varphi = J_1$, daher

$$EJ_1\frac{d^2\delta'}{dx^2} = t'' + x\frac{h'}{l_2},$$

$$EJ_1\frac{d\delta'}{dx} = xt'' + \frac{x^2h'}{2l_2} + C_1,$$

$$EJ_1\delta' = \frac{x^2t''}{2} + \frac{x^3h'}{6l_2} + C_1x.$$

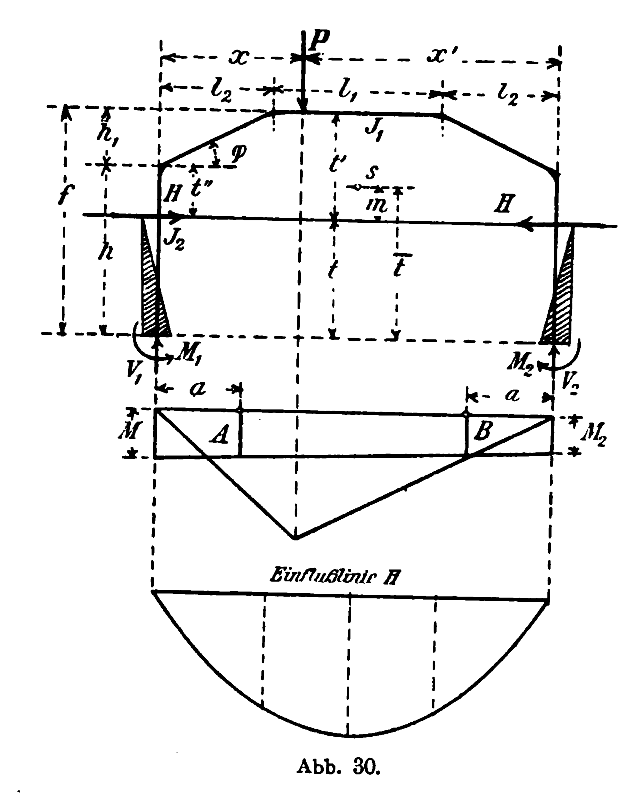


Abb. 30.

Die zweite Integrationskonstante verschwindet, weil für $x = 0$, $\delta' = 0$ ist.

Für das wagerechte Balkenstück l_1 ergibt sich $M = -t'$, $\cos\varphi = 1$, somit

$$EJ_1\frac{d^2\delta'}{dx^2} = t',$$

$$EJ_1\frac{d\delta'}{dx} = xt' + C_2.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ ist $\frac{d\delta'}{dx} = 0$,

also $C_2 = -\frac{t'l}{2}$;

$$EJ_1\frac{d\delta'}{dx} = -t'\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

$$EJ_1\delta' = -t'\frac{xx'}{2} + C_3.$$

Die beiden Integrationskonstanten folgen daraus, daß

die Biegungslinie δ', d. i. die Einflußlinie für H, für $x = l_2$ stetig verläuft. Daher ist

$$l_2 t'' + l_2 \frac{h'}{2} + C_1 = -t' \left(\frac{l}{2} - l_2\right),$$

$$C_1 = -\frac{t'}{2}(l_1 + l_2) - \frac{t''}{2} l_2.$$

$$\frac{l_2{}^2 t''}{2} + \frac{l_2{}^2 h'}{6} - \frac{t' l_1 l_2}{2} - \frac{t' l_2{}^2}{2} - \frac{t'' l_2{}^2}{2} = -\frac{t' l_2 (l_1 + l_2)}{2} + C_3,$$

$$C_3 = \frac{l_2{}^2 h'}{6}.$$

Liegt demnach die Einzellast P innerhalb der Strecke l_2, so entsteht

$$H = P \cdot \frac{3 \cdot x\,[t'(l_1 + l_2) + t'' l_2] - 3x^2 t'' - x^3 \frac{h'}{l_2}}{6\,N} \quad . \; . \quad (78)$$

während die Einzellast P innerhalb l_1 die Bogenkraft

$$H = P \cdot \frac{3xx' t' - l_2{}^2 h'}{6\,N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (79)$$

erzeugt. Wie ersichtlich, ist die Einflußlinie der Bogenkraft innerhalb l_1 eine gewöhnliche Parabel, innerhalb l_2 eine Parabel vierter Ordnung. Die Ordinate in den Knickpunkten ($x = l_2$ und $x = l_1 + l_2$) beträgt

$$H = P \cdot \frac{3 l_2 (l_1 + l_2)\, t' - l_2{}^2 h'}{6\,N} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

Die maximale Ordinate ist

$$H = P \cdot \frac{3 t' l^2 - 4 l_2{}^2 h'}{24\,N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (81)$$

Um die Einflußlinie aufzuzeichnen, genügt es meistens, mit diesen Formeln die Ordinaten in der Mitte und den Knickpunkten des Querbalkens zu berechnen, deren Endpunkte durch eine Parabel zu verbinden und die beiden anschließenden Kurvenstücke von Hand nach Gutdünken einzuzeichnen. Nur wenn l_2 relativ groß ist, empfiehlt es sich, aus Gleichung (78) noch einige weitere Ordinaten auszurechnen.

Wir bestimmen noch die Bogenkraft von der gleichmäßig verteilten Last g für die Längeneinheit, indem wir die Einflußfläche berechnen. Für die Fläche F_1 mit der Basis l_1 finden wir

$$F_1 = \frac{g}{6\,N} \int_{l_2}^{l_1 + l_2} [3\,t' x\,(l - x) - l_2{}^2 h']\, dx = g \cdot \frac{t' l_1 (l_1{}^2 + 6\, l_1 l_2 + 6\, l_2{}^2) - 2\, l_1 l_2{}^2 h'}{12\,N}.$$

Die Fläche F_2 mit der Basis l_2 beträgt

$$F_2 = \frac{g}{6\,N}\int_0^{l_2}\left[3\,x\,t'\,(l_1 + l_2) + 3\,x t'' l_2 - 3\,x^2 t'' - x^3\,\frac{h'}{l_2}\right] dx$$

$$= g \cdot \frac{2\,t' l_2^2\,(3\,l_1 + 4\,l_2) - 3\,l_2^3 h'}{24\,N}.$$

Die Bogenkraft von der gleichmäßig über die gesamte Spannweite verteilten Belastung ist

$$H = F_1 + 2\,F_2$$

$$= g \cdot \frac{t' l^3 - l_2^2 h'\,(2\,l_1 + 3\,l_2)}{12\,N} \quad (N \text{ aus Gleichung 77}) \qquad . \quad (82)$$

b) Wagerechte Belastung (Winddruck).

Der Einfachheit halber nehmen wir auch den auf das geneigte Stabstück wirkenden Winddruck wagerecht an. Richtiger wäre es, nur die Normalkomponente in Rechnung zu ziehen; obige Voraussetzung dürfte aber an dem Ergebnisse nur sehr wenig ändern und kann, da sie die Untersuchung wesentlich erleichtert, wohl zugelassen werden. Die Wahrheit liegt in der Mitte zwischen den beiden Annahmen.

Außer dem gleichmäßig verteilten Winddruck w für die Längeneinheit berücksichtigen wir die am oberen Pfostenende angreifende, konzentrierte Kraft W, die von einer Pfette herrührt. Die Lage der Fixpunkte wurde bereits bestimmt (Gleichung 74). Zur Berechnung der Balkenmomente dienen auch hier die Gleichungen

$$A = a\,l\,\frac{\alpha_0}{\int x x'\,dw},$$

$$B = b\,l\,\frac{\beta_0}{\int x x'\,dw},$$

wobei, wie unter a) gezeigt,

$$\int x x'\,dw = \frac{l^3}{6\,E J_1}$$

Abb. 31.

ist. Der Drehwinkel α_0 folgt aus der bekannten Beziehung

$$\alpha_0 = \int \frac{M\,(l - x)}{l E J}\,ds.$$

Wie Abb. 31 lehrt, ist für das Stabstück

$$1 - 2: \quad M = 0,$$

$$2 - 3 - 4: \quad M = \frac{R r (l - x)}{l},$$

$$4-5:\quad M=\frac{Rr(l-x)}{l}-w\frac{(l_2-x)^2h'^2}{2\,l_2^2},$$

$$5-6:\quad M=Rr-w\frac{y'^2}{2}-W(y'-h').$$

Das gibt

$$EJ_1\alpha_0=\frac{Rr}{l^2}\int\limits_2^5(l-x)^2dx+\frac{RrJ_1}{J_2}\int\limits_5^6dy-\frac{wh'^2}{2\,ll_2^2}\int\limits_4^5(l-x)(l_2-x)^2dx$$

$$-\frac{wJ_1}{J_2}\int\limits_5^6y'^2dy-\frac{WJ_1}{J_2}\int\limits_5^6(y'-h')\,dy.$$

Führt man die Integrationen aus und setzt dann wieder $Rr=Wh+\frac{wf^2}{2}$, ferner $k=\frac{hJ_1}{lJ_2}$, so erhält man

$$EJ_1\cdot\alpha_0=\frac{w}{6\,l}\left[f^2l^2\left(1+3\,k-k\frac{f}{h}\right)-h'^2l_2^2\left(\frac{7}{4}+\frac{l_1}{l_2}-\frac{kh'l^2}{hl_2^2}\right)\right]$$

$$+\frac{Whl}{6}(2+3\,k),$$

und weiter

$$-A=al\frac{\alpha_0}{\int xx'dw}=\frac{6\,a}{l^2}\cdot EJ_1\alpha_0,$$

$$-A=a\cdot\frac{w}{l}\left[f^2\left(1+3\,k-k\frac{f}{h}\right)-\frac{h'^2l_2^2}{l^2}\left(\frac{7}{4}+\frac{l_1}{l_2}-\frac{kh'l^2}{hl_2^2}\right)\right]$$

$$+a\cdot\frac{Wh}{l}(2+3\,k)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(83)$$

Der Drehwinkel β_0 beträgt

$$\beta_0=\int\frac{Mx}{lEJ}\,ds,$$

worin (Abb. 31) für das Stabstück

$$1-2:\quad M=0,$$

$$2-3-4:\quad M=\frac{Rr(l-x)}{l},$$

$$4-5:\quad M=\frac{Rr(l-x)}{l}-w\frac{(l_2-x)^2h'^2}{2\,l_2^2}$$

einzusetzen ist. Man erhält nach Durchführung der Integrationen

$$EJ_1 \cdot \beta_0 = \frac{w}{12l}\left(f^2 l^2 - \frac{h'^2 l_2^2}{2}\right) + \frac{Whl}{6}$$

und

$$-B = bl\frac{\beta_0}{\int xx'dw} = \frac{6a}{l^2} \cdot EJ_1 \beta_0,$$

$$-B = a \cdot \frac{w}{2l}\left(f^2 - \frac{h'^2 l_2^2}{2l^2}\right) + a \cdot \frac{Wh}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Indem man A und B in den Fixpunkten aufträgt und ihre Endpunkte durch eine Gerade verbindet, findet man die Stützenmomente M_1 und M_2. Ebenso bequem ist indessen die Anwendung der Gleichung (11).

Die Bogenkraft ergibt sich zu

$$H = \frac{-\Sigma P\delta' \cdot EJ_1}{N},$$

wo N aus Gleichung (77) zu entnehmen ist. δ' bedeutet die in Richtung von P gemessene Durchbiegung infolge $H=1$. Hier kommt also die wagerechte Verschiebung des geneigten Stabstückes und des linken Pfostens in Betracht. Die Durchbiegung des Pfostens folgt aus der Differentialgleichung

$$EJ_2 \frac{d^2\delta'}{dy^2} = -t + y''';$$

$$EJ_2 \frac{d\delta'}{dy} = -ty''' + \frac{y'''^2}{2} + C_1,$$

$$EJ_2 \delta' = -t\frac{y'''^2}{2} + \frac{y'''^3}{6} + C_1 y''' \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die zweite Integrationskonstante verschwindet, da für $y''=0$, $\delta'=0$ ist. Für $y'''=h$ wird

$$EJ_2 \frac{d\delta'}{dy} = -th + \frac{h^2}{2} + C_1,$$

$$EJ_2 \delta' = -t\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + C_1 h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Bei der Aufstellung der Differentialgleichung für das geneigte Stabstück muß beachtet werden, daß in Gleichung (14) φ den Winkel der Stabachse mit der Abszisse bedeutet. Da hier die Abszisse lotrecht steht, so ist $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$ zu ersetzen. Ferner wurde $J = \frac{J_1}{\cos\varphi}$ angenommen. Die Gleichung lautet daher (Abb. 31)

$$EJ_1 \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{d^2\delta'}{dy^2} = EJ_1 \frac{h'}{l_2}\frac{d^2\delta'}{dy^2} = t'' + y''.$$

Die erste Integration liefert

$$EJ_1 \frac{h'}{l_2} \frac{d\delta'}{dy} = t'' y'' + \frac{y''^2}{2} + C_2.$$

Für $y'' = 0$ entsteht derselbe Neigungswinkel wie für $y''' = h$, daher ist

$$C_2 = \frac{J_1 h'}{J_2 l_2} \left(- th + \frac{h^2}{2} + C_1\right),$$

$$EJ_1 \frac{h'}{l_2} \frac{d\delta'}{dy} = t'' y'' + \frac{y''^2}{2} + \frac{J_1 h'}{J_2 l_2} \left(- th + \frac{h^2}{2} + C_1\right).$$

Das Stabstück l_1 wird infolge $H = 1$ durch zwei gleiche Endmomente beansprucht. Nach einer bekannten Formel der Festigkeitslehre ist daher für $y'' = h'$: $\frac{d\delta'}{dy} = - \frac{l_1 t'}{2 EJ_1}$. Dieser Wert, in obenstehende Gleichung eingesetzt, ergibt

$$- \frac{l_1 t' h'}{2 l_2} = t'' h' + \frac{h'^2}{2} + \frac{J_1 h' h}{J_2 l_2} \left(\frac{h}{2} - t\right) + \frac{J_1 h'}{J_2 l_2} C_1,$$

woraus

$$C_1 = - \frac{J_2 l_2}{J_1} \left(t'' + \frac{h'}{2}\right) + h\left(t - \frac{h}{2}\right) - \frac{J_2 l_1 t'}{2 J_1}.$$

Nun folgt

$$EJ_1 \frac{h'}{l_2} \frac{d\delta'}{dy} = t'' y'' + \frac{y''^2}{2} - h' t'' - \frac{h'^2}{2} - \frac{h' l_1 t'}{2 l_2},$$

$$EJ_1 \frac{h'}{l_2} \delta' = t'' \frac{y''^2}{2} + \frac{y''^3}{6} - \frac{y'' h'}{2} \left(2 t'' + h' + \frac{l_1 t'}{l_2}\right) + C_3.$$

Die Konstante C_3 bestimmt sich dadurch, daß die Gleichung für $y'' = 0$ dieselbe Durchbiegung geben muß, wie Gleichung (86). Führt man in Gleichung (86) den Wert von C_1 ein, so folgt

$$EJ_2 \delta' = C_3 \frac{J_2 l_2}{J_1 h'} = - \frac{h^3}{3} + t \frac{h^2}{2} - \frac{J_2 h}{2 J_1} (2 l_2 t'' + h' l_2 + l_1 t'),$$

$$C_3 = - \frac{h h'}{2 l^2} \left[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)\right] - \frac{J_1 h'}{J_2 l_2} h^2 \left(\frac{h}{3} - \frac{t}{2}\right).$$

Die Gleichung für die elastische Linie des geneigten Stabstückes lautet danach

$$\left.\begin{aligned} EJ_1 \cdot \delta' = \frac{J_1 h^2}{6 J_2} (3t - 2h) - \left[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)\right] \left(\frac{h + y''}{2}\right) \\ + y''^2 \frac{t'' l_2}{2 h'} + y''^3 \frac{l_2}{6 h'} \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Für den Pfosten liefert Gleichung (85) mit Berücksichtigung der Konstanten C_1

$$\left.\begin{aligned} EJ_2 \cdot \delta' = \frac{y'''}{2} \left[h (2t - h) - \frac{J_2}{J_1} \left\{t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)\right\}\right] \\ - \frac{y'''^2 t}{2} + \frac{y'''^3}{6} \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Diese Gleichungen, durch N (Gleichung 77) dividiert, stellen die Einflußlinien der Bogenkraft für eine wagerechte Kraft $P = 1$ dar.

Die konzentrierte Kraft W am oberen Pfostenende erzeugt die Bogenkraft

$$H = \frac{-W \cdot EJ_1 \delta'}{N}$$

$$= Wh \frac{t'' l_2 + t' (l_1 + l_2) + lk\left(\frac{2}{3} h - t\right)}{2N}.$$

Um die Bogenkraft von gleichmäßig verteiltem Winddruck zu ermitteln, berechnen wir die Einflußflächen. Für die Fläche F mit der Basis h ergibt sich

$$\frac{J_2}{J_1} \cdot F \cdot \frac{N}{w} = \left\{\frac{h}{2}(h - 2t) + \frac{J_2}{2J_1}[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)]\right\} \int_0^h y''' dy$$

$$+ \frac{t}{2} \int_0^h y'''^2 dy - \frac{1}{6} \int_0^h y'''^3 dy$$

$$= \frac{5}{24} h'' - t \frac{h^3}{3} + \frac{J_2 h^2}{4 J_1} [t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)].$$

Die Fläche F' mit der Basis h' beträgt

$$F' \cdot \frac{N}{w} = \frac{J_1 h^2}{6 J_2}(2h - 3t) \int_0^{h'} dy + \frac{h}{2}[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)] \int_0^{h'} dy$$

$$+ \frac{1}{2}[t'' l^2 + t' (l_1 + l_2)] \int_0^{h'} y'' dy - \frac{t'' l_2}{2h'} \int_0^{h'} y''^2 dy - \frac{l_2}{6h'} \int_0^{h'} y''^3 dy$$

$$= \frac{h'(2h + h')}{4}[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)] - \frac{l_2 h'^2 (t' + 3t'')}{24}$$

$$+ \frac{k l h h' (2h - 3t)}{6}.$$

Die gesamte Bogenkraft vom Winddruck ist

$$H = \frac{F + F'}{N} \cdot w$$

$$\left.\begin{aligned} H = \frac{w}{24N} \cdot \Big[6 f^2 \{t'' l_2 + t' (l_1 + l_2)\} - l_2 h'^2 (t' + 3t'') \\ + k l h \{5h^2 - 8h(t - h') - 12 t h'\}\Big] \\ + \frac{Wh}{2N} \cdot \left[t'' l_2 + t' (l_1 + l_2) + kl\left(\frac{2}{3} h - t\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Nach Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H, M_1 und M_2 bereitet die Berechnung der Schnittkräfte und Schnittmomente nicht viel Mühe. Die vertikalen Reaktionen V_1 und V_2 findet man, indem man die statischen Momente aller Kräfte bezüglich der Kämpferschwerpunkte anschreibt. Die Schnittmomente bezieht man bei Eisenbetonrahmen am

besten auf die Schwerpunkte der Querschnitte, bestimmt also Moment und Normalkraft. Hieraus berechnet man dann die Randspannungen näherungsweise wie für einen homogenen Baustoff und dimensioniert die Eiseneinlagen derart, daß sie allen Zugspannungen gewachsen sind.

Sonderfälle: Aus dem vorstehend behandelten allgemeinen Fall lassen sich mühelos eine Reihe praktisch wichtiger Sonderfälle ableiten; mit $\varepsilon = 0$ entsteht der eingespannte Rahmen, mit $\varepsilon = \infty$ der zweigelenkige Rahmen. Für den letzteren ist $t = 0$, also auch M_1 und $M_2 = 0$. Setzt man $l_1 = 0$, so entsteht der sattelförmige Rahmen, der besonders für Dachbinder vorteilhaft verwendet wird; er geht mit $h' = 0$ in den rechteckigen, mit $h = 0$ in den dreieckigen Rahmen über; diese Formen können wiederum eingespannt oder gelenkig gelagert sein. Wir stellen im folgenden für die praktisch wichtigsten Sonderfälle die entsprechend spezialisierten Formeln zusammen.

30. Der sattelförmige Rahmen (Abb. 32).

In den allgemeinen Gleichungen ist $l_1 = 0$, $l_2 = \frac{l}{2}$ zu setzen. Für k gilt der Wert

$$k = \frac{h J_1 \cos\varphi}{l J_2} = \frac{h J_1}{2 s J_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

wo jetzt J_1 das Trägheitsmoment des geneigten Stabes von der Länge s bezeichnet.

Die Formeln für die Balkenmomente vereinfachen sich nur unbedeutend. Die Bogenkraft greift um

$$t = \frac{f - \frac{h'}{2} + hk}{1 + 2k + \frac{\varepsilon E J_1}{s}} \quad (91)$$

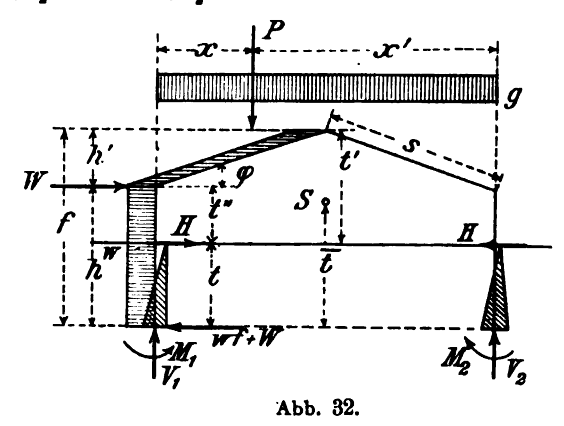


Abb. 32.

über der Kämpferwagerechten an.

Für den Nenner der Bogenkraft ergibt sich

$$N = \frac{l}{3}(h'^2 + 2kh^2) + l t''(t' - 2kt) + 2\varepsilon E J_1 t^2.$$

Die Einflußlinie der Bogenkraft lautet

$$H = P \cdot \frac{3xl(t' + t'') - 6x^2 t'' - 4x^3 \frac{h'}{l}}{12 N}$$

ihre größte Ordinate ist

$$\max H = P \cdot \frac{l^2(3t' - h')}{24 N} \quad \ldots \quad (92)$$

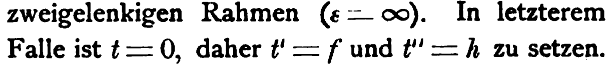
Durch die gleichmäßig verteilte Belastung entsteht

$$H = \frac{g l^3}{12\,N}\left(t' - \frac{3}{8}\,h'\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Der Winddruck erzeugt

$$H = \frac{w l}{48\,N} \cdot \left[6 f^2 (t' + t'') - h'^2 (t' + 3\,t'') + k h \left\{5\,h^2 - 8\,h\,(t - h') - 12\,t h'\right\}\right]$$
$$+ \frac{W h l}{4\,N} \cdot \left[t' + t'' + 2\,k\left(\frac{2}{3}\,h - t\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Alle diese Formeln gelten, wie nochmals betont sei, für jeden beliebigen Einspannungsgrad, also sowohl für den eingespannten ($\varepsilon = 0$) wie für den zweigelenkigen Rahmen ($\varepsilon = \infty$). In letzterem Falle ist $t = 0$, daher $t' = f$ und $t'' = h$ zu setzen.



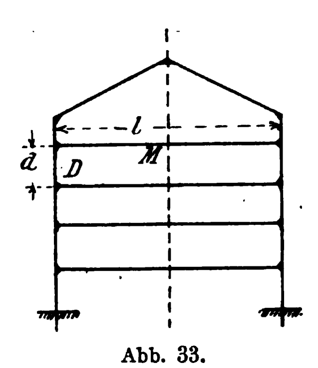


Abb. 33.

Um den in Abb. 33 skizzierten Eisenbetondachbinder zu berechnen, der mit den Unterzügen der Geschoßdecken in monolithischer Bauweise zusammenhängt — eine häufig vorkommende Aufgabe — kann man für $\frac{1}{\varepsilon}$ den Wert

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2\,E J}{l} + \frac{4\,E J_2}{d}$$

einführen, indem man annimmt, bei D herrsche vollständige Einspannung und die Tangente an die elastische Linie bei M sei horizontal. Das erstere ist freilich nicht streng richtig und das letztere gilt nur bei symmetrischer Belastung. Der entstehende Fehler kann aber nur unbeträchtlich sein, wie man erkennt, wenn man andere Annahmen macht. Wäre bei D ein Gelenk, so hätte der von obigem nur wenig abweichende Wert

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2\,E J}{l} + \frac{3\,E J_2}{d}$$

Gültigkeit.

31. Der rechteckige Rahmen.

In den in Nr. 30 abgeleiteten Beziehungen ist $h' = 0$, $f = h$, $t' = t''$ zu setzen. Es seien hier die beiden Sonderfälle $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \infty$ getrennt aufgeführt.

a) Kämpfer eingespannt (Abb. 34).

Die Bestimmung der Balkenmomente erfolgt, wie in Nr. 29 erläutert. Hier ist

$$a = b = \frac{l}{3\,(1 + 2\,k)}, \quad k = \frac{h J_1}{l J_2} \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

Lage der Bogenkraft:

$$t = h\,\frac{1+k}{1+2k},\quad t' = h - t = h\,\frac{k}{1+2k} \quad \ldots \quad (96)$$

Größe der Bogenkraft:

$$N = h^2 l\,\frac{k(2+k)}{3(1+2k)},$$

$$H = \frac{g\,l^3 + 6\,P\,x\,x'}{4\,h\,l\,(2+k)} \quad \ldots \quad (97)$$

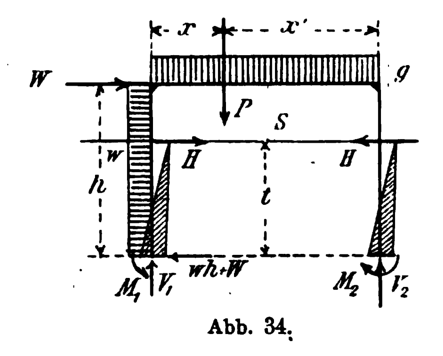


Abb. 34.

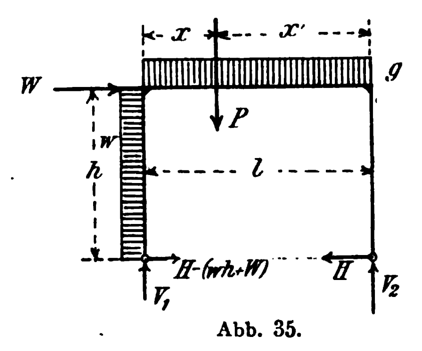


Abb. 35.

Vom Winddruck entsteht

$$\left.\begin{aligned} -A &= \frac{w\,h^2}{3} + W\,h\,\frac{2+3k}{3(1+2k)} \\ -B &= \frac{w\,h^2}{6(1+2k)} + W\,h\,\frac{1}{3(1+2k)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (98)$$

$$H = w\,h\,\frac{3+2k}{8(2+k)} + \frac{W}{2} \quad \ldots \quad (99)$$

b) Kämpfer gelenkig (Abb. 35).

$$a = b = t = 0,\quad M_1 = M_2 = 0.$$

Bogenkraft $\qquad N = \frac{h^2 l}{3}(3+2k).$

$$H = \frac{g\,l^3 + 6\,P\,x\,x'}{4\,h\,l\,(3+2k)} + w\,h\,\frac{6+5k}{8(3+2k)} + \frac{W}{2} \quad \ldots \quad (100)$$

32. Andere Rahmenformen.

Die bisher abgeleiteten Formeln können auch auf eine Reihe anderer Rahmenformen angewendet werden. Die statisch unbestimmten Größen sind nämlich von der Form des die Pfosten verbindenden Querbalkens nur schwach abhängig, wie man durch einige Beispielrechnungen sofort erkennt. Soll also ein Rahmen berechnet werden, dessen Querbalken nach einem Kreisbogen oder irgend einer Kurve geformt ist, so supponiert man einfach

den in Nr. 29 behandelten Stabzug, natürlich derart, daß f, l, h' ihre Werte beibehalten.

Beispiel: Der in Abb. 36 skizzierte, zweigelenkige Rahmen besitzt einen nach einer Parabel geformten Querbalken; es sei $h' = \frac{f}{3}$ und $k = 1$.

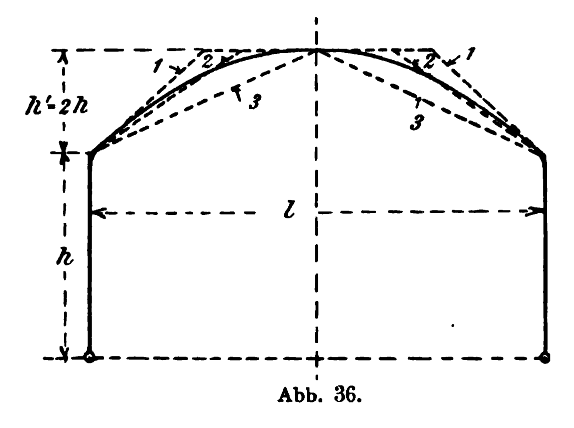


Abb. 36.

Er wird durch die gleichmäßig verteilte Last g und den Winddruck w beansprucht.

a) Wir nehmen näherungsweise an Stelle der Parabel den mit 1 bezeichneten Stabzug, der die Parabel beiderseitig tangiert

$$\left(l_1 = \frac{l}{2},\ l_2 = \frac{l}{4}\right);$$

dann gibt Gleichung (82) bezw. (89) die Bogenkraft

$$H = 0{,}069\,\frac{gl^2}{f} + 0{,}29\,wf.$$

b) Wir ersetzen die Parabel durch den mit 2 bezeichneten Stabzug, der die zwischen ihm und der Parabel liegenden Flächen ausgleicht $\left(l_1 = \frac{l}{3},\ l_2 = \frac{l}{3}\right)$; dann ist

$$H = 0{,}071\,\frac{gl^2}{f} + 0{,}30\,wf.$$

c) Wir wählen das Satteldach 3; die Gleichungen (93) und (94) liefern hierfür

$$H = 0{,}073\,\frac{gl^2}{f} + 0{,}31\,wf.$$

d) Für das betrachtete Beispiel lassen sich leicht genaue (ziemlich umständliche) Formeln ableiten, auf deren Wiedergabe hier verzichtet wird. Man erhält den genauen Wert zu

$$H = 0{,}072\,\frac{gl^2}{f} + 0{,}30\,wf.$$

Wie man sieht, weichen die verschiedenen Ergebnisse nur unwesentlich voneinander ab. Namentlich gibt die unter b) erwähnte Näherungsmethode sehr befriedigende Ergebnisse und kann daher in ähnlichen Fällen empfohlen werden.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

FORSCHERARBEITEN AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

EINFLUSSLINIEN FÜR DIE BERECHNUNG PARALLELER VIERENDEEL-TRÄGER

HEFT XII

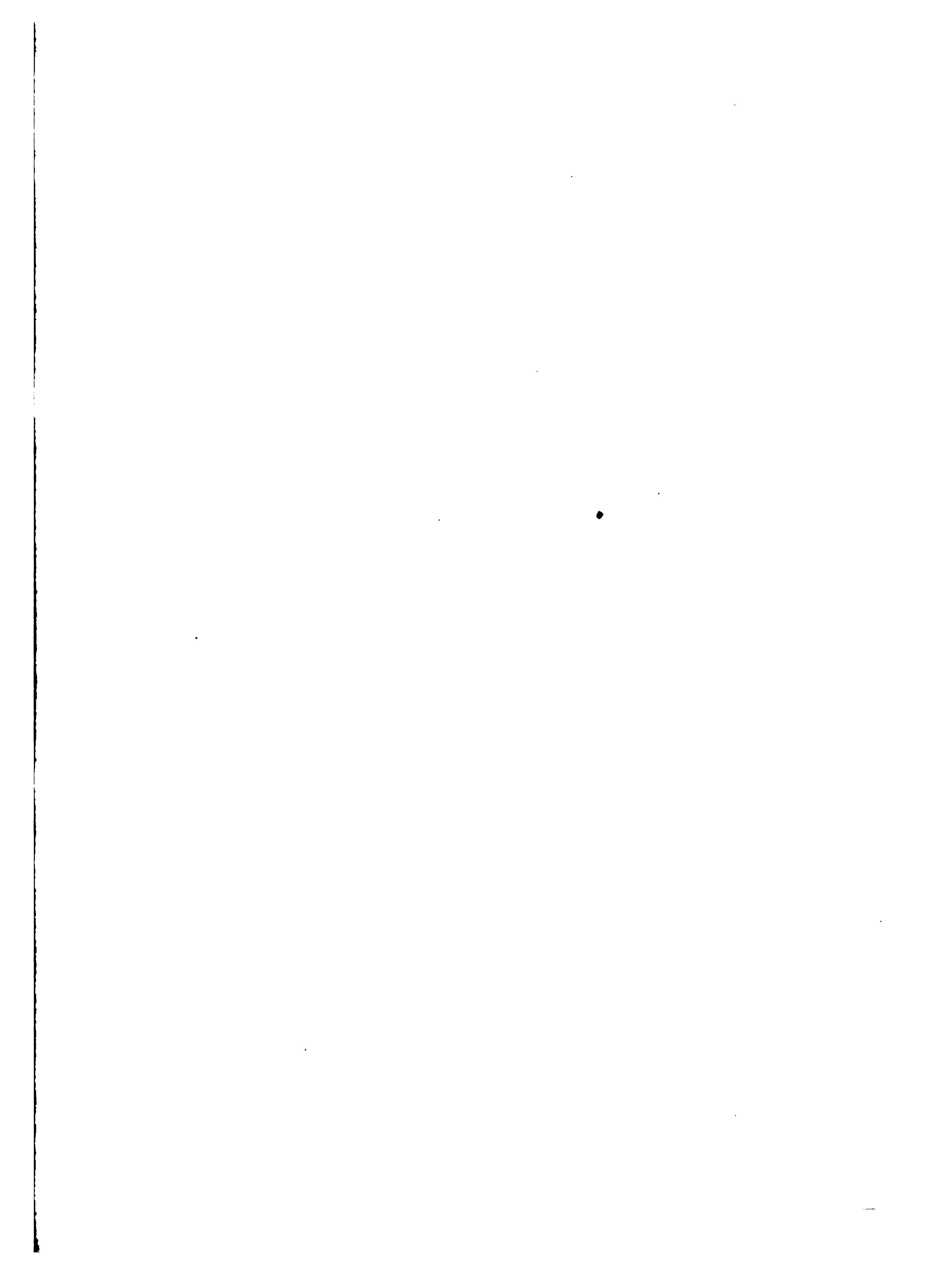
PREIS 2,50 MARK

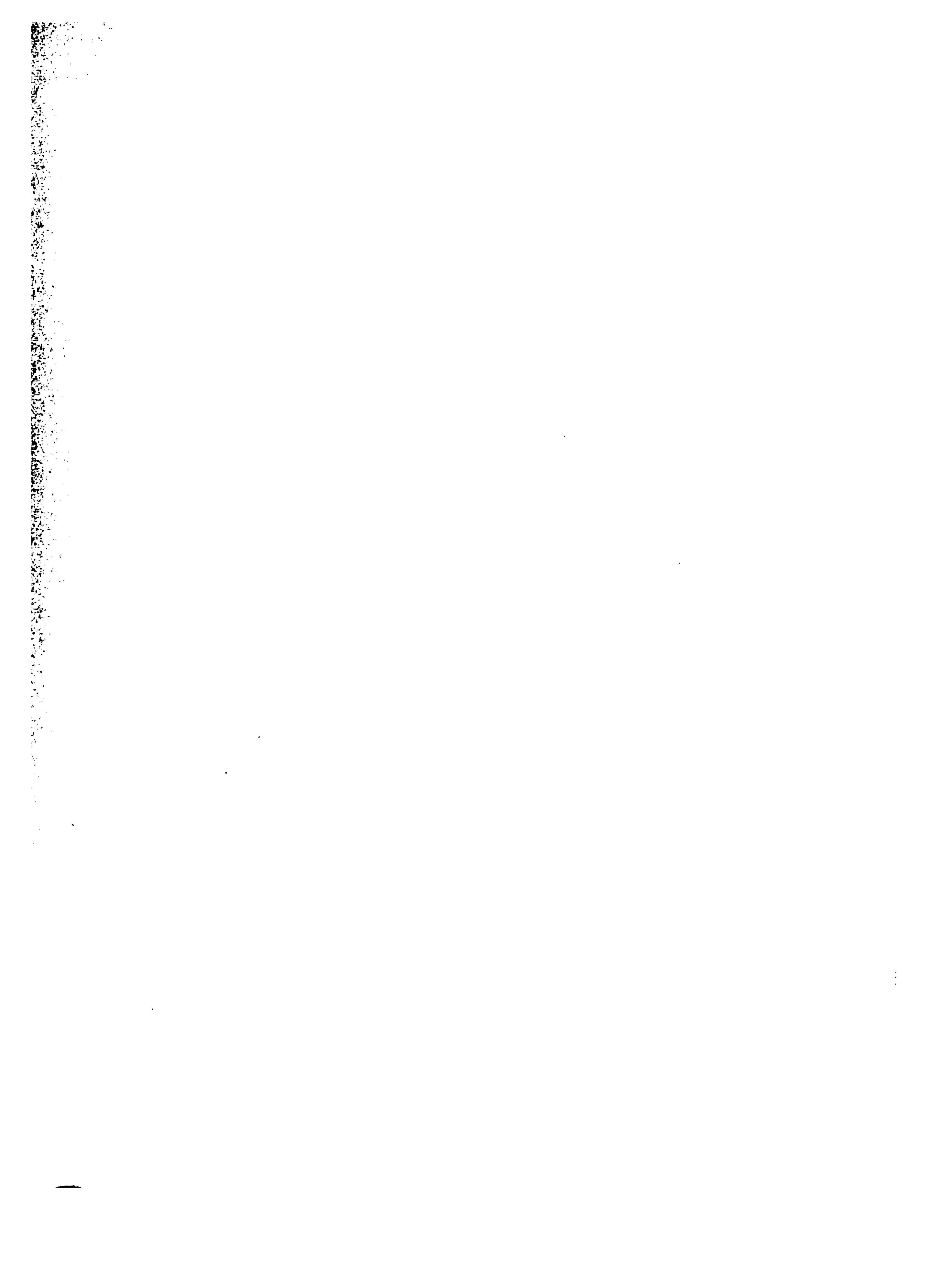
MIT 5 ABBILDUNGEN UND 1 TAFEL

VON

DR. ING. WENZEL ST. RITTER VON BALICKI
INGENIEUR DES GALIZISCHEN LANDESEISENBAHNAMTES

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90





Einflußlinien
für die Berechnung paralleler Vierendeel-Träger.

Von

Dr. Ing. **Wenzel St. Ritter von Balicki**
Ingenieur des galizischen Landeseisenbahnamts.

Mit 5 Textabbildungen und 1 Tafel.



BERLIN 1910
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

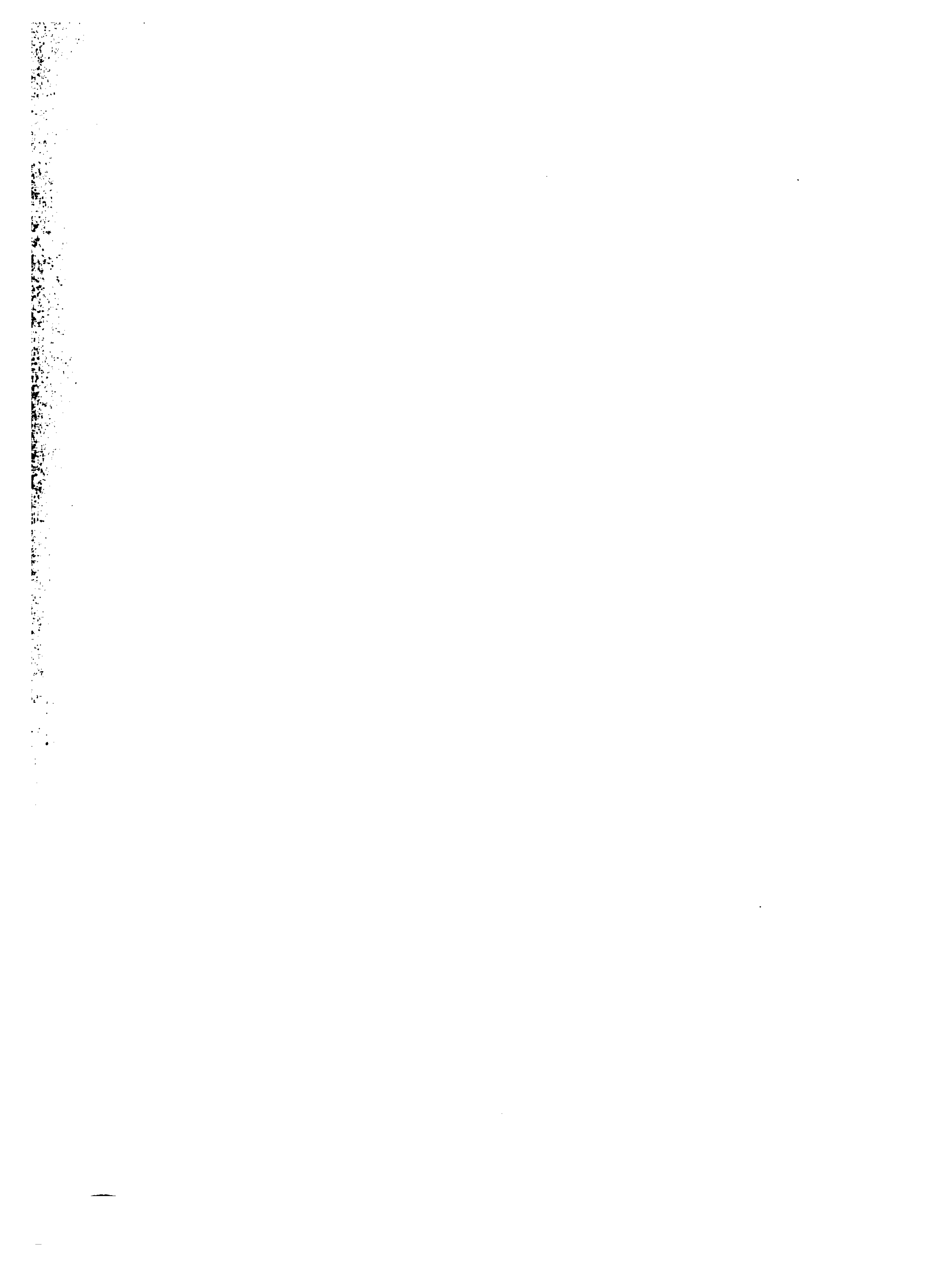
VORWORT.

Die vorliegende Arbeit konnte wegen Raummangels in der Zeitschrift „Beton und Eisen" nicht erscheinen. Sie als „Forscherheft" drucken zu lassen, war der Gedanke des Herrn Dr. Ing. Fritz Edlen von Emperger, k. k. Oberbaurat; für seine entgegenkommende Freundlichkeit sei es mir erlaubt, ihm meinen besten Dank auszusprechen.

Da das Forscherheft eine weitere Ausdehnung der Arbeit zuließ, so wurde dieselbe durch zwei Beispiele ergänzt, welche vielleicht nicht ohne Nutzen sein werden.

Kamionka Strum, im März 1910.

Der Verfasser.



INHALTSVERZEICHNIS.

Einleitung.

Der große Aufschwung von Betoneisenkonstruktionen bürgerte neue Formen der Träger ein, welche früher kaum gebraucht waren. So erwiesen sich die Träger im Leitersystem, vom Erfinder Vierendeelträger genannt, sehr brauchbar. Es folgen immer neue Ausführungen in dieser Bauart, die kaum vor zwölf Jahren auftauchte[1]). In jener Zeit herrschten andere Anschauungen. Den Vierendeelträgern leugnete man alle Vorteile ab; manche behaupteten sogar, solch ein Träger werde in Wirklichkeit nicht halten. Es folgten aber Versuche mit einer Probebrücke, vom Erfinder selbst projektiert, in Tervueren[2]). Sehr strenge Belastungsversuche, die einige Monate lang dauerten und bei welchen die Inanspruchnahme des Materials an verschiedenen Stellen des Trägers gemessen sowie die Durchbiegung und das Verhalten der Brücke beobachtet wurde, waren bis zum Bruche durchgeführt. Auf Grund dieser Versuche wurde von den Ingenieuren Lambin und Christophe, welche die Experimente leiteten, ein ausführlicher Bericht veröffentlicht[3]). Es wurden hierin die Vierendeel-

[1]) Zwei solcher Brücken befinden sich seit etwa 50 Jahren in Abbeville auf der Hauptlinie Paris—Boulogne-sur-mer: eine Drehbrücke von 27,60 m Lichtweite und eine feste Brücke von 10 m Lichtweite. Vergl. *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils de France.* 1900. *A. Vierendeel. Théorie générale des poutres Vierendeel.* Erschien auch als Abdruck. — S. 64, 65, Bericht des Ingenieurs Chaudy.

[2]) *Belastungsversuche an einer eisernen Brücke in Tervueren.* Schweizerische Bauzeitung 1897, S. 99 und 1898, S. 48 u. 74.

Le pont système Vierendeel. Expériences de Tervueren-les-Bruxelles. A. Vierendeel. 1898.

Rapport sur les expériences de Tervueren. Lambin et Christophe. Annales des Travaux publics de Belgique 1898

Le pont Vierendeel. Examen du rapport de MM. les Ingénieurs des Ponts et Chaussées Lambin et Christophe sur les expériences de Tervueren. A. Vierendeel. Annales des Travaux publics de Belgique 1898.

[3]) Vergl. die vorherige Fußnote.

träger als fast gleichwertig mit den gewöhnlichen Gitterträgern erklärt; die Inanspruchnahme stimmte im allgemeinen mit der vom Professor Vierendeel berechneten.

Seit dieser Zeit begann ein Umschwung in den Anschauungen. Das neue System weckte immer neues Interesse auf, welches durch theoretische Aufsätze noch gesteigert wurde.

Die Berechnungsweise wurde vereinfacht. Professor Andruzzi von Pisa[4]) hat das große Verdienst, folgende einfache Formel für die Berechnung der Parallelträger eingeführt zu haben[5]):

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \frac{6D}{H} \Sigma_0^r \pi - \frac{3D}{H} M_r^{r+1} \quad . \ . \ . \quad 1)$$

in welcher

π_r, π_{r+1} horizontale (Tangential-) Kräfte in der Ständermitte

M_r^{r+1} das Biegungsmoment in der Mitte zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{ten}$ Ständer

H die Höhe des Trägers (Abstand der Schwerpunkte des Ober- und Untergurtes)

D die Feldweite

bezeichnet.

Die Berechnung der horizontalen Kräfte π nach der oben erwähnten Formel ist zwar einfach, aber für den praktischen Ingenieur zu umständlich, weil sie eine sehr große Gewissenhaftigkeit erfordert, um genaue Schlußergebnisse zu liefern. So ist der Fall nicht selten, daß man auf 12 Dezimalen genau rechnen muß, um die richtigen Werte der π in Kilogramm (3 Dezimalen) zu erhalten.

Diese sonst übliche Berechnungsweise zu vereinfachen, ist der Zweck unserer Arbeit. Es drängt sich der Gedanke, daß sich dies in einer höchst überschaulichen Weise auf Grund der Einflußlinien durchführen läßt.

---

[4]) *Il Ponte Vierendeel e la sua calcolazione. Andruzzi. Giornale del genio civile* 1899. Eine französische Uebersetzung erschien im *Bulletin de l'Union des Ingénieurs de Louvain.* 1899.

[5]) Vergl. auch Beton u. Eisen 1907. *Dr. F. Gebauer, Eisenbetonträger für große Spannweiten, System Vierendeel.* S. 254, Formel 9.

I. Genaue Einflußl

Um die Einflußlinien zu erhalten, läßt
(eine Tonne) der Reihe nach in einem jede
gegebenen Trägers wirken und berechnet
die dadurch hervorgerufenen Kräfte π. D
in Tabellen zusammengestellt, wie solche
liche Träger schon lange existieren[1]. S
praktisch anwendbar zu sein, sollen na
Trägerhöhen (H), verschiedene Knotenw
schiedene Stützweiten $l = n \cdot D$ aufweisen.
leicht nachweisen, daß die Kräfte π diese

Stützweite $l = n \cdot D$ und das Verhältnis α

Schlankheit des Trägers nennen, unveränd

Die Gleichung 1) kann man nämlic
(vergl. Abb. 1)

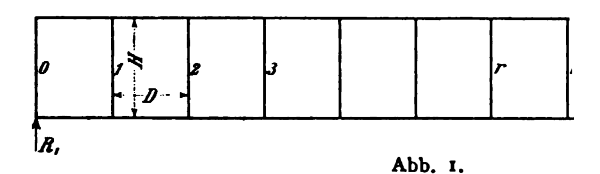


Abb. 1.

$$M_r^{r+1} = R_1 \left(r D + \frac{D}{2}\right)$$

ist (so unter Berücksichtigung, daß $\frac{H}{D} = \omega$

$$\pi_{r+1} = \pi_r + \frac{6}{\omega} \Sigma_0^r \pi - \frac{3(2r \ldots}{\omega^2}$$

---

[1] *Dr.-Ing. Arthur Lederer. Analytische Ermitt*
von Einflußlinien einiger im Eisenbetonbau häufig vo
unbestimmten Träger. Berlin 1908. Wilhelm Ernst u
Gustav Griot. Konstinuierliche Träger. Inte
zum raschen Auftragen der Einflußlinien für Mome
sowie der Kurven für verteilte Lasten. Zürich 1904.
Dupuy et Cuënot. Annales des Ponts et Chaus
A. Cart et L. Portes. Caleul des Ponts Métalli
des lignes d'influence. Paris 1895.

Diese Formel läßt ohne weiteres erkennen, daß die Größen π nur vom Verhältnis ω und von der Auflagerreaktion R_1, welche von der Gestalt des Trägers nicht beeinflußt wird, abhängig sind.

Es wurden deshalb nur 4 Tabellen (auf 4 Dezimalen genau) verfaßt, und zwar für $\omega = 0{,}5,\ 1{,}0,\ 1{,}5,\ 2{,}0$ und für (n = der Zahl der Feldweiten) $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots 10$.

Als Beispiel, wie man zu diesen Werten gelangt, die später folgen, möge die folgende kleine Zwischenrechnung dienen.

Beispiel 1.

Man soll die horizontalen Kräfte π für einen Träger von der Schlankheit $\omega = 1{,}0$ und für $n = 9$ berechnen, wenn die äußere Kraft $P = 1$ t in der Vertikalen des zweiten Ständers angreift (vergl. Abb. 2).

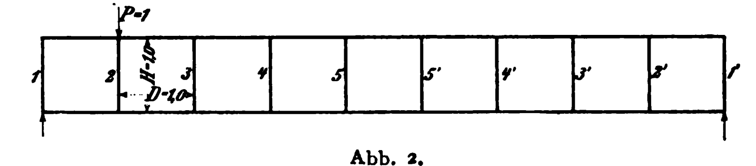


Abb. 2.

Nimmt man $H = 1$ an, so folgt $\left(\omega = \frac{H}{D} = 1{,}0\right)$ $D = 1$,

und diese Werte in 1) eingesetzt:

$$\pi_{r+1} = \pi_r + 6\,\Sigma_0^r\,\pi - 6\,M_r^{r+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{a)}$$

Die ganze Rechnung geschieht am zweckmäßigsten tabellarisch. Es sind zuerst die Momente M_r^{r+1} zu ermitteln:

Bezeichnung des Feldes	M_r^{r+1}	$6\,M_r^{r+1}$
(1 — 2)	0,444 444 45	2,666 666 7
(2 — 3)	0,833 333 25	4,999 999 5
(3 — 4)	0,722 222 15	4,333 332 9
(4 — 5)	0,611 111 05	3,666 666 3
(5 — 5′)	0,499 999 95	2,999 999 7
(5′ — 4′)	0,388 888 85	2,333 333 1
(4′ — 3′)	0,277 777 75	1,666 666 5
(3′ — 2′)	0,166 666 65	0,999 999 9
(2′ — 1′)	0,055 555 55	0,333 333 3
Summa	3,999 999 65	23,999 997 90
Kontrolle	6 × 3,999 999 65 = 23,999 997 90	

Die so erhaltenen Werte werden in die Formel a) eingesetzt:

$\pi_{r+1} = \pi_r + 6\,\Sigma_0^r \pi - 6\,M_r^{r+1}$			$\Sigma_0^r \pi$
	$\pi_1 =$	π_1	π_1
$\pi_2 = \pi_1 + 6\,\pi_1$	$-\ 2{,}666\,666\,7 =$	$7\,\pi_1 - 2{,}666\,666\,7$	$8\,\pi_1 - 2{,}666\,666\,7$
$\pi_3 = \pi_2 + 6\,(\pi_1 + \pi_2)$	$-\ 4{,}999\,999\,5 =$	$55\,\pi_1 - 23{,}666\,666\,4$	$63\,\pi_1 - 26{,}333\,333\,1$
$\pi_4 = \pi_3 + 6\,(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$	$-\ 4{,}333\,332\,9 =$	$433\,\pi_1 - 185{,}999\,997\,9$	$496\,\pi_1 - 212{,}333\,331\,0$
$\pi_5 = \pi_4 + 6\,(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)$	$-\ 3{,}666\,666\,3 =$	$3{,}409\,\pi_1 - 1\,463{,}666\,650\,2$	$3\,905\,\pi_1 - 1\,675{,}999\,981\,2$
$\pi_5' = \pi_5 + 6\,(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5)$	$-\ 2{,}999\,999\,7 =$	$26\,839\,\pi_1 - 11\,522{,}666\,537\,1$	

Auf dieselbe Weise stellt man Gleichungen auf, von der rechten Seite des Trägers ausgehend:

$\pi_{r+1} = \pi_r + 6\,\Sigma_0^r \pi - 6\,M_r^{r+1}$			$\Sigma_0^r \pi$
	$\pi_1' =$	π_1'	π_1'
$\pi_2' = \pi_1' + 6\,\pi_1'$	$-\ 0{,}333\,333\,3 =$	$7\,\pi_1' - 0{,}333\,333\,3$	$8\,\pi_1' - 0{,}333\,333\,3$
$\pi_3' = \pi_2' + 6\,(\pi_1' + \pi_2')$	$-\ 0{,}999\,999\,9 =$	$55\,\pi_1' - 3{,}333\,333\,0$	$63\,\pi_1' - 3{,}666\,666\,3$
$\pi_4' = \pi_3' + 6\,(\pi_1' + \pi_2' + \pi_3')$	$-\ 1{,}666\,666\,5 =$	$433\,\pi_1' - 26{,}999\,997\,3$	$496\,\pi_1' - 30{,}666\,663\,6$
$\pi_5' = \pi_4' + 6\,(\pi_1' + \pi_2' + \pi_3' + \pi_4')$	$-\ 2{,}333\,333\,1 =$	$3\,409\,\pi_1' - 213{,}333\,312\,0$	$3\,905\,\pi_1' - 243{,}999\,975\,6$

Da die Summe aller π

$$\Sigma \pi = 0,$$

so ist

$$3905\, \pi_1 - 1675{,}999\,981\,2 - 3905\, \pi_1' + 243{,}999\,975\,6 = 0.$$

Hier ist zu beachten, daß das Vorzeichen + für die linke Seite des Trägers zu — für die rechte Seite wird, da beide Vorzeichen auf dasselbe Koordinatensystem zu beziehen sind.

$$3905\, (\pi_1 - \pi_1') - 1432{,}000\,005\,6 = 0,$$

$$\pi_1 - \pi_1' = 0{,}366\,709\,348.$$

Es muß auch π_5' (von der linken Seite) = — π_5' (von der rechten Seite) sein, oder

$$26\,839\, \pi_1 - 11\,522{,}666\,537\,1 = -3409\, \pi_1' + 213{,}333\,312\,0$$

$$26\,839\, \pi_1 + 3409\, (\pi_1 - 0{,}366\,709\,348) = 11\,735{,}999\,849\,1$$

$$30\,248\, \pi_1 = 12\,986{,}112\,019\,832$$

$$\pi_1 = 0{,}429\,321\,344\,2 \qquad \pi_1' = 0{,}062\,611\,996\,2.$$

Da alle anderen π durch π_1, beziehungsweise durch π_1' ausgedrückt sind, so bekommt man diese π durch Substitution. Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

π_1	+ 0,4293	
π_2	+ 0,3386	
π_3		— 0,0540
π_4		— 0,1039
π_5		— 0,1102
π_5'		— 0,1110
π_4'		— 0,1110
π_3'		— 0,1103
π_2'		— 0,1049
π_1'		— 0,0626
	+ 0,7679	— 0,7679 = 0

Die Summe aller π muß = 0 sein, was eine Kontrolle der Rechnung ist. Diese Kontrolle ist aber, streng genommen, nicht genügend; es kann $\Sigma = 0$ sein, obgleich die ganze Rechnung fehlerhaft ist.

Die oben ermittelten Werte finden sich in der Tabelle II für $n = 9$ (zweite Kolonne).

In derselben Weise wurden die Ordinaten der Einflußlinien für andere ω und n gefunden.

Tabelle 1

Ordinaten der Einflußlinien für

berechnet nach der Formel $\pi_{r+1} =$

Die Koeffizienten der π sind folgende:

1, 13, 181, 2521, 35 113, 489 061.

$n = 2$

	1	2	1'
π_1	0	0,4615	0
π_2	0	0	0
π_1'	0	— 0,4615	0

$n = 3$

	1	2	2'	1'
π_1	0	0,6377	0,3520	0
π_2	0	0,2901	0,5758	0
π_2'	0	— 0,5758	— 0,2901	0
π_1'	0	— 0,3520	— 0,6377	0

$n = 4$

	1	2	3	2'	1'
π_1	0	0,7269	0,5304	0,2676	0
π_2	0	0,4497	0,8950	0,4784	0
π_3	0	— 0,4306	0	0,4306	0
π_2'	0	— 0,4784	— 0,8950	— 0,4497	0
π_1'	0	— 0,2676	— 0,5304	— 0,7269	0

$n = 5$

	1	2	3	3'	2'	1'
π_1	0	0,7805	0,6375	0,4283	0,2143	0
π_2	0	0,5463	1,0882	0,7682	0,3863	0
π_3	0	— 0,3320	0,1973	0,7265	0,3942	0
π_3'	0	— 0,3942	— 0,7265	— 0,1973	0,3320	0
π_2'	0	— 0,3863	— 0,7682	— 1,0882	— 0,5463	0
π_1'	0	— 0,2143	— 0,4283	— 0,6375	— 0,7805	0

$n = 6$

	1	2	3	4	3'	2'	1'
π_1	0	0,8162	0,7090	0,5355	0,3572	0,1786	0
π_2	0	0,6107	1,2171	0,9615	0,6441	0,3222	0
π_3	0	— 0,2655	0,3301	0,9258	0,6599	0,3322	0
π_4	0	— 0,3284	— 0,5950	0	0,5950	0,3284	0
π_3'	0	— 0,3322	— 0,6599	— 0,9258	— 0,3301	0,2655	0
π_2'	0	— 0,3222	— 0,6441	— 0,9615	— 1,2171	— 0,6107	0
π_1'	0	— 0,1786	— 0,3572	— 0,5355	— 0,7090	— 0,8162	0

$n = 7$

	1	2	3	4	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,8417	0,7600	0,6120	0,4593	0,3062	0,1531	0
π_2	0	0,6568	1,3092	1,0996	0,8282	0,5524	0,2762	0
π_3	0	— 0,2180	0,4252	1,0683	0,8499	0,5697	0,2850	0
π_4	0	— 0,2809	— 0,4999	0,1427	0,7852	0,5662	0,2853	0
π_4'	0	— 0,2853	— 0,5662	— 0,7852	— 0,1427	0,4999	0,2809	0
π_3'	0	— 0,2850	— 0,5697	— 0,8499	— 1,0683	— 0,4252	0,2180	0
π_2'	0	— 0,2762	— 0,5524	— 0,8282	— 1,0996	— 1,3092	— 0,6568	0
π_1'	0	— 0,1531	— 0,3062	— 0,4593	— 0,6120	— 0,7600	— 0,8417	0

$n = 8$

	1	2	3	4	5	4'	3'	2'	1'

$n = 9$

	1	2	3	4	5	5'	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,8758	0,8281	0,7141	0,5954	0,4763	0,3572	0,2382	0,1191	0
π_2	0	0,7182	1,4319	1,2837	1,0737	0,8592	0,6444	0,4296	0,2148	0
π_3	0	— 0,1547	0,5518	1,2583	1,1033	0,8864	0,6650	0,4434	0,2217	0
π_4	0	— 0,2174	— 0,3729	0,3331	1,0391	0,8836	0,6662	0,4443	0,2222	0
π_5	0	— 0,2219	— 0,4393	— 0,5949	0,1111	0,8171	0,6615	0,4441	0,2222	0
π_5'	0	— 0,2222	— 0,4441	— 0,6615	— 0,8171	— 0,1111	0,5949	0,4393	0,2219	0
π_4'	0	— 0,2222	— 0,4443	— 0,6662	— 0,8836	— 1,0391	— 0,3331	0,3729	0,2174	0
π_3'	0	— 0,2217	— 0,4434	— 0,6650	— 0,8864	— 1,1033	— 1,2583	— 0,5518	0,1547	0
π_2'	0	— 0,2148	— 0,4296	— 0,6444	— 0,8592	— 1,0737	— 1,2837	— 1,4319	— 0,7182	0
π_1'	0	— 0,1191	— 0,2382	— 0,3572	— 0,4763	— 0,5954	— 0,7141	— 0,8281	— 0,8758	0

$n = 10$

	1	2	3	4	5	6	5'	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,8877	0,8519	0,7499	0,6430	0,5359	0,4287	0,3215	0,2144	0,1072	0
π_2	0	0,7396	1,4749	1,3482	1,1596	0,9666	0,7733	0,5800	0,3867	0,1933	0
π_3	0	— 0,1325	0,5962	1,3248	1,1920	0,9972	0,7981	0,5986	0,3990	0,1995	0
π_4	0	— 0,1951	— 0,3285	0,3997	1,1280	0,9947	0,7995	0,5999	0,3999	0,2000	0
π_5	0	— 0,1997	— 0,3949	— 0,5282	0,2000	0,9282	0,7948	0,5996	0,4000	0,2000	0
π_6	0	— 0,2000	— 0,3996	— 0,5948	— 0,7282	0	0,7282	0,5948	0,3996	0,2000	0
π_5'	0	— 0,2000	— 0,4000	— 0,5996	— 0,7948	— 0,9282	— 0,2000	0,5282	0,3949	0,1997	0
π_4'	0	— 0,2000	— 0,3999	— 0,5999	— 0,7995	— 0,9947	— 1,1280	— 0,3997	0,3285	0,1951	0
π_3'	0	— 0,1995	— 0,3990	— 0,5986	— 0,7981	— 0,9972	— 1,1920	— 1,3248	— 0,5962	0,1325	0
π_2'	0	— 0,1933	— 0,3867	— 0,5800	— 0,7733	— 0,9666	— 1,1596	— 1,3482	— 1,4749	— 0,7396	0
π_1'	0	— 0,1072	— 0,2144	— 0,3215	— 0,4287	— 0,5359	— 0,6430	— 0,7499	— 0,8519	— 0,8877	0

Tabelle II.

Ordinaten der Einflußlinien für $\omega = 1{,}0$, $\frac{1}{\omega} = 1{,}0$,
$n = 2$—10,

berechnet nach der Formel $\pi_{r+1} = \pi_r + 6\,\Sigma_0^r \pi - 6\,M_r^{r+1}$.

Die Koeffizienten der π sind folgende:

1, 7, 55, 433, 3409, 26 839.

$n = 2$

	1	2	1'
π_1	0	0,2143	0
π_2	0	0	0
π_1'	0	— 0,2143	0

$n = 3$

	1	2	2'	1'
π_1	0	0,3043	0,1794	0
π_2	0	0,1311	0,2560	0
π_2'	0	— 0,2560	— 0,1311	0
π_1'	0	— 0,1794	— 0,3043	0

$n = 4$

	1	2	3	2'	1'
π_1	0	0,3511	0,2727	0,1398	0
π_2	0	0,2076	0,4091	0,2288	0
π_3	0	— 0,1901	0	0,1901	0
π_2'	0	— 0,2288	— 0,4091	— 0,2076	0
π_1'	0	— 0,1398	— 0,2727	— 0,3511	0

$n = 5$

	1	2	3	3'	2'	1'
π_1	0	0,3792	0,3290	0,2242	0,1126	0
π_2	0	0,2547	0,5031	0,3698	0,1880	0
π_3	0	— 0,1421	0,0961	0,3342	0,1912	0
π_3'	0	— 0,1912	— 0,3342	— 0,0961	0,1421	0
π_2'	0	— 0,1880	— 0,3698	— 0,5031	— 0,2547	0
π_1'	0	— 0,1126	— 0,2242	— 0,3290	— 0,3792	0

$n = 6$

	1	2	3	4	3'	2'	1'
π_1	0	0,3980	0,3666	0,2806	0,1877	0,0939	0
π_2	0	0,2861	0,5660	0,4642	0,3138	0,1573	0
π_3	0	— 0,1091	0,1620	0,4330	0,3230	0,1646	0
π_4	0	— 0,1592	- 0,2701	0	0,2701	0,1592	0
π_3'	0	— 0,1646	— 0,3230	— 0,4330	— 0,1620	0,1091	0
π_2'	0	— 0,1573	— 0,3138	— 0,4642	— 0,5660	— 0,2861	0
π_1'	0	— 0,0939	— 0,1877	— 0,2806	— 0,3666	— 0,3980	0

$n = 7$

	1	2	3	4	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,4114	0,3934	0,3208	0,2414	0,1610	0,0805	0
π_2	0	0,3086	0,6111	0,5317	0,4038	0,2697	0,1349	0
π_3	0	— 0,0855	0,2092	0,5039	0,4175	0,2827	0,1417	0
π_4	0	— 0,1356	— 0,2228	0,0710	0,3647	0,2775	0,1418	0
π_4'	0	— 0,1418	— 0,2775	— 0,3647	— 0,0710	0,2228	0,1356	0
π_3'	0	— 0,1417	— 0,2827	— 0,4175	— 0,5039	— 0,2092	0,0855	0
π_2'	0	— 0,1349	— 0,2697	— 0,4038	— 0,5317	— 0,6111	— 0,3086	0
π_1'	0	— 0,0805	— 0,1610	— 0,2414	— 0,3208	— 0,3934	— 0,4114	0

$n = 8$

	1	2	3	4	5	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,4215	[illegible]						

$n = 9$

	1	2	3	4	5	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,4293	0,4292	0,3745	0,3129	0,2504	0,1878	0,1252	0,0626	0
π_2	0	0,3386	0,6710	0,6216	0,5237	0,4197	0,3148	0,2099	0,1049	0
π_3	0	— 0,0540	0,2723	0,5984	0,5436	0,4403	0,3309	0,2206	0,1103	0
π_4	0	— 0,1039	— 0,1594	0,1661	0,4916	0,4360	0,3320	0,2219	0,1110	0
π_5	0	— 0,1102	— 0,2143	— 0,2699	0,0555	0,3809	0,3252	0,2212	0,1110	0
π_5'	0	— 0,1110	— 0,2212	— 0,3252	— 0,3809	— 0,0555	0,2699	0,2143	0,1102	0
π_4'	0	— 0,1110	— 0,2219	— 0,3320	— 0,4360	— 0,4916	— 0,1661	0,1594	0,1039	0
π_3'	0	— 0,1103	— 0,2206	— 0,3309	— 0,4403	— 0,5436	— 0,5984	— 0,2723	0,0540	0
π_2'	0	— 0,1049	— 0,2099	— 0,3148	— 0,4197	— 0,5237	— 0,6216	— 0,6710	— 0,3386	0
π_1'	0	— 0,0626	— 0,1252	— 0,1878	— 0,2504	— 0,3129	— 0,3745	— 0,4292	— 0,4293	0

$n = 10$

	1	2	3	4	5	6	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,4356	0,4417	0,3933	0,3380	0,2817	0,2254	0,1691	0,1127	0,0563	0
π_2	0	0,3491	0,6920	0,6531	0,5657	0,4721	0,3778	0,2834	0,1889	0,0945	0
π_3	0	— 0,0430	0,2943	0,6315	0,5877	0,4954	0,3970	0,2978	0,1986	0,0993	0
π_4	0	— 0,0927	— 0,1372	0,1994	0,5359	0,4915	0,3986	0,2996	0,1998	0,0999	0
π_5	0	— 0,0991	— 0,1920	— 0,2366	0,0999	0,4364	0,3919	0,2989	0,1998	0,1000	0
π_6	0	— 0,0999	— 0,1990	— 0,2919	— 0,3365	0	0,3365	0,2919	0,1990	0,0999	0
π_5'	0	— 0,1000	— 0,1998	— 0,2989	— 0,3919	— 0,4364	— 0,0999	0,2366	0,1920	0,0991	0
π_4'	0	— 0,0999	— 0,1998	— 0,2996	— 0,3986	— 0,4915	— 0,5359	— 0,1994	0,1372	0,0927	0
π_3'	0	— 0,0993	— 0,1986	— 0,2978	— 0,3970	— 0,4954	— 0,5877	— 0,6315	— 0,2943	0,0430	0
π_2'	0	— 0,0945	— 0,1889	— 0,2834	— 0,3778	— 0,4721	— 0,5657	— 0,6531	— 0,6920	— 0,3491	0
π_1'	0	— 0,0563	— 0,1127	— 0,1691	— 0,2254	— 0,2817	— 0,3380	— 0,3933	— 0,4417	— 0,4356	0

Tabelle III.

Ordinaten der Einflußlinien für $\omega = 1{,}5$, $\frac{1}{\omega} = 0{,}6667$,
$n = 2$—10,

berechnet nach der Formel $\pi_{r+1} = \pi_r + 4\,\Sigma_0^r \pi - \frac{8}{3}\, M_r^{r+1}$.

Die Koeffizienten der π sind folgende:

1, 5, 29, 169, 985, 5741.

$n = 2$

	1	2	1'
π_1	0	0,1333	0
π_2	0	0	0
π_1'	0	— 0,1333	0

$n = 3$

	1	2	2'	1'
π_1	0	0,1939	0,1198	0
π_2	0	0,0806	0,1547	0
π_2'	0	— 0,1547	— 0,0806	0
π_1'	0	— 0,1198	— 0,1939	0

$n = 4$

	1	2	3	2'	1'
π_1	0	0,2260	0,1839	0,0959	0
π_2	0	0,1298	0,2529	0,1461	0
π_3	0	— 0,1138	0	0,1138	0
π_2'	0	— 0,1461	— 0,2529	— 0,1298	0
π_1'	0	— 0,0959	— 0,1839	— 0,2260	0

$n = 5$

	1	2	3	3'	2'	1'
π_1	0	0,2454	0,2228	0,1543	0,0778	0
π_2	0	0,1605	0,3142	0,2380	0,1224	0
π_3	0	— 0,0826	0,0623	0,2070	0,1231	0
π_3'	0	— 0,1231	— 0,2070	— 0,0623	0,0826	0
π_2'	0	— 0,1224	— 0,2380	— 0,3142	— 0,1605	0
π_1'	0	— 0,0778	— 0,1543	— 0,2228	— 0,2454	0

$n = 6$

	1	2	3	4	3'	2'	1'
π_1	0	0,2584	0,2488	0,1933	0,1298	0,0650	0
π_2	0	0,1811	0,3554	0,2998	0,2048	0,1030	0
π_3	0	— 0,0609	0,1057	0,2722	0,2098	0,1083	0
π_4	0	— 0,1023	— 0,1655	0	0,1655	0,1023	0
π_3'	0	— 0,1083	— 0,2098	— 0,2722	— 0,1057	0,0609	0
π_2'	0	— 0,1030	— 0,2048	— 0,2998	— 0,3554	— 0,1811	0
π_1'	0	— 0,0650	— 0,1298	— 0,1933	— 0,2488	— 0,2584	0

$n = 7$

	1	2	3	4	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,2677	0,2674	0,2212	0,1670	0,1115	0,0558	0
π_2	0	0,1958	0,3849	0,3440	0,2637	0,1767	0,0884	0
π_3	0	—0,0453	0,1370	0,3191	0,2724	0,1865	0,0938	0
π_4	0	—0,0866	—0,1342	0,0469	0,2281	0,1804	0,0936	0
π_4'	0	—0,0936	—0,1804	—0,2281	—0,0469	0,1342	0,0866	0
π_3'	0	—0,0938	—0,1865	—0,2724	—0,3191	—0,1370	0,0453	0
π_2'	0	—0,0884	—0,1767	—0,2637	—0,3440	—0,3849	—0,1958	0
π_1'	0	—0,0558	—0,1115	—0,1670	—0,2212	—0,2674	—0,2677	0

$n = 8$

	1	2	3	4	5	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,2747	0,2814	0,2421	0,1949	0,1464	0,0976	0,0488	0
π_2	0	0,2068	0,4070	0,3772	0,3079	0,2319	0,1548	0,0774	0
π_3	0	0,0335	0,1605	0,3544	0,3195	0,2453	0,1643	0,0823	0
π_4	0	—0,0748	—0,1105	0,0825	0,2755	0,2397	0,1647	0,0829	0
π_5	0	—0,0818	—0,1570	—0,1929	0	0,1929	0,1570	0,0818	0
π_4'	0	—0,0829	—0,1647	—0,2397	—0,2755	—0,0825	0,1105	0,0748	0
π_3'	0	—0,0823	—0,1643	—0,2453	—0,3195	—0,3544	—0,1605	0,0335	0
π_2'	0	—0,0774	—0,1548	—0,2319	—0,3079	—0,3772	—0,4070	—0,2068	0
π_1'	0	—0,0488	—0,0976	—0,1464	—0,1949	—0,2421	—0,2814	—0,2747	0

$n = 9$

	1	2	3	4	5	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,2801	0,2922	0,2584	0,2166	0,1735	0,1302	0,0868	0,0434	0
π_2	0	0,2155	0,4242	0,4030	0,3424	0,2749	0,2064	0,1376	0,0688	0
π_3	0	— 0,0244	0,1788	0,3818	0,3560	0,2910	0,2192	0,1463	0,0732	0
π_4	0	— 0,0655	— 0,0920	0,1102	0,3124	0,2859	0,2201	0,1476	0,0739	0
π_5	0	— 0,0726	— 0,1385	— 0,1652	0,0369	0,2390	0,2123	0,1464	0,0738	0
π_5'	0	— 0,0738	— 0,1464	— 0,2123	— 0,2390	— 0,0369	0,1652	0,1385	0,0726	0
π_4'	0	— 0,0739	— 0,1476	— 0,2201	— 0,2859	— 0,3124	— 0,1102	0,0920	0,0655	0
π_3'	0	— 0,0732	— 0,1463	— 0,2192	— 0,2910	— 0,3560	— 0,3818	— 0,1788	0,0244	0
π_2'	0	— 0,0688	— 0,1376	— 0,2064	— 0,2749	— 0,3424	— 0,4030	— 0,4242	— 0,2155	0
π_1'	0	— 0,0434	— 0,0868	— 0,1302	— 0,1735	— 0,2166	— 0,2584	— 0,2922	— 0,2801	0

$n = 10$

	1	2	3	4	5	6	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,2845	0,3009	0,2714	0,2340	0,1952	0,1562	0,1172	0,0781	0,0391	0
π_2	0	0,2223	0,4380	0,4236	0,3699	0,3094	0,2477	0,1858	0,1238	0,0619	0
π_3	0	— 0,0171	0,1934	0,4038	0,3853	0,3276	0,2631	0,1975	0,1317	0,0659	0
π_4	0	— 0,0582	— 0,0773	0,1324	0,3420	0,3228	0,2644	0,1993	0,1330	0,0665	0
π_5	0	— 0,0652	— 0,1237	— 0,1430	0,0665	0,2760	0,2568	0,1982	0,1330	0,0666	0
π_6	0	— 0,0663	— 0,1317	— 0,1902	— 0,2095	0	0,2095	0,1902	0,1317	0,0663	0
π_5'	0	— 0,0666	— 0,1330	— 0,1982	— 0,2568	— 0,2760	— 0,0665	0,1430	0,1237	0,0652	0
π_4'	0	— 0,0665	— 0,1330	— 0,1993	— 0,2644	— 0,3228	— 0,3420	— 0,1324	0,0773	0,0582	0
π_3'	0	— 0,0659	— 0,1317	— 0,1975	— 0,2631	— 0,3276	— 0,3853	— 0,4038	— 0,1934	0,0171	0
π_2'	0	— 0,0619	— 0,1238	— 0,1858	— 0,2477	— 0,3094	— 0,3699	— 0,4236	— 0,4380	— 0,2223	0
π_1'	0	— 0,0391	— 0,0781	— 0,1172	— 0,1562	— 0,1952	— 0,2340	— 0,2714	— 0,3009	— 0,2845	0

Tabelle IV.

Ordinaten der Einflußlinien für $\omega = 2{,}0$, $\frac{1}{\omega} = 0{,}5$,
$n = 2$—10,

berechnet nach der Formel $\pi_{r+1} = \pi_r + 3\,\Sigma_0^r \pi - \frac{3}{2}\,M_r^{r+1}$.

Die Koeffizienten der π sind folgende:

1, 4, 19, 91, 436, 2089.

$n = 2$

	1	2	1'
π_1	0	0,0937	0
π_2	0	0	0
π_1'	0	— 0,0937	0

$n = 3$

	1	2	2'	1'
π_1	0	0,1391	0,0891	0
π_2	0	0,0565	0,1065	0
π_2'	0	— 0,1065	— 0,0565	0
π_1'	0	— 0,0891	— 0,1391	0

$n = 4$

	1	2	3	2'	1'
π_1	0	0,1637	0,1382	0,0732	0
π_2	0	0,0922	0,1776	0,1051	0
π_3	0	— 0,0776	0	0,0776	0
π_2'	0	— 0,1051	— 0,1776	— 0,0922	0
π_1'	0	— 0,0732	— 0,1382	— 0,1637	0

$n = 5$

	1	2	3	3'	2'	1'
π_1	0	0,1787	0,1682	0,1182	0,0599	0
π_2	0	0,1147	0,2227	0,1727	0,0898	0
π_3	0	— 0,0548	0,0454	0,1454	0,0889	0
π_3'	0	— 0,0889	— 0,1454	— 0,0454	0,0548	0
π_2'	0	— 0,0898	— 0,1727	— 0,2227	— 0,1147	0
π_1'	0	— 0,0599	— 0,1182	— 0,1682	— 0,1787	0

$n = 6$

	1	2	3	4	3'	2'	1'
π_1	0	0,1887	0,1883	0,1483	0,1002	0,0503	0
π_2	0	0,1300	0,2532	0,2184	0,1507	0,0760	0
π_3	0	— 0,0387	0,0776	0,1937	0,1531	0,0800	0
π_4	0	— 0,0737	— 0,1151	0	0,1151	0,0737	0
π_3'	0	— 0,0800	— 0,1531	— 0,1937	— 0,0776	0,0387	0
π_2'	0	— 0,0760	— 0,1507	— 0,2184	— 0,2532	— 0,1300	0
π_1'	0	— 0,0503	— 0,1002	— 0,1483	— 0,1883	— 0,1887	0

$n = 7$

	1	2	3	4	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,1959	0,2027	0,1699	0,1289	0,0862	0,0432	0
π_2	0	0,1409	0,2750	0,2511	0,1943	0,1306	0,0654	0
π_3	0	— 0,0271	0,1009	0,2286	0,1997	0,1382	0,0698	0
π_4	0	— 0,0621	— 0,0919	0,0348	0,1615	0,1317	0,0692	0
π_4'	0	— 0,0692	— 0,1317	— 0,1615	— 0,0348	0,0919	0,0621	0
π_3'	0	— 0,0698	— 0,1382	— 0,1997	— 0,2286	— 0,1009	0,0271	0
π_2'	0	— 0,0654	— 0,1306	— 0,1943	— 0,2511	— 0,2750	— 0,1409	0
π_1'	0	— 0,0432	— 0,0862	— 0,1289	— 0,1699	— 0,2027	— 0,1959	0

$n = 8$

	1	2	3	4	5	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,2013	0,2135	0,1861	0,1505	0,1132	0,0755	0,0378	0
π_2	0	0,1491	0,2914	0,2757	0,2271	0,1715	0,1146	0,0573	0
π_3	0	— 0,0183	0,1184	0,2549	0,2348	0,1820	0,1224	0,0613	0
π_4	0	— 0,0533	— 0,0742	0,0614	0,1970	0,1760	0,1223	0,0619	0
π_5	0	— 0,0605	— 0,1143	— 0,1354	0	0,1354	0,1143	0,0605	0
π_4'	0	— 0,0619	— 0,1223	— 0,1760	— 0,1970	— 0,0614	0,0742	0,0533	0
π_3'	0	— 0,0613	— 0,1224	— 0,1820	— 0,2348	— 0,2549	— 0,1184	0,0183	0
π_2'	0	— 0,0573	— 0,1146	— 0,1715	— 0,2271	— 0,2757	— 0,2914	— 0,1491	0
π_1'	0	— 0,0378	— 0,0755	— 0,1132	— 0,1505	— 0,1861	— 0,2135	— 0,2013	0

$n = 9$

	1	2	3	4	5	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,2055	0,2219	0,1987	0,1673	0,1342	0,1007	0,0671	0,0336	0
π_2	0	0,1555	0,3041	0,2948	0,2525	0,2034	0,1528	0,1019	0,0510	0
π_3	0	— 0,0115	0,1321	0,2754	0,2621	0,2161	0,1633	0,1091	0,0546	0
π_4	0	— 0,0463	— 0,0604	0,0821	0,2246	0,2105	0,1638	0,1103	0,0553	0
π_5	0	— 0,0536	— 0,1005	— 0,1147	0,0276	0,1699	0,1557	0,1088	0,0551	0
π_5'	0	— 0,0551	— 0,1088	— 0,1557	— 0,1699	— 0,0276	0,1147	0,1005	0,0536	0
π_4'	0	— 0,0553	— 0,1103	— 0,1638	— 0,2105	— 0,2246	— 0,0821	0,0604	0,0463	0
π_3'	0	— 0,0546	— 0,1091	— 0,1633	— 0,2161	— 0,2621	— 0,2754	— 0,1321	0,0115	0
π_2'	0	— 0,0510	— 0,1019	— 0,1528	— 0,2034	— 0,2525	— 0,2948	— 0,3041	— 0,1555	0
π_1'	0	— 0,0336	— 0,0671	— 0,1007	— 0,1342	— 0,1673	— 0,1987	— 0,2219	— 0,2055	0

$n = 10$

	1	2	3	4	5	6	5′	4′	3′	2′	1′
π_1	0	0,2089	0,2286	0,2088	0,1807	0,1510	0,1208	0,0907	0,0604	0,0302	0
π_2	0	0,1606	0,3143	0,3101	0,2729	0,2289	0,1834	0,1376	0,0917	0,0459	0
π_3	0	— 0,0061	0,1430	0,2918	0,2839	0,2434	0,1961	0,1473	0,0983	0,0491	0
π_4	0	— 0,0408	— 0,0493	0,0987	0,2468	0,2382	0,1970	0,1490	0,0995	0,0498	0
π_5	0	— 0,0481	— 0,0894	— 0,0981	0,0498	0,1976	0,1890	0,1476	0,0995	0,0499	0
π_6	0	— 0,0496	— 0,0978	— 0,1391	— 0,1478	0	0,1478	0,1391	0,0978	0,0496	0
π_5'	0	— 0,0499	— 0,0995	— 0,1476	— 0,1890	— 0,1976	— 0,0498	0,0981	0,0894	0,0481	0
π_4'	0	— 0,0498	— 0,0995	— 0,1490	— 0,1970	— 0,2382	— 0,2468	— 0,0987	0,0493	0,0408	0
π_3'	0	— 0,0491	— 0,0983	— 0,1473	— 0,1961	— 0,2434	— 0,2839	— 0,2918	— 0,1430	0,0061	0
π_2'	0	— 0,0459	— 0,0917	— 0,1376	— 0,1834	— 0,2289	— 0,2729	— 0,3101	— 0,3143	— 0,1606	0
π_1'	0	— 0,0302	— 0,0604	— 0,0907	— 0,1208	— 0,1510	— 0,1807	— 0,2088	— 0,2286	— 0,2089	0

Anordnung und Anwendung der Tabellen.

Wie schon oben bemerkt, sind die Tabellen auf ähnliche Weise zusammengestellt, wie solche für kontinuierliche Träger. Für die vier Werte der ω (0,5, 1,0, 1,5, 2,0) ist jede Tabelle für $n = 2$ bis $n = 10$ berechnet worden. Außer den charakteristischen Werten ω wurden noch die reziproken Werte $\frac{1}{\omega}$ und die Koeffizienten der π, welche von der Belastung unabhängig sind, also bei jeder Belastung dieselben bleiben, angegeben.

Um die Einflußlinie einer gewissen Kraft, z. B. π_4, zu zeichnen, trägt man aus der entsprechenden Tabelle die Ordinaten der Zeile π_4 der Reihe nach von links nach rechts ab.

Es kann aber auch der Fall vorkommen, daß das Verhältnis ω einen anderen Wert hat als die vier angegebenen Werte $\omega = 0{,}5$, 1,0, 1,5, 2,0; alsdann ist zwischen zwei benachbarten Werten von $\frac{1}{\omega}$ (nicht ω!) geradlinig zu interpolieren, da diese Größen $\frac{1}{\omega}$ fast genau auf Geraden liegen.

Um zu zeigen, wie genau die so interpolierten Werte sind, möge ein numerisches Beispiel folgen.

Beispiel 2.

Es sollen Einflußlinien der π für den Träger, welcher vom Professor Vierendeel als Probebrücke in Tervueren[1]) projektiert wurde, ermittelt werden.

Der Träger ist durch die Stützweite $l = 31{,}50$ m, die Anzahl der Feldweiten $n = \frac{l}{D} = \frac{31{,}50}{3{,}50} = 9$ und das Verhältnis $\frac{1}{\omega} = 1{,}167$ gegeben — man muß also zwischen den entsprechenden Werten der Tabelle II $\left(\frac{1}{\omega} = 1{,}0\right)$ und der Tabelle I $\left(\frac{1}{\omega} = 2{,}0\right)$ interpolieren.

---

[1]) Vergl. z. B. *Théorie générale des Poutres Vierendeel. A. Vierendeel.* Paris 1900.

Die graphische Interpolation (in kleinem Maßstabe) gab folgende Resultate:

	1	2	3	4	5	5'	4'	3'	2'	1'
π_1	0	0,481	0,475	0,413	0,348	0,276	0,211	0,138	0,069	0
π_2	0	0,381	0,756	0,702	0,588	0,472	0,353	0,234	0,120	0
π_3	0	— 0,069	0,304	0,677	0,609	0,495	0,370	0,250	0,121	0
π_4	0	— 0,126	— 0,140	0,186	0,554	0,488	0,371	0,250	0,128	0
π_5	0	— 0,123	— 0,240	— 0,308	0,112	0,430	0,365	0,248	0,123	0

Auf Grund dieser Werte wurden die Einflußlinien der horizontalen Kräfte π_1, π_2, π_3, π_4, π_5 auf der Tafel I eingetragen (oben — „Genaue Einflußlinien").

Belastet man den Träger gleichmäßig mit einer Knotenlast von 5,8 t, für welche Belastung die Probebrücke berechnet wurde, so erhält man aus diesen Einflußlinien:

$$\pi_1 = 27{,}956 \text{ t}$$
$$\pi_2 = 41{,}830 \text{ t}$$
$$\pi_3 = 31{,}981 \text{ t}$$
$$\pi_4 = 19{,}848 \text{ t}$$
$$\pi_5 = 7{,}041 \text{ t.}$$

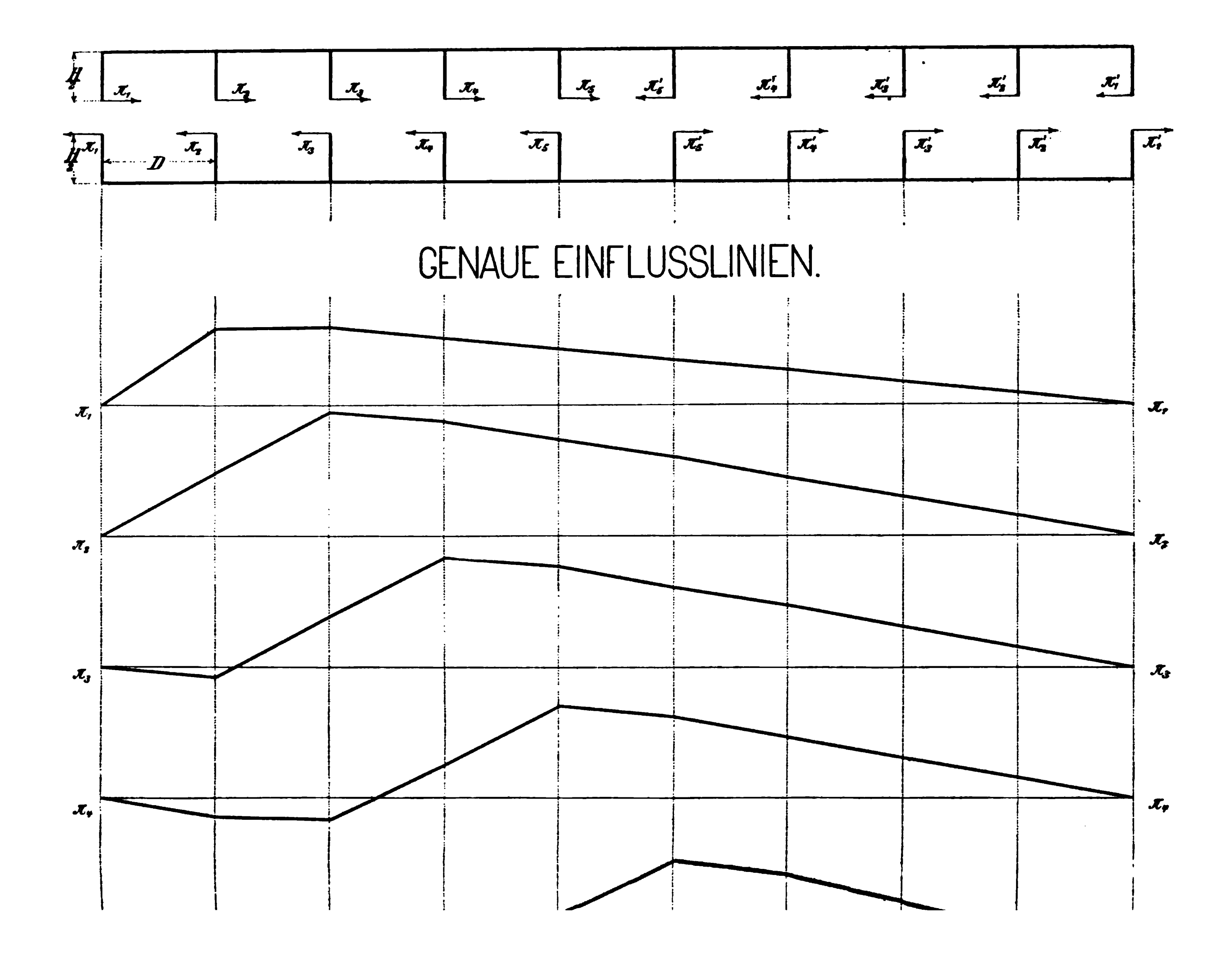
Rechnet man aber nach der Formel 1), so folgen dieselben Kräfte:

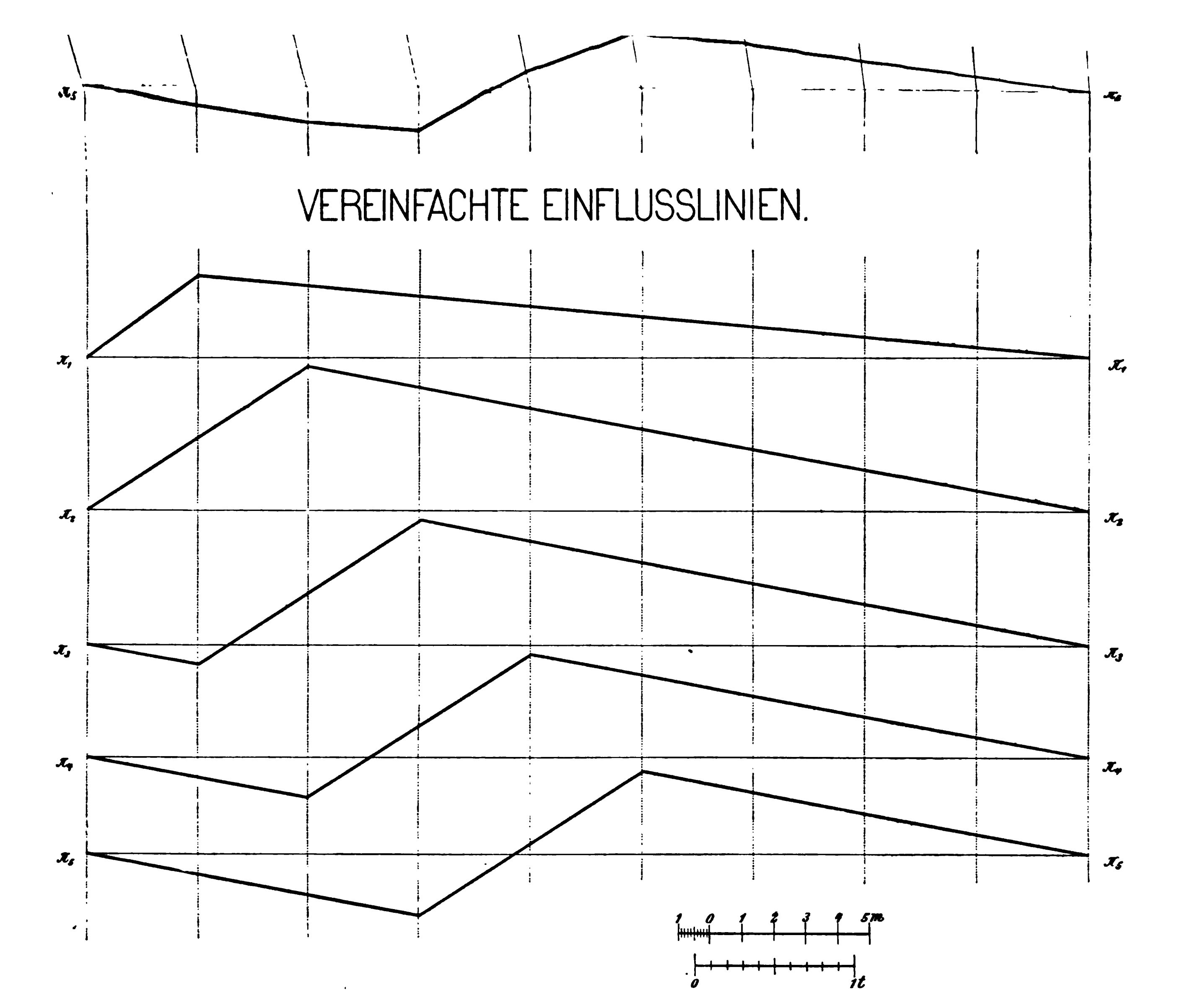
$$\pi_1 = 29{,}158 \text{ t}$$
$$\pi_2 = 43{,}795 \text{ t}$$
$$\pi_3 = 33{,}431 \text{ t}$$
$$\pi_4 = 20{,}255 \text{ t}$$
$$\pi_5 = 6{,}763 \text{ t.}$$

Ein Vergleich zeigt, daß die größte Differenz 4 bis 5 vH. beträgt, was die Zulässigkeit der geradlinigen Interpolation bestätigt[1]).

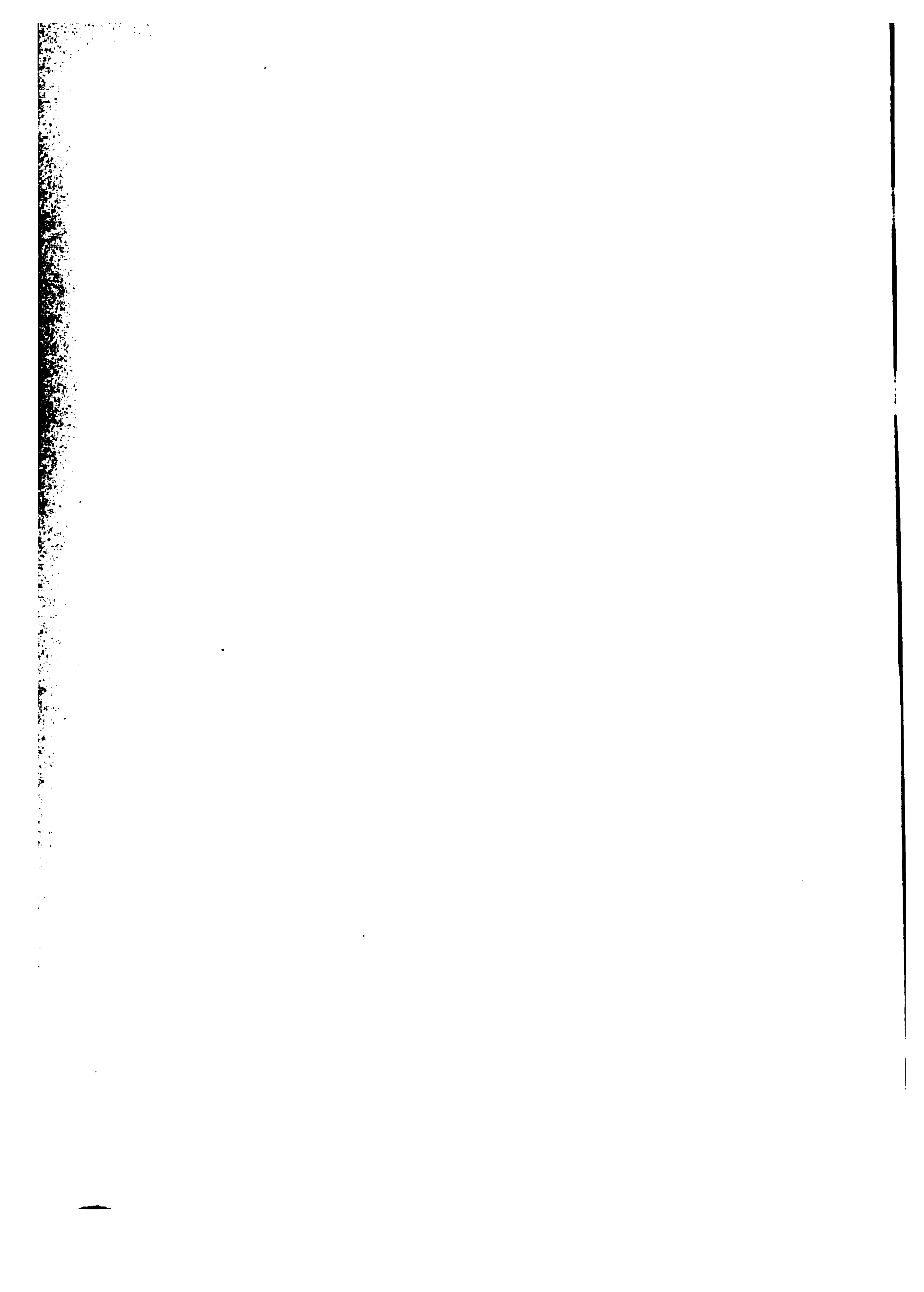
[1]) Hier wurde das Beispiel absichtlich so gewählt, daß die Werte $\frac{1}{\omega}$ in den Tabellen am meisten entfernt waren, 1,0 und 2,0; viel genauer wird die Interpolation ausfallen, wenn dieselbe zwischen den Werten 0,5 und 0,6667, oder 0,6667 und 1,0 durchgeführt sein wird.

Einflußlinien für die Berechnung paralleler Vierendeelträger.





Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.



II. Vereinfachte Einflußlinien.

Wie bekannt, besteht die angenäherte Rechnungsweise[2]) der parallelen Vierendeelträger darin, daß man auf der Hälfte jedes Stabes, mit Ausnahme eines beliebigen Ständers (z. B. in der Mitte), je ein Gelenk annimmt (vergl. Abb. 3). Ein solcher Träger ist statisch bestimmt und läßt sich sehr leicht dimensionieren.

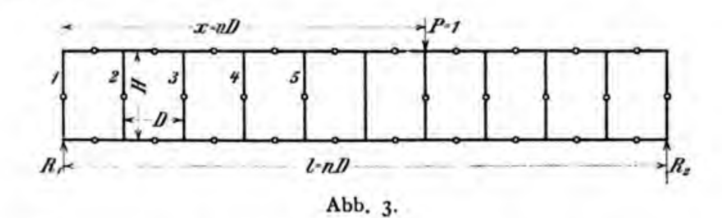


Abb. 3.

Das so vereinfachte Verfahren kann man manchmal mit Vorteil verwenden, und es soll deshalb diese Methode auf Grund der Einflußlinien geprüft werden, woraus man wieder den Schluß ziehen kann, wie genaue Resultate sie liefert.

Nehmen wir also an, es wirke auf einen solchen Träger die Kraft $P = 1$ (vergl. Abb. 3). Die horizontale Kraft π_1

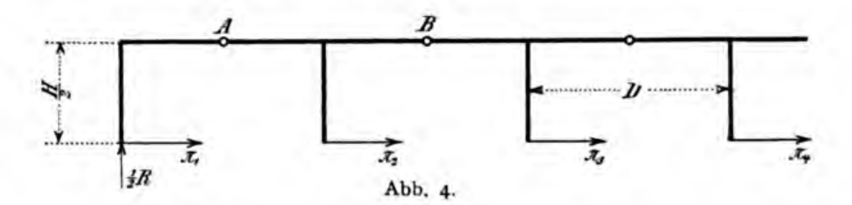


Abb. 4.

erübrigt aus der Momentengleichung des ersten Teiles des Trägers, bezogen auf den Punkt A (vergl. Abb. 4):

$$\frac{R_1}{2} \cdot \frac{D}{2} = \pi_1 \cdot \frac{H}{2}, \qquad \pi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{D}{H} \cdot \quad 3)$$

[2]) Vergl. z. B. Luigi Vianello, Der Eisenbau. München und Berlin 1905, S. 210.

Auf dieselbe Weise wird π_2 erhalten, und zwar aus der Momentengleichung der beiden ersten Teile des Trägers in bezug auf das Gelenk B (vergl. Abb. 4):

$$\frac{R_1}{2} \cdot \frac{3}{2} D - (\pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{H}{2} = 0,$$

woraus durch Substitution der Werte R_1 und π_1

$$\pi_2 = \frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{D}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Die Formel 4) bleibt dieselbe für alle horizontalen Kräfte π, welche sich links von der äußeren Kraft $P = 1$ befinden.

Um die Werte dieser π zu bekommen, die rechts von der Kraft $P = 1$ liegen, muß man auf analoge Weise verfahren (vergl. Abb. 5).

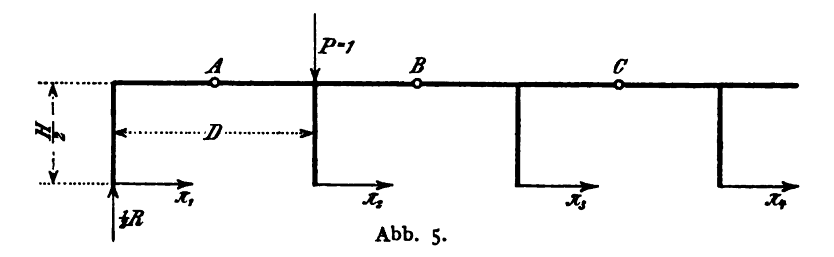


Abb. 5.

Es leuchtet ein, daß die Kraft π_1 dieselbe bleibt wie oben:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{D}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Aus der Momentengleichung in bezug auf den Punkt B

$$\frac{R_1}{2} \cdot \frac{3}{2} D - \frac{P}{2} \cdot \frac{D}{2} - (\pi_1 + \pi_2) \frac{H}{2} = 0$$

folgt

$$\pi_2 = \frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{D}{H} - \frac{1}{2} P \cdot \frac{D}{H} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Analog ist für π_3 die Momentengleichung

$$\frac{R_1}{2} \cdot \frac{5}{2} D - \frac{P}{2} \cdot \frac{3}{2} D - (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \cdot \frac{H}{2} = 0$$

und nach Substitution der entsprechenden Werte

$$\pi_3 = \frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{D}{H} - P \cdot \frac{D}{H} \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Diese Gleichung ist für alle anderen π, die sich rechts von der Kraft $P = 1$ befinden, gültig.

Aus den Formeln 3) bis 6) erkennt man, daß die vereinfachten Einflußlinien für parallele Vierendeelträger der Auflagerreaktion proportional sind, daß sie also dieselbe Gestalt haben, wie die Einflußlinien der Querkräfte eines auf zwei Stützen frei aufliegenden Trägers.

Nach den Formeln 3) bis 6) wurden die Ordinaten der vereinfachten Einflußlinien in 4 Tabellen (I', II', III', IV') berechnet, und zwar für dieselbe Schlankheit des Trägers, für welche die genauen Einflußlinien ermittelt wurden, d. h. für $\omega = 0{,}5,\ 1{,}0,\ 1{,}5,\ 2{,}0$. Um die Ordinaten der beiden Einflußlinien zu vergleichen, wurde bei jeder Ordinate die Differenz Δ (in vH.) zwischen der Ordinate der genauen (Tabelle I bis IV) und der vereinfachten Einflußlinie (Tabelle I' bis IV') angegeben.

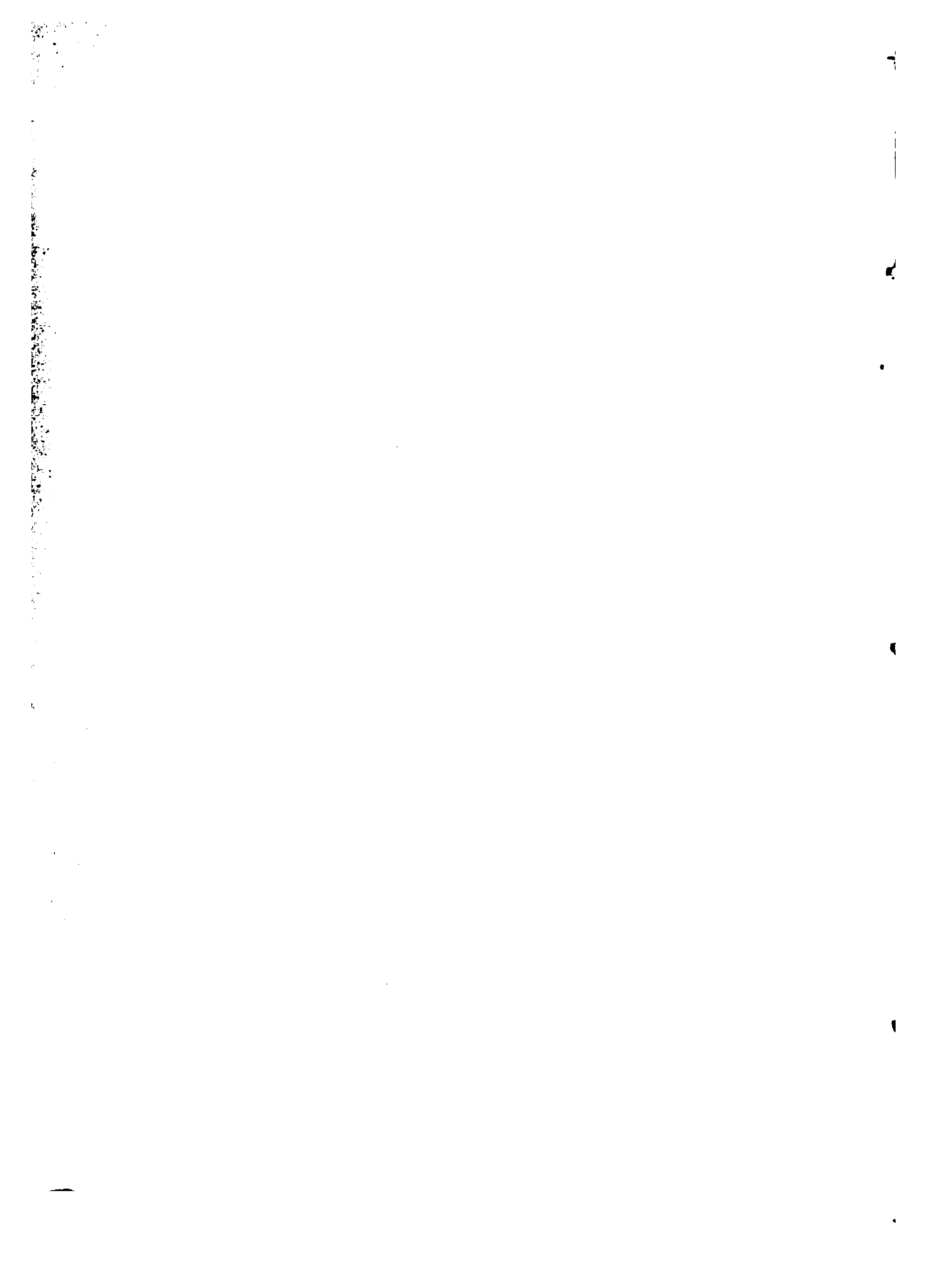


Tabelle I'.

Ordinaten der vereinfachten Einflußlinien
für $\omega = 0{,}5$, $n = 2$—10.

$n = 2$

	1		2		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,5000	+ 8	0	0
π_2	0	0	0	0	0	0

$n = 3$

	1		2		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,6667	+ 5	0,3333	− 5	0	0
π_2	0	0	0,3333	− 5	0,6667	+ 5	0	0

$n = 4$

	1		2		3		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,7500	+ 3	0,5000	− 6	0,2500	− 6	0	0
π_2	0	0	0,5000	0	1,0000	+ 12	0,5000	+ 5	0	0
π_3	0	0	− 0,5000	+ 16	0	0	0,5000	− 16	0	0

$n = 5$

	1		2		3		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,8000	+ 2	0,6000	− 6	0,4000	− 7	0,2000	− 7	0	0
π_2	0	0	0,6000	+ 10	1,2000	+ 10	0,8000	+ 4	0,4000	+ 4	0	0
π_3	0	0	− 0,4000	+ 20	0,2000	+ 2	0,8000	+ 10	0,4000	+ 1	0	0

$n = 6$

	1		2		3		4		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,8333	− 2	0,6667	− 6	0,5000	− 7	0,3333	− 7	0,1667	− 7	0	0
π_2	0	0	0,6667	+ 9	1,3333	+ 10	1,0000	+ 4	0,6667	+ 4	0,3333	− 4	0	0
π_3	0	0	−0,3333	+ 26	0,3333	− 1	1,0000	+ 8	0,6667	− 1	0,3333	0	0	0
π_4	0	0	−0,3333	+ 1	−0,6667	+ 12	0	0	0,6667	− 12	0,3333	− 1	0	0

$n = 7$

	1		2		3		4		4'		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,8571	+ 2	0,7143	− 6	0,5714	− 7	0,4286	− 7	0,2857	− 7	0,1428	− 7	0	0
π_2	0	0	0,7157	+ 9	1,4286	+ 9	1,1428	+ 4	0,8572	+ 4	0,5714	+ 4	0,2857	+ 3	0	0
π_3	0	0	−0,2857	+ 31	0,4286	+ 1	1,1428	+ 7	0,8572	+ 1	0,5714	0	0,2857	0	0	0
π_4	0	0	−0,2857	+ 2	−0,5714	+ 14	0,1428	0	0,8572	+ 9	0,5714	+ 1	0,2857	0	0	0

$n = 8$

	1		2		3		4		5		4'		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,8750	+ 2	0,7500	+ 6	0,6250	+ 7	0,5000	+ 7	0,3750	− 7	0,2500	− 6	0,1250	− 7	0	0
π_2	0	0	0,7500	+ 8	1,5000	+ 9	1,2500	+ 4	1,0000	+ 3	0,7500	+ 3	0,5000	+ 3	0,2500	+ 4	0	0
π_3	0	0	−0,2500	+ 37	0,5000	+ 1	1,2500	+ 4	1,0000	+ 1	0,7500	0	0,5000	0	0,2500	0	0	0
π_4	0	0	−0,2500	+ 2	−0,5000	+ 12	0,2500	0	1,0000	+ 8	0,7500	+ 1	0,5000	0	0,2500	0	0	0
π_5	0	0	−0,2500	0	−0,5000	+ 1	−0,7500	+ 11	0	0	0,7500	+ 11	0,5000	+ 1	0,2500	0	0	0

$n = 9$

	1		2		3		4		5		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,8889	+ 2	0,7778	− 7	0,6667	− 7	0,5555	− 7	0,4444	− 7	0,3333	− 7	0,2222	− 8	0,1111	− 8	0	0
π_2	0	0	0,7778	− 8	1,5555	+ 9	1,3333	+ 4	1,1111	+ 4	0,8888	+ 3	0,6667	+ 4	0,4444	+ 3	0,2222	+ 3	0	0
π_3	0	0	− 0,2223	+44	0,5555	+ 1	1,3333	+ 6	1,1111	+ 1	0,8888	0	0,6667	0	0,4444	0	0,2222	0	0	0
π_4	0	0	− 0,2223	+ 2	− 0,4555	+19	0,3333	0	1,1111	+ 7	0,8888	+ 1	0,6667	0	0,4444	0	0,2222	0	0	0
π_5	0	0	− 0,2223	0	− 0,4555	+ 1	− 0,6667	+12	0,1111	0	0,8888	+ 9	0,6667	+ 1	0,4444	0	0,2222	0	0	0

$n = 10$

	1		2		2		4		5		6		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,9000	+ 1	0,8000	− 6	0,7000	− 6	0,6000	− 7	0,5000	− 7	0,4000	− 7	0,3000	− 7	0 2000	− 7	0,1000	− 7	0	0
π_2	0	0	0,8000	+ 8	1,6000	+ 8	1,4000	+ 4	1,2000	+ 4	1,0000	0	0,8000	+ 4	0,6000	+ 3	0,4000	+ 4	0,2000	+ 4	0	0
π_3	0	0	− 0,2000	+51	0,6000	+ 1	1,4000	+ 6	1,2000	+ 1	1,0000	0	0,8000	0	0,6000	0	0,4000	0	0,2000	0	0	0
π_4	0	0	− 0,2000	+ 2	− 0,4000	+22	0,4000	0	1,2000	+ 7	1,0000	+ 1	0,8000	0	0,6000	0	0,4000	0	0,2000	0	0	0
π_5	0	0	− 0,2000	0	− 0,4000	+ 2	− 0,6000	+14	0,2000	0	1,0000	+ 8	0,8000	+ 1	0,6000	0	0,4000	0	0,2000	0	0	0
π_6	0	0	− 0,2000	0	− 0,4000	0	− 0,6000	+ 1	− 0,8000	+10	0	0	0,8000	+10	0,6000	+ 1	0,4000	0	0,2000	0	0	0

Tabelle II'.

Ordinaten der vereinfachten Einflußlinien
für $\omega = 1{,}0$, $n = 2$—10.

$n = 2$

	1		2		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2500	+ 17	0	0
π_2	0	0	0	0	0	0

$n = 3$

	1		2		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,3333	+ 10	0,1667	− 9	0	0
π_2	0	0	0,1667	+ 27	0,3333	+ 30	0	0

$n = 4$

	1		2		3		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,3750	+ 7	0,2500	− 8	0,1250	− 10	0	0
π_2	0	0	0,2500	+ 20	0,5000	+ 22	0,2500	+ 9	0	0
π_3	0	0	− 0,2500	+ 32	0	0	0,2500	+ 32	0	0

$n = 5$

	1		2		3		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4000	+ 5	0,3000	− 9	0,2000	− 11	0,1000	− 11	0	0
π_2	0	0	0,3000	+ 18	0,6000	+ 19	0,4000	+ 8	0,2000	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,2000	+ 41	0,1000	+ 4	0,4000	+ 20	0,2000	+ 4	0	0

$n = 6$

	1		2		3		4		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4167	+ 5	0,3333	− 9	0,2500	− 11	0,1667	− 11	0,0833	− 11	0	0
π_2	0	0	0,3333	+ 16	0,6667	+ 18	0,5000	+ 8	0,3333	+ 6	0,1667	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,1667	+ 53	0,1667	+ 3	0,5000	+ 15	0,3333	+ 3	0,1667	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,1667	+ 5	− 0,3333	+ 23	0	0	0,3333	+ 23	0,1667	+ 5	0	0

$n = 7$

	1		2		3		4		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4286	+ 4	0,3571	+ 9	0,2857	− 11	0,2143	− 11	0,1428	− 11	0,0714	− 11	0	0
π_2	0	0	0,3571	+ 16	0,7143	+ 17	0,5714	+ 7	0,4286	+ 6	0,2857	+ 6	0,1429	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,1429	+ 67	0,2143	+ 2	0,5714	+ 13	0,4286	+ 3	0,2857	+ 1	0,1429	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,1429	+ 5	− 0,2857	+ 29	0,0714	0	0,4286	+ 18	0,2857	+ 3	0,1429	+ 1	0	0

$n = 8$

	1		2		3		4		5		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4375	+ 4	0,3750	− 9	0,3125	− 11	0,2500	− 11	0,1875	− 11	0,1250	− 11	0,0625	− 11	0	0
π_2	0	0	0,3750	+ 15	0,7500	+ 16	0,6250	+ 7	0,5000	+ 6	0,3750	+ 6	0,2500	+ 6	0,1250	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,1250	+ 84	0,2500	+ 2	0,6250	+ 12	0,5000	+ 2	0,3750	+ 1	0,2500	+ 1	0,1250	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,1250	+ 7	− 0,2500	+ 34	0,1250	0	0,5000	+ 15	0,3750	+ 2	0,2500	0	0,1250	0	0	0
π_5	0	0	− 0,1250	+ 1	− 0,2500	+ 3	− 0,3750	+ 20	0	0	0,3750	+ 20	0,2500	+ 3	0,1250	0	0	0

$n = 9$

	1		2		3		4		5		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4444	+ 4	0,3889	− 9	0,3333	− 11	0,2778	− 11	0,2222	− 11	0,1667	− 11	0,1111	− 11	0,0555	− 11	0	0
π_2	0	0	0,3889	+ 15	0,7778	+ 16	0,6667	+ 7	0,5555	+ 6	0,4444	+ 6	0,3333	+ 6	0,2222	+ 6	0,1111	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,1111	+ 106	0,2778	+ 2	0,6667	+ 11	0,5555	+ 2	0,4444	+ 1	0,3333	+ 1	0,2222	+ 1	0,1111	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,1111	+ 7	− 0,2222	+ 40	0,6667	0	0,5555	+ 13	0,4444	+ 2	0,3333	0	0,2222	0	0,1111	0	0	0
π_5	0	0	− 0,1111	+ 1	− 0,2222	+ 4	− 0,3333	+ 23	0,0555	0	0,4444	+ 17	0,3333	+ 2	0,2222	0	0,1111	0	0	0

$n = 10$

	1		2		3		4		5		6		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,4500	+ 3	0,4000	− 9	0,3500	− 11	0,3000	− 11	0,2500	11	0,2000	− 11	0,1500	− 11	0,1000	− 11	0,0500	− 11	0	0
π_2	0	0	0,4000	+ 15	0,8000	+ 16	0,7000	+ 7	0,6000	+ 6	0,5000	+ 6	0,4000	+ 6	0,3000	+ 6	0,2000	+ 6	0,1000	+ 6	0	0
π_3	0	0	− 0,1000	+ 130	0,3000	+ 2	0,7000	+ 11	0,6000	+ 2	0,5000	+ 1	0,4000	+ 1	0,3000	+ 1	0,2000	+ 1	0,1000	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,1000	+ 8	− 0,2000	+ 45	0,2000	0	0,6000	+ 12	0,5000	+ 2	0,4000	0	0,3000	0	0,2000	0	0,1000	0	0	0
π_5	0	0	− 0,1000	+ 1	− 0,2000	+ 4	− 0,3000	+ 27	0,1000	0	0,5000	+ 17	0,4000	+ 2	0,3000	0	0,2000	0	0,1000	0	0	0
π_6	0	0	− 0,1000	+ 1	− 0,2000	0	− 0,3000	+ 3	− 0,4000	+ 19	0	0	0,4000	+ 19	0,3000	+ 3	0,2000	0	0,1000	0	0	0

Tabelle III'.

Ordinaten der vereinfachten Einflußlinien

für $\omega = 1,5$, $n = 2$—10.

$n = 2$

	1		2		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,1667	+ 25	0	0
π_2	0	0	0	0	0	0

$n = 3$

	1		2		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2222	+ 15	0,1111	− 8	0	0
π_2	0	0	0,1111	+ 38	0,2222	+ 44	0	0

$n = 4$

	1		2		3		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2500	+ 10	0,1667	− 9	0,0833	− 13	0	0
π_2	0	0	0,1667	+ 29	0,3333	+ 32	0,1667	+ 14	0	0
π_3	0	0	− 0,1667	+ 47	0	0	0,1667	+ 47	0	0

$n = 5$

	1		2		3		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2667	+ 9	0,2000	− 10	0,1333	− 14	0,0667	− 14	0	0
π_2	0	0	0,2000	+ 25	0,4000	+ 27	0,2667	+ 12	0,1333	+ 9	0	0
π_3	0	0	− 0,1333	+ 61	0,0667	+ 7	0,2667	+ 29	0,1333	0	0	0

$n = 6$

	1		2		3		4		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2778	+ 8	0,2222	− 11	0,1667	− 14	0,1111	− 14	0,0555	− 15	0	0
π_2	0	0	0,2222	+ 22	0,4444	+ 25	0,3333	+ 11	0,2222	+ 9	0,1111	+ 8	0	0
π_3	0	0	− 0,1111	+ 82	0,1111	+ 5	0,3333	+ 23	0,2222	+ 6	0,1111	+ 3	0	0
π_4	0	0	− 0,1111	+ 9	− 0,2222	+ 34	0	0	0,2222	+ 34	0,1111	+ 9	0	0

$n = 7$

	1		2		3		4		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2857	+ 7	0,2381	− 11	0,1904	− 14	0,1428	− 14	0,0952	− 15	0,0476	− 15	0	0
π_2	0	0	0,2381	+ 22	0,4762	+ 24	0,3809	+ 11	0,2857	+ 8	0,1905	+ 8	0,0952	+ 8	0	0
π_3	0	0	− 0,0952	+ 110	0,1429	+ 4	0,3809	+ 19	0,2857	+ 5	0,1905	+ 2	0,0952	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,0952	+ 10	− 0,1904	+ 42	0,0476	+ 2	0,2857	+ 25	0,1905	+ 6	0,0952	+ 2	0	0

$n = 8$

	1		2		3		4		5		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2917	+ 6	0,2500	− 11	0,2084	− 14	0,1667	− 14	0,1250	− 14	0,0834	− 15	0,0417	− 15	0	0
π_2	0	0	0,2500	+ 21	0,5000	+ 23	0,4167	+ 10	0,3333	+ 8	0,2500	+ 8	0,1667	+ 8	0,0833	+ 8	0	0
π_3	0	0	− 0,0833	+ 149	0,1667	+ 4	0,4167	+ 18	0,3333	+ 4	0,2500	+ 2	0,1667	+ 1	0,0833	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,0833	+ 11	− 0,1667	+ 51	0,0834	+ 1	0,3333	+ 21	0,2500	+ 4	0,1667	+ 1	0,0833	0	0	0
π_5	0	0	− 0,0833	+ 2	− 0,1667	+ 6	− 0,2500	+ 30	0	0	0,2500	+ 30	0,1667	+ 6	0,0833	+ 2	0	0

$n = 9$

	1		2		3		4		5		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2963	+ 6	0,2593	− 11	0,2222	− 14	0,1852	− 15	0,1482	− 15	0,1111	− 15	0,0741	− 15	0,0371	− 15	0	0
π_2	0	0	0,2593	+ 20	0,5185	+ 23	0,4444	+ 10	0,3704	+ 8	0,2963	+ 8	0,2222	+ 8	0,1481	+ 8	0,0741	+ 8	0	0
π_3	0	0	− 0,0741	+ 204	0,1852	+ 4	0,4444	+ 16	0,3704	+ 4	0,2963	+ 2	0,2222	+ 1	0,1481	+ 1	0,0741	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,0741	+ 13	− 0,1481	+ 38	0,1111	+ 1	0,3704	+ 19	0,2963	+ 4	0,2222	+ 1	0,1481	0	0,0741	0	0	0
π_5	0	0	− 0,0741	+ 2	− 0,1481	+ 7	− 0,2222	+ 35	0,0371	+ 1	0,2963	+ 24	0,2222	+ 5	0.1481	+ 1	0,0741	0	0	0

$n = 10$

	1		2		3		4		5		6		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,3000	+ 5	0,2667	− 11	0,2333	− 16	0,2000	− 15	0,1667	− 17	0,1333	− 15	0,1000	− 15	0,0667	− 17	0,0333	− 15	0	0
π_2	0	0	0,2667	+ 20	0,5333	+ 22	0,4667	+ 10	0,4000	+ 8	0,3333	+ 8	0,2667	+ 8	0,2000	+ 8	0,1333	+ 8	0,0667	+ 8	0	0
π_3	0	0	− 0,0667	+ 290	0,2000	+ 4	0,4667	+ 16	0,4000	+ 4	0,3333	+ 1	0,2667	+ 1	0,2000	+ 1	0,1333	+ 1	0,0667	+ 1	0	0
π_4	0	0	− 0,0667	+ 15	− 0,1333	+ 72	0,1333	+ 1	0,4000	+ 17	0,3333	+ 3	0,2667	+ 1	0,2000	0	0,1333	0	0,0667	0	0	0
π_5	0	0	− 0,0667	+ 2	− 0,1333	+ 8	− 0,2000	+ 40	0,0667	0	0,3333	+ 21	0,2667	+ 4	0,2000	+ 1	0,1333	0	0,0667	0	0	0
π_6	0	0	− 0,0667	+ 1	− 0,1333	+ 1	− 0,2000	+ 5	− 0,2667	+ 27	0	0	0,2667	+ 27	0,2000	+ 5	0,1333	+ 1	0,0667	+ 1	0	0

Tabelle IV'.

Ordinaten der vereinfachten Einflußlinien

für $\omega = 2{,}0$, $n = 2$—10.

$n = 2$

	1		2		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,1250	+ 33	0	0
π_2	0	0	0	0	0	0

$n = 3$

	1		2		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,1667	+ 20	0,0833	— 7	0	0
π_2	0	0	0,0833	+ 47	0,1667	+ 56	0	0

$n = 4$

	1		2		3		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,1875	+ 15	0,1250	— 10	0,0625	— 15	0	0
π_2	0	0	0,1250	+ 36	0,2500	+ 41	0,1250	+ 19	0	0
π_3	0	0	— 0,1250	+ 61	0	0	0,1250	+ 61	0	0

$n = 5$

	1		2		3		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2000	+ 12	0,1500	— 11	0,1000	— 16	0,0500	— 16	0	0
π_2	0	0	0,1500	+ 31	0,3000	+ 35	0,2000	+ 16	0,1000	+ 11	0	0
π_3	0	0	— 0,1000	+ 83	0,0500	+ 10	0,2000	+ 38	0,1000	+ 13	0	0

$n = 6$

	1		2'		3		4		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2083	+ 10	0,1667	— 12	0,1250	— 16	0,0833	— 17	0,0417	— 17	0	0
π_2	0	0	0,1667	+ 28	0,3333	+ 32	0,2500	+ 15	0,1667	+ 11	0,0833	+ 10	0	0
π_3	0	0	— 0,0833	+ 115	0,0833	+ 7	0,2500	+ 29	0,1667	+ 9	0,0833	+ 4	0	0
π_4	0	0	— 0,0833	+ 13	— 0,1667	+ 45	0	0	0,1667	+ 45	0,0833	+ 13	0	0

$n = 7$

	1		2		3		4		4'		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2143	+ 9	0,1785	— 12	0,1428	— 16	0,1071	— 17	0,0714	— 17	0,0357	— 17	0	0
π_2	0	0	0,1786	+ 27	0,3571	+ 30	0,2857	+ 14	0,2143	+ 10	0,1428	+ 9	0,0714	+ 9	0	0
π_3	0	0	— 0,0714	+ 163	0,1071	+ 6	0,2857	+ 25	0,2143	+ 7	0,1428	+ 3	0,0714	+ 2	0	0
π_4	0	0	— 0,0714	+ 15	— 0,1428	+ 55	0,0357	+ 3	0,2143	+ 25	0,1428	+ 8	0,0714	+ 3	0	0

$n = 8$

	1		2		3		4		5		4'		3'		2'		1'	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2187	+ 9	0,1875	— 12	0,1562	— 16	0,1250	— 17	0,0937	— 18	0,0625	— 17	0,0312	— 18	0	0
π_2	0	0	0,1875	+ 26	0,3750	+ 29	0,3125	+ 13	0,2500	+ 10	0,1875	+ 9	0,1250	+ 9	0,0625	+ 9	0	0
π_3	0	0	— 0,0625	+ 242	0,1250	+ 6	0,3125	+ 22	0,2500	+ 6	0,1875	+ 3	0,1250	+ 2	0,0625	+ 2	0	0
π_4	0	0	— 0,0625	+ 17	— 0,1250	+ 69	0,0625	+ 2	0,2500	+ 27	0,1875	+ 7	0,1250	+ 2	0,0625	+ 1	0	0
π_5	0	0	— 0,0625	+ 3	— 0,1250	+ 9	— 0,1875	+ 39	0	0	0,1875	+ 39	0,1250	+ 9	0,0625	+ 3	0	0

$n = 9$

	1		2		3		4		5		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2222	+ 8	0,1944	− 12	0,1667	− 16	0,1389	− 17	0,1111	− 17	0,0833	− 21	0,0555	− 21	0,0278	− 17	0	0
π_2	0	0	0,1944	+ 25	0,3889	+ 28	0,3333	+ 33	0,2778	+ 10	0,2222	+ 9	0,1667	+ 9	0,1111	+ 8	0,0556	+ 9	0	0
π_3	0	0	− 0,0556	+ 384	0,1389	+ 5	0,3333	+ 21	0,2778	+ 6	0,2222	+ 3	0,1667	+ 2	0,1111	+ 2	0,0556	+ 2	0	0
π_4	0	0	− 0,0556	+ 20	− 0,1111	+ 84	0,0833	+ 1	0,2778	+ 24	0,2222	+ 6	0,1667	+ 2	0,1111	+ 1	0,0556	+ 1	0	0
π_5	0	0	− 0,0556	+ 4	− 0,1111	+ 11	− 0,1667	+ 46	0,0278	+ 1	0,2222	+ 31	0,1667	+ 7	0,1111	+ 2	0,0556	+ 1	0	0

$n = 10$

	1		2		3		4		5		6		5′		4′		3′		2′		1′	
	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	y (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)	y	Δ (%)
π_1	0	0	0,2250	+ 8	0,2000	− 13	0,1750	− 14	0,1500	− 17	0,1250	− 17	0,1000	− 17	0,0750	− 17	0,0500	− 17	0,0250	− 17	0	0
π_2	0	0	0,2000	+ 25	0,4000	+ 27	0,3500	+ 13	0,3000	+ 10	0,2500	+ 9	0,2000	+ 9	0,1500	+ 9	0,1000	+ 9	0,0500	+ 9	0	0
π_3	0	0	− 0,0500	+ 720	0,1500	+ 5	0,3500	+ 20	0,3000	+ 6	0,2500	+ 3	0,2000	+ 2	0,1500	+ 2	0,1000	+ 2	0,0500	+ 2	0	0
π_4	0	0	− 0,0500	+ 22	− 0,1000	+ 103	0,1000	+ 1	0,3000	+ 22	0,2500	+ 5	0,2000	+ 1	0,1500	+ 1	0,1000	+ 1	0,0500	0	0	0
π_5	0	0	− 0,0500	+ 4	− 0,1000	+ 12	− 0,1500	+ 53	0,0500	0	0,2500	+ 27	0,2000	+ 6	0,1500	+ 2	0,1000	+ 1	0,0500	0	0	0
π_6	0	0	− 0,0500	+ 1	− 0,1000	+ 2	− 0,1500	+ 8	− 0,2000	+ 35	0	0	0,2000	+ 35	0,1500	+ 8	0,1000	+ 2	0,0500	+ 1	0	0

Ein Blick auf die Tabellen lehrt, daß das vereinfachte Verfahren im allgemeinen zu große Resultate liefert, worauf schon Professor Vierendeel hinwies[1]). Für die Schlankheit des Trägers $\omega \leq 1{,}0$ stimmt diese Methode ziemlich gut mit der genauen Berechnungsweise. Von $\omega > 1{,}0$ angefangen, beginnen die Differenzen zu groß zu werden. Jedenfalls bietet das vereinfachte Verfahren ein leichtes Mittel, ein Projekt in der Vierendeel-Bauweise zu prüfen und sich schnell in den Abmessungen zu orientieren. Es sei noch betont, daß die größten Unterschiede gewöhnlich dort auftreten, wo die Ordinaten am kleinsten sind, was aus praktischen Rücksichten als vorteilhaft zu bezeichnen ist.

[1]) A. Vierendeel. — Longerons en Treillis et Longerons à Arcades. Paris-Louvain 1897, S. 46.

Literatur.

Les ponts architecturaux en métal, A. Vierendeel. Annales des Travaux publics de Belgique 1896.

Longerons en treillis et longerons à arcades, A. Vierendeel. Paris-Louvain 1897.

Belastungsversuche an einer eisernen Brücke in Tervueren. Schweizerische Bauzeitung 1897, S. 99; 1898, S. 48 und 74.

Le pont système Vierendeel. Expériences de Tervueren-lez-Bruxelles, A. Vierendeel. 1898.

Rapport sur les expériences de Tervueren, Lambin et Christophe. Annales des Travaux publics de Belgique 1898.

Le pont Vierendeel. Examen du rapport de MM. les Ingenieurs des Ponts et Chaussées Lambin et Christophe sur les expériences de Tervueren, A. Vierendeel. Annales des Travaux publics de Belgique 1898.

Note sur le calcul du pont Vierendeel, E. Haerens. 1898.

Estudio de un nuevo tipo de viga propuesto par el senor A. Vierendeel, R Claro-Solar. Boletin de la Sociedad de Injeniera (Chile), 1898.

Das Brückensystem Vierendeel. Gutachten von Albert Lambin und Paul Christophe. Schweizerische Bauzeitung 1899, S. 20.

La vérification expérimentale de la stabilité du pont Vierendeel, P. Christophe. Annales des Travaux publics de Belgique, 1899, S. 245.

Il ponte Vierendeel e la sua calcolazione, Andruzzi. Giornale del genio civile 1899. Eine französische Übersetzung erschien im Bulletin de l'Union des Ingénieurs de Louvain, 1899.

Théorie générale des poutres Vierendeel, A. Vierendeel. Mémoires de la Société des Ingénieurs civils de France 1900.

The Kinzua Viadukt of the Erie Railroad Company, C. Grimm. American Society of Civil Engineers. Transactions 1901, vol. XLVI.

Les ponts métalliques à arcades, A. Morizot. Nouvelles Annales de la construction 1901.

Note sur les calculs de stabilité des Ponts en arcades du système Vierendeel, Ed. Joyant. Annales des Travaux publics de Belgique 1902.

Die neue Kinzua-Brücke, F. Müller. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1902.

Cours de stabilité des constructions, A. Vierendeel. Band V, 1903.

Fermy arkady systemy Vierendeela, N. Abramow. 1904.

Opredilenie usylij w besraskosnych fermach z žestkimi uzlami, L. Nikolaj. Žurnal Ministerstwa Putej Soobszczenia 1904.

Les ponts métalliques, sytème Vierendeel. Pont à arcades d'Avelghem (Belgique), A. Morizot. Génie civil 1905.

Der Eisenbau, Luigi Vianello. 1905, S. 210.

O bezraskosnych fermach z parallelnymi pojasami, G. Perederij. Inženernoje Dielo 1905.

Cabine de signaux de la station de Bruxelles-Nord, L. Cosyn. Nouvelles Annales de la construction 1906.

Eisenbetonbrücken mit versenkter Fahrbahn, S. Zipkes. Beton u. Eisen 1906.

Fachwerkträger aus Eisenbeton, S. Zipkes. Beton u. Eisen 1906.

K woprosu o skwosnych balocznych fermach is železobetona, N. Abramow. Cement 1906.

Eisenbetonträger für große Spannweiten, System Vierendeel, Dr. F. Gebauer. Beton u. Eisen 1907.

Ueber diagonallose Träger (Bauart Vierendeel), E. O. Patton. Zentralblatt der Bauverwaltung 1907.

Handbuch für Eisenbetonbau, Dr.-Ing. F. von Emperger. Band III. Bauausführungen aus dem Ingenieurwesen, 1908, S. 252 bis 259.

Beitrag zur Berechnung der Eisenbetonträger nach System Vierendeel, Kalmer. Beton u. Eisen 1908.

Perwyj želiesnodorožny most s fermami arkadami systemy Vierendeela, N. Abramow. Izwistija Sobranija Inženerow Putej Soobszczenija 1908.

Handbuch für Eisenbetonbau, Dr.-Ing. F. von Emperger. Band IV, 1. Bauausführungen aus dem Hochbau und Baugesetze. 1909, S. 397 bis 410.

Obliczanie belek uktadu prof. Vierendeel'a, Dr. W. Balicki. Czasopismo technicznue 1909.

Bezraskosnija fermy, J. Podolsky, 1909.

Ein Beitrag zur Theorie der Vierendeelträger, P. M. Frandsen. Beton u. Eisen 1909.

Beitrag zur Berechnung von Vierendeelträgern, Prof. A. Ostenfeld. Beton u. Eisen 1910.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68, Zimmerstr. 34.

FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES

EISENBETONS

BEITRAG ZUR THEORIE DER IM EISENBETONBAU GEBRÄUCHLICHEN FORM DER RIPPENKUPPEL

HEFT XIII

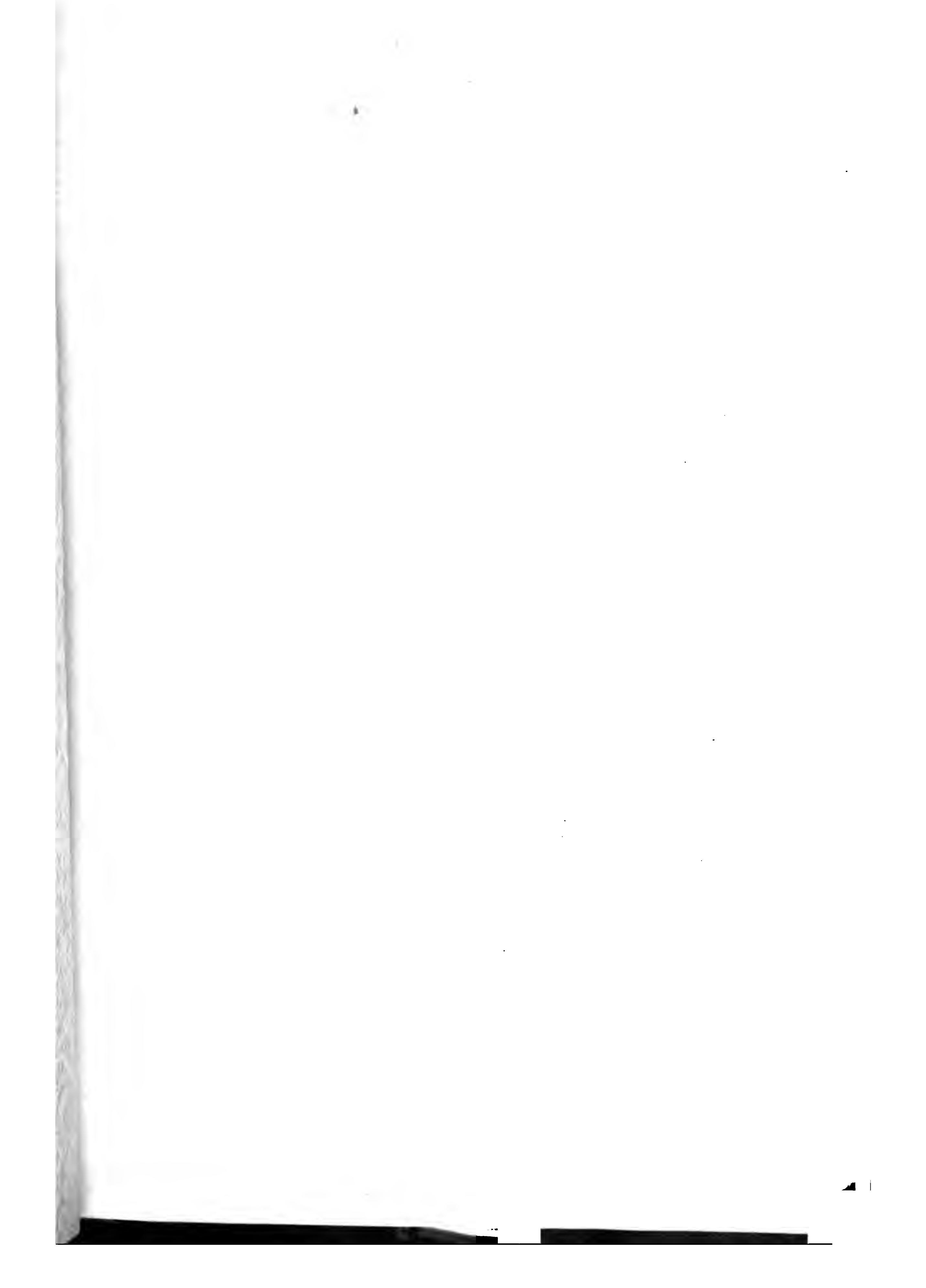
PREIS 4 MARK

VON

Dr. Ing. **KARL W. MAUTNER**
OBERINGENIEUR DER FIRMA CARL BRANDT

MIT 47 TEXTABBILDUNGEN

VERLAG von WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90



BEITRAG ZUR T
EISENBETONBAU (
FORM DER RI

von

Dr. Ing. **KARL W**
OBERINGENIEUR DER FI

MIT 47 TEXTABB

BERLIN
VERLAG VON WILHELM

Vorwort.

Verschiedene Ausführungen von Eisenbetonkuppeln ließen es dem Verfasser vorliegender Arbeit wünschenswert erscheinen, die statischen Ver hältnisse dieser Bauwerke einem eingehenden Studium zu unterziehen. Der Grund, warum von den gebräuchlichen monolithischen Kuppelkonstruktionen besonders die Rippenkuppel einer Behandlung für wert gehalten wurde, ist darin zu sehen, daß Verfasser der Meinung ist, daß, nach Klarlegung der statischen Verhältnisse dieser, Schlüsse aut die Formveränderungen auch glatter Kuppeln gezogen werden könnten, und daß durch Zerlegung einer solchen Kuppel in gedachte Ringe und Rippen möglichst großer Zahl eher eine für die Praxis befriedigende Lösung auch dieser Kuppelarten zu finden wäre als durch Studium derselben nach den allgemeinen Lehren der mathematischen Elastizitätstheorie. Ferner bildet die Rippenkuppel durch die immer mehr ausgedehnte Anwendung des Eisenbetons zur Überdachung großer Räume eine beliebte und für Monumentalbauten auch architektonisch dankbare Lösung, so daß speziell wegen der Anwendung bei außergewöhnlich großen Spannweiten eine Untersuchung angebracht ist. Über größere Ausführungsbeispiele dieser Art siehe Prof. S. Müller-Berlin: „Die Kuppel der Friedrichstraßen-Passage, Berlin“ (Armierter Beton 1909) und Aufsatz des Verfassers (Deutsche Bauzeitung 1908, Nr. 11, 12 und 13) sowie Vortrag des Verfassers auf der 12. Hauptversammlung des Deutschen Betonvereins 1909 (Deutsche Bauzeitung 1909, Nr. 13). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur mit der Klarlegung einseitiger Lastangriffe, doch ist sofort einzusehen, daß der einfacheren Berechnung symmetrischer Lastangriffe mit Rücksicht auf die Ringformveränderungen keine Schwierigkeiten mehr im Wege stehen. Es wird nur vielleicht zweckmäßig sein, für die Berechnung der symmetrischen Lastangriffe ein anderes als das der Arbeit zugrunde liegendes Hauptsystem zu wählen, da die Bedingung der Fußeinspannung wohl in den seltensten Fällen streng erfüllt sein dürfte. Wenn diese dennoch in vorliegender Arbeit für die einseitigen Lastangriffe angenommen wurde, so geschah das aus den näher angeführten Gründen.

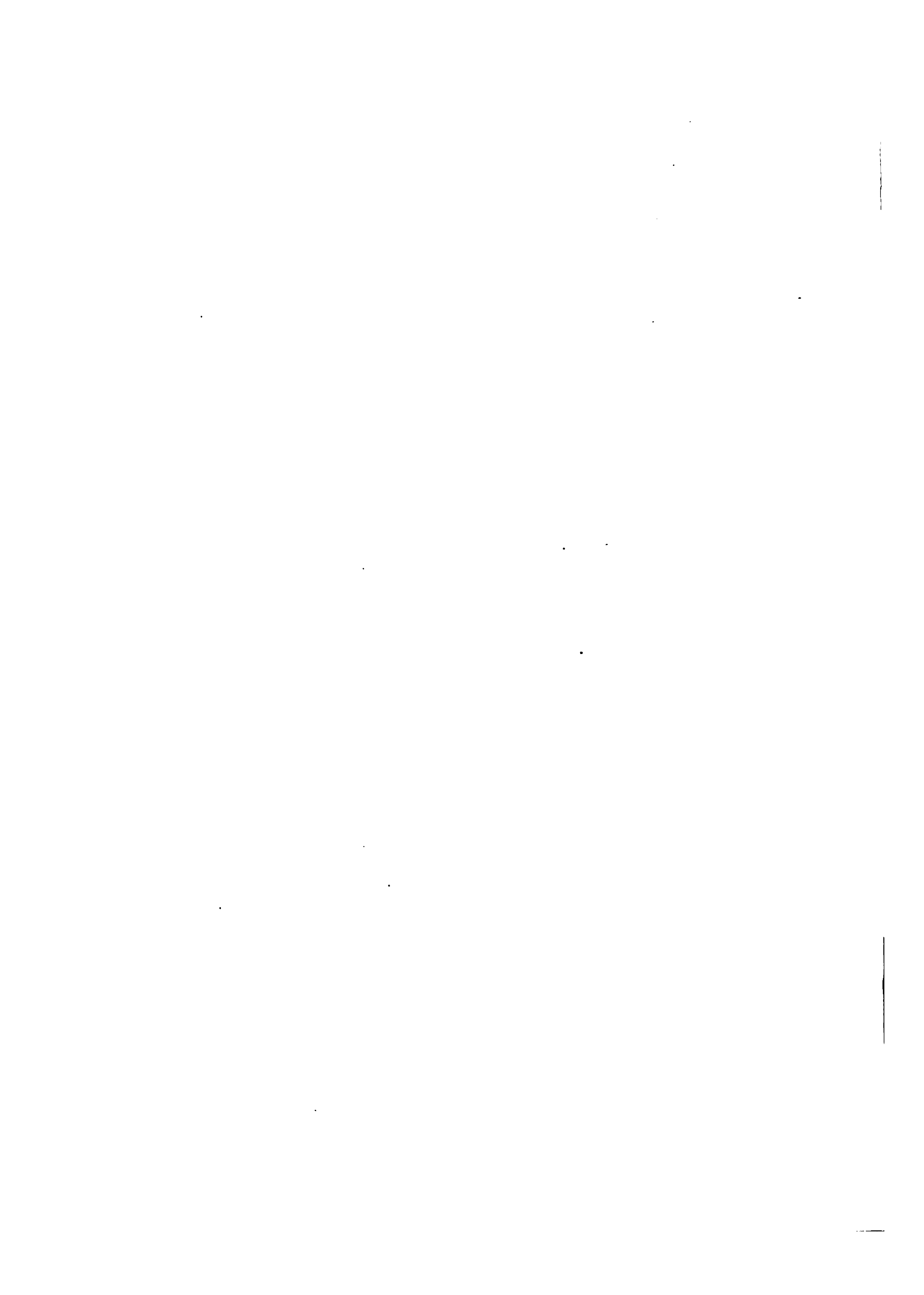
Es ist selbstverständlich, daß die Behandlung auch auf andere Ringformen (elliptische, rechteckige, polygonale) leicht ausgedehnt werden kann. Außer den in der Arbeit als Fehlerquellen bezeichneten Annahmen ist zu bemerken, daß der Einfluß der Normalkräfte auf Ring- und Rippenformänderungen ausgeschlossen wurde. Es ist klar, daß in Fällen, in welchen diese Vernachlässigung größere Fehler mit sich bringt, diese Berücksichtigung speziell für die Rippen leicht erfolgen kann. Der Verfasser hofft, durch die vorliegende Schrift eine Berechnungsart gegeben zu haben, welche in mehr oder minder scharfer Anwendung derselben die statischen Verhältnisse an Rippenkuppeln mit Rücksicht auf die Formänderung der Ringe und Rippen genügend klarlegt und eine genauere als bisher übliche Dimensionierung solcher Bauwerke zuläßt.

Der Verfasser übergibt die Arbeit der wohlwollenden Beurteilung der engeren Fachkollegen mit dem Wunsche, daß dieselbe auch in praktischer Anwendung bei ihnen Zutritt finde.

Düsseldorf, im Dezember 1910.

Dr. Ing. **Karl W. Mautner.**

INHALTSVERZEICHNIS.



Die Eisenbetonbauweise hat neben anderen ihr eigentümlichen Formen auch räumliche Überdeckungen und Tragwerke ausgebildet, welche von den verwandten, gebräuchlichen Formen des Eisenbaues wesentlich verschieden sind. Die im Eisenbetonbau stark entwickelte Form der Rippenkuppel, der Pyramiden und Zelte mit Rippen bezw. Sparren und Ringen ohne Diagonalen bedingt eine sehr abweichende statische Behandlung dieser Gebilde im Vergleich zu den räumlichen Stabsystemen des Eisenbaues.

Eine Rippenkuppel ist ein aus ebenen Trägern und Ringen zusammengesetztes Raumtragwerk, derart, daß die Träger von einer oder mehreren parallelen Ebenen sämtlich durchschnitten und an diesen Schnittstellen an Ringe fest angeschlossen sind. Diese allgemeinste Auffassung führt für allgemeine Lastangriffe auch bei einfachen geometrischen Formen und geringer Ring- und Rippenzahl zu derart verwickelten äußeren Gleichgewichts- und inneren elastischen Beziehungen, daß deren Lösungen wohl kaum für die Anwendung geeignet sein dürften.

Für einen Sonderfall gibt Prof. Max Foerster in „Die Eisenkonstruktionen der Ingenieurbauten" (Engelmanns Verlag, Leipzig 1903), S. 293 die Ermittlung der Querkräfte einer einseitig lotrecht belasteten, äußerlich statisch bestimmten Rippenkuppel als Raumsystem. Bezüglich der Windkräfte ist dort gesagt: „Die Windkräfte lassen auf einfachem Wege keine genaue Behandlung zu, weil durch den Scheitelring alle Binder in Spannung versetzt werden".

Für den Eisenbetonbau hätte die Lösung dieser Aufgabe, wenn auch unter vereinfachenden Annahmen, größere Bedeutung:

Ringe und Rippen sind im Eisenbetonbau zumeist vielfach statisch unbestimmte Gebilde, deren Formänderungen wechselseitig von großem Einfluß auf die Spannungen sind.

Die Ermittlung der Ringbeanspruchung setzt die Kenntnis der Formänderungen bei einseitiger Belastung der Kuppel voraus. Ein einfaches, angenähertes Verfahren könnte derart vorgenommen werden, daß jede Rippe für die größte auf sie allein entfallende Belastung berechnet und die Kräfteermittlung ohne Rücksicht auf die übrigen Rippen und die Ringformveränderung vorgenommen wird.

Aus dem Verfasser bekannten Berechnungen ausgeführter Rippenkuppeln ist die Berücksichtigung der Ringformveränderung zumeist nicht ersichtlich. Der Sicherheitsgrad dieser Näherungsrechnung ist dann im Hinblick auf die statische Unbestimmtheit der Rippen nicht allzuhoch einzuschätzen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, einseitige Lastangriffe auf Rippenkuppeln und verwandte Traggebilde unter Berücksichtigung der Formänderung aller Teile zu behandeln.

Zunächst sei bezüglich des Begriffs der Rippenkuppel eine von der oben gegebenen Begriffserklärung etwas abweichende Annahme gemacht. Die Rippenkuppel bestehe aus einem (belasteten) Haupttragsystem und an dieses angeschlossenen Rippenteilen. Das für sich stabile Haupttragsystem umfaßt zwei irgendwie bestimmt gelagerte, gegenüberliegende Rippenhälften, die untereinander durch einen oder mehrere Ringe mit bestimmter Lagerung an diesen verbunden sind. An dieses Haupttragsystem sind an die Ringe mit gleicher Lagerung je zwei gegenüberliegende, ebenfalls für sich stabile Rippenhälften angeschlossen.

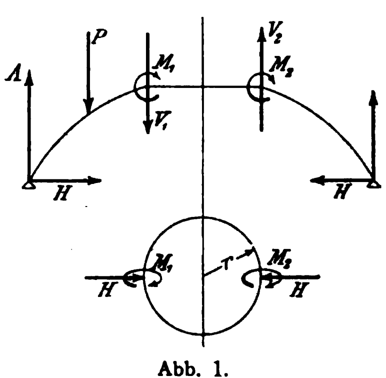


Abb. 1.

Das Haupttragsystem empfängt die Last. Die sich durch die Rippenformveränderung des Hauptsystems ergebende Verschiebung sowie die Ringformveränderung versetzen die angeschlossenen Rippen in Spannung.

Diese Annahme ist dem Charakter der monolithisch erbauten Rippenkuppeln im allgemeinen nicht widersprechend.

Was die Lagerung des Hauptsystems und der angeschlossenen Rippen an diesem anbelangt, so wären verschiedene Annahmen möglich.

So die Lagerung mit Fußgelenken und fester Verbindung am Ringe (Abb. 1).

Aus $V_1 = V_2$ ergibt sich durch die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen $V_1 = \frac{M_1 + M_2}{2r}$, und das Hauptsystem äußerlich einfach statisch unbestimmt.*) Das System ist aber wegen der in den Ringen auftretenden Verdrehungen und der damit verbundenen Schwierigkeiten der Formänderungs- und Spannungsermittlungen, besonders von Eisenbetonquerschnitten, wenig geeignet.

*) Innerlich ist das System durch Einschaltung des Ringes dreifach unbestimmt. Zur Ermittlung der Auflagerunbekannten des Systems ist die Einbeziehung der Ringbiegung im horizontalen und vertikalen Sinne und der Ringverdrehungen in die gesamte Formänderungsarbeit und die Darstellung der vertikalen Ringbiegungsmomente $M_{u,\varphi}$, der horizontalen $M_{v,\varphi}$

Verläßt man den festen Anchluß der Ringe, so ist, um bei einem stabilen, symmetrischen Gebilde zu bleiben, die Fußeinspannung notwendig.

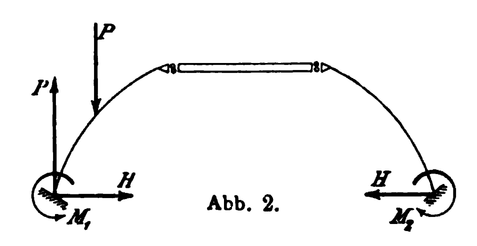


Abb. 2.

Der Anschluß der Ringe kann hierbei entweder durch feste Gelenke, welche auch Querkräfte übertragen können, oder durch Rollenlager, welche nur horizontale Kräfte übernehmen können, gedacht werden. In vorliegender Arbeit ist die letztgenannte Art des Anschlusses gewählt (Abb. 2). Dies empfiehlt sich aus folgenden Gründen:

1. Da die einseitig angreifenden Kräfte zumeist Windkräfte sind, so spielt die Übertragung der im Verhältnis zu den symmetrischen Eigengewichtskräften kleinen lotrechten Seitenkräfte keine bedeutende Rolle;
2. liegt der Schwerpunkt der vertikalen Seitenkräfte zumeist nahe dem Auflager, daher die Annahme der Wirklichkeit nahe kommt;
3. wird die Behandlung durch die nur einfache Unbestimmtheit des Hauptsystems und durch die Ausschaltung vertikaler Ringbiegungen einfacher.

1. Die Ringformveränderungen.

Für den in Abb. 3 dargestellten Ringbelastungsfall ergibt sich das Moment bei B (vergl. Müller-Breslau, „Neuere Methoden")

$$M_B = -\frac{Hr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right).$$

---

und der Verdrehungsmomente $M_{d,\varphi}$ als Funktionen der Unbekannten H des Systems nötig. Die zu dieser Darstellung erforderlichen Ringunbekannten können in analoger Weise ermittelt werden, wie dies in Müller-Breslau „Neuere Methoden" für den halbkreisförmigen, beliebig exzentrisch belasteten, eingespannten Ringträger gezeigt ist. Als Unbekannte wären somit die Schnittkraft bei S, N, ferner das vertikale Ringbiegungsmoment an der Schnittstelle S, M_u^0 und das horizontale M_v^0 einzuführen und die Integration über den ganzen Ring durchzuführen. Die Durchführung der Aufgabe unterbleibt hier aus den oben angeführten Gründen.

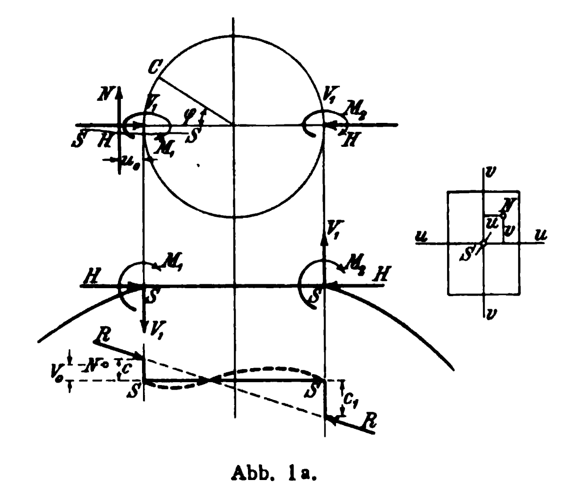


Abb. 1a.

Daher ein Moment im Punkte C $\left(\text{unter dem variablen Winkel } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$

$$M_C = -\frac{Hr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + \frac{Hr}{2}(1-\cos\varphi) = -\frac{Hr}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right) \quad 1)$$

$$M_A = \frac{Hr}{\pi}.$$

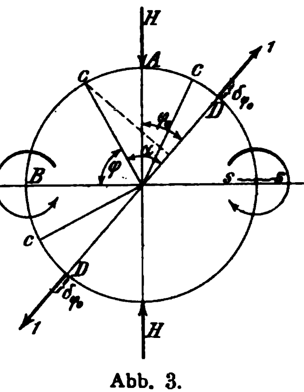


Abb. 3.

Im nachfolgenden sollen die Verschiebungen von Punkten des Umfanges D, die unter dem beliebigen Winkel φ_0 zu den angreifenden diametralen Kräften liegen, berechnet werden.

$$2 \cdot \delta_{\varphi_0} = \int M_\varphi \frac{M' \, ds}{EJ_r}.$$

Die Momente M' bestimmen sich an dem statisch bestimmten Hauptfall, der durch Aufschneiden des Ringes bei $s-s$ entsteht, wie folgt:

Teil B—A: $\alpha = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \varphi_0)$; $M' = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$ $\qquad \varphi = 0$ bis $\frac{\pi}{2}$

Teil A—D: $M' = -r \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi)\right] = -r \cdot \cos(\varphi_0 + \varphi)$

von $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$ bis $\frac{\pi}{2}$

Teil B—D: $M' = r \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi)\right] = r \cdot \cos(\varphi_0 + \varphi)$

von $\varphi = 0$ bis $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$

$$M_\varphi = -\frac{Hr}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right);$$

somit

$$2\,EJ_r \cdot \delta_{\varphi_0} = \frac{H}{2} r^3 \left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)\cos(\varphi - \varphi_0)\,d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)\cos(\varphi_0 + \varphi)\,d\varphi - \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)} \left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)\cos(\varphi_0 + \varphi)\,d\varphi\right].$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$\delta_{\varphi_0} = \frac{Hr^3}{4\,EJ_r}\left[\frac{4}{\pi} + \cos\varphi_0\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi_0\right] \quad . \ . \ . \quad 2)$$

Im besonderen ergibt sich aus 2)

$$\text{für } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}: \quad \delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{4EJ_r}\left(\frac{4}{\pi}\right.$$

$$\text{für } \varphi_0 = 0: \quad \delta_0 = \frac{Hr^3}{4EJ_r}\left(\frac{4}{\pi}\right.$$

Über letztgenannten Sonderwert ver

Zur Kontrolle seien die Sonderw

ermittelt:

$$M_\varphi = -\frac{H}{2}\cdot r\left(\cos\right.$$

$$M' = 1\cdot r\cdot \sin\varphi$$

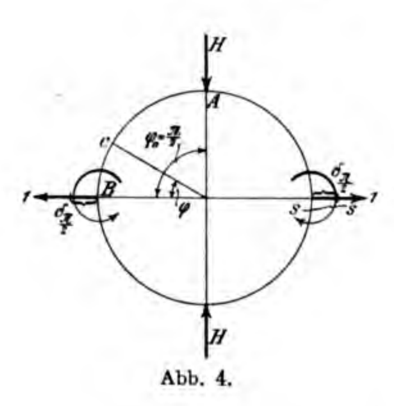


Abb. 4.

$$2\,EJ_r\cdot\delta_{\frac{\pi}{2}} = -2\cdot\frac{H}{2}\cdot r^3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big($$

$$\delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right.$$

$$M_\varphi = -\frac{H}{2}\cdot r\left(\cos\varphi - \right.$$

$$M' = -\frac{r}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$EJ_r\cdot\delta_0 = 2\cdot\frac{H}{4}\cdot r^3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos$$

$$\delta_0 = -\frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\left(\frac{\pi}{4} - \right.$$

2. Das Hauptsystem.

Für einen starr gedachten Ring ergibt sich die Bogenkraft als Unbestimmte aus

$$\frac{dL}{dX} = \int \frac{M_x}{EJ_b} \frac{dM_x}{dX} \cdot ds = 0$$

$$0 = \frac{1}{EJ_b} \cdot \int_0^b (-M_0\,y + 2\,X\,y^2)\,ds;$$

für konstantes E und J_b

$$X = \frac{\int_0^b M_0\,y\,ds}{2\int_0^b y^2\,ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

M_0 als das Moment des statisch bestimmten Hauptfalls ist das einer am Auflager eingespannten Konsole $M_{0,x} = \Sigma_0^x P\,[x-(b-a)]$.

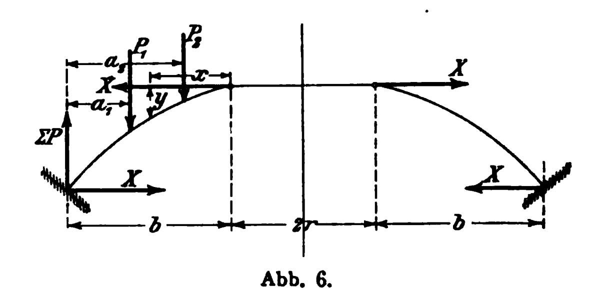


Abb. 6.

Um für eine der Integration schwer zugängliche Bogenform bei variablem Trägheitsmoment eine graphische Ermittlung der Unbekannten vorzunehmen, kann mit Vorteil eine Teilung nach der „Methode der konstanten Bogengrößen" durchgeführt werden.

$$\frac{\Delta s}{J} = K$$

$$X = \frac{\Sigma_0^b M_0\,y}{2\,\Sigma_0^b y^2}.$$

Die Einflußlinie des Schubes ergibt sich als Seilpolygon der „Kräfte" y (Abb. 7).

Das Seilpolygon der horizontal wirkend gedachten y gibt die Maßstabeinheit mit der Strecke $2v$:

$$X = \frac{\Sigma_0^b P \cdot \eta}{2v};$$

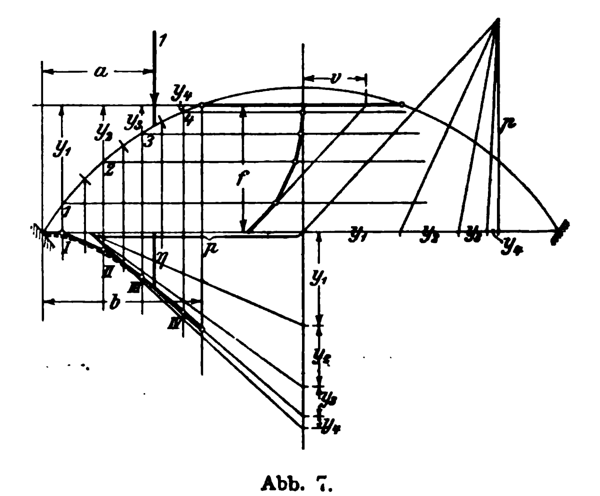


Abb. 7.

für die Annahme einer flachen Parabel mit der Näherung $ds = dx$ ergibt sich die Einflußlinie X

$$\text{aus } y = \frac{f}{b^2} \cdot x^2$$

$$\int_0^b M_0 x^2 \, dx = \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2}\left(b - \frac{a}{3}\right)^2$$

$$\text{zu } X_a = \frac{5 \cdot a^2 (a^2 - 4ab + 6b^2)}{24 f \cdot b^3}.$$

Für einen elastischen Ring bestimmt sich die Bogenkraft des Hauptsystems nach Castigliano:

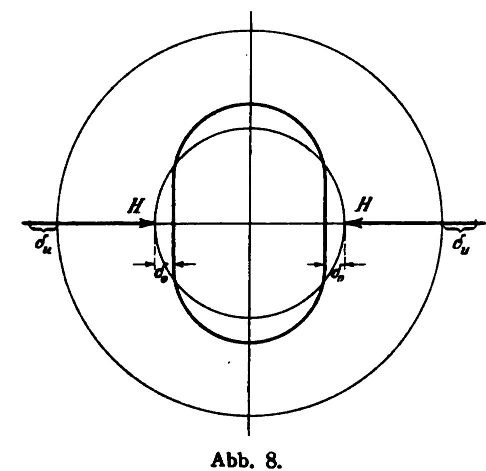


Abb. 8.

$$\frac{dL}{dH} = -2\,\delta_0 \quad \text{(Abb. 8)}$$

$$-EJ_b \cdot 2\,\delta_0 = \int_0^b (-M_0 y + 2Hy^2)\, ds$$

$$H = \frac{-2\,EJ_b \cdot \delta_0 + \int_0^b M_0 y \, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 \, ds} \quad \text{5)}$$

oder für elastischen Kopf- und Fußring:

$$H = \frac{-2\,EJ_b (\delta_0 + \delta_u) + \int_0^b M_0 y \, ds}{2 \int_0^b y^2 \, ds} \quad \ldots\ldots \text{5')}$$

Wird für die elastische Verschiebung δ_0 aus 4) eingeführt,*) so ergibt sich

$$H = \frac{\int_0^b M_0 y \, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 \, ds + J_b \cdot \frac{r^3}{J_r}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)} \quad \ldots\ldots \text{6)}$$

*) Absoluter Wert, Vorzeichen bereits berücksichtigt.

für elastischen Kopf- und Fußring somit

$$H = \frac{\int_0^b M_0 \, y \, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 \, ds + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{J_b}{J_r} \cdot r^3 + \frac{J_b}{J_R} \cdot R^3\right)} \quad . \; . \; 6')$$

$r =$ Kopfringradius; $J_b =$ konstantes Rippenträgheitsmoment; $R = r + b$ $=$ Fußringradius; J_r und J_R die konstanten Trägheitsmomente des Kopf- bezw. Fußringes.

Bei einseitiger Belastung erfahren die Ringe des Hauptsystems (mit Ausnahme des Fußringes) auch Verschiebungen nach der unbelasteten Seite zu. Da Übertragungen von Querkräften zufolge der Systemwahl nicht stattfinden, so bleiben die Ringe in ihrer Horizontalebene.

Der vorläufig absolut starr gedachte Kopfring verschiebe sich um Δ (Abb. 9). Der Starrheit des Ringes wegen ist die Verschiebung beider Ringanschlußpunkte gleich groß.

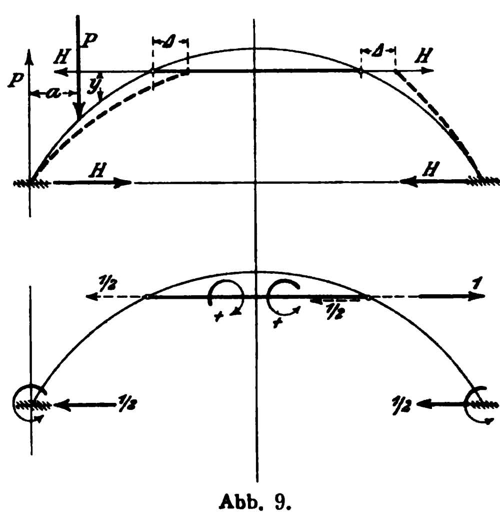


Abb. 9.

Nach dem Satze von den virtuellen Verschiebungen ist

$$E J_b \cdot \Delta = 2 \cdot \int_0^b M_x \, M' \, ds,$$

die Momente M_x sind links: $M_x = M_0 - H \cdot y,$

rechts: $M_x = - H \cdot y.$

Die Momente des statisch bestimmten Hauptfalls M'

sind links: $M' = + \frac{y}{2}$

rechts: $M' = - \frac{y}{2}$

$$E J_b \cdot \Delta = \int_0^b \left(M_0 \frac{y}{2} - \frac{H \cdot y^2}{2} + \frac{H \cdot y^2}{2}\right) ds$$

$$2 \, E J_b \cdot \Delta = \int_0^b M_0 \cdot y \, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

und die Beziehung zwischen Schub und Verschiebung Δ aus 5) und 7)

$$H = \frac{\frac{EJ_b \cdot \Delta}{b}}{\int\limits_0^b y^2\, ds}.$$

3. Voll- und halbsymmetrische Kräfte des Systems.

Das in der Einleitung näher beschriebene System erfährt im wesentlichen seine Beanspruchungen durch zwei Kräftegruppen. Eine dieser Gruppen umfaßt die Kräfte, welche in bezug auf zwei Achsen, die zueinander rechtwinklig stehen, symmetrisch sind, und eine Gruppe die Kräfte, welche nur in bezug auf die eine dieser Achsen Symmetrie zeigen. Die Achsen sind: Die Achse des (belasteten) Hauptsystems und die Normale desselben. Die beiden an den Ringen des Hauptsystems angreifenden gleichen Schübe bringen Formänderungen der Ringe hervor, welche auch bezüglich der Normalen der Hauptsystemebene symmetrisch sind. Diese Formänderungen erzeugen in den unbelasteten, an das Hauptsystem angeschlossen gedachten Nebenrippen Kräfte, welche gleichfalls bezüglich beider Achsen symmetrisch sind.

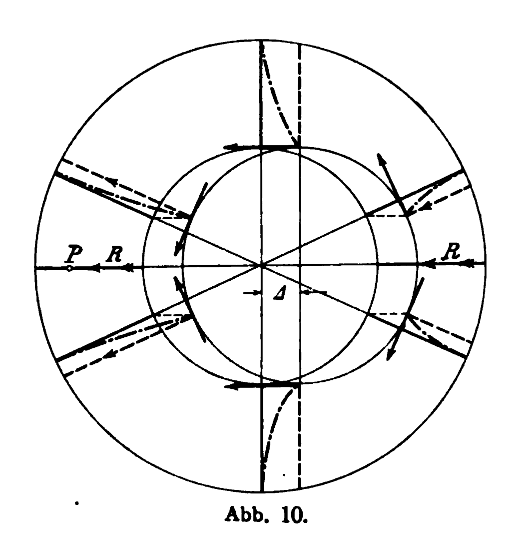
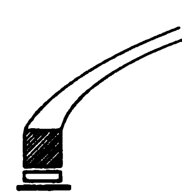


Abb. 10.

Die Verschiebung der Ringe des einseitig belasteten Hauptsystems [für starren Kopfring Δ nach 7)] bringt in den Rippen der unbelasteten Kuppelhälfte Zusammendrückungen hervor, während die Rippen der belasteten Kuppelhälfte Verlängerungen erfahren.

Abb. 10 zeigt die durch Δ hervorgerufenen Lagenänderungen der Nebenrippen und die dadurch von den Rippen auf den (starr gedachten) Ring ausgeübten Reaktionen. Die — — — -Lage der Rippen für den Fall, daß diese auf seitliche Biegung nicht beansprucht werden sollten, was man sich durch eine horizontale Beweglichkeit der Fußlager, die im vertikalen Sinne die oben beschriebene Lagerung beibehalten sollen, erreicht denken kann (Abb. 11). Die — · — · — -Lage der Rippen setzt eine auch im wagerechten Sinne feste Einspannung am Fuße voraus. In diesem Falle üben die Nebenrippen neben den radialen auch tangentielle Reaktionen auf die Ringe aus.


Abb. 11.

Der starre Ring überträgt diese Reaktionen (sowohl die radialen als auch die tangentiellen) auf das Hauptsystem und bewirkt so eine Formänderungsverminderung desselben, indem die belastete Hälfte eine Krümmungsverschärfung der Rippe, die unbelastete eine Streckung erfährt.

Ebenso gerichtete Kräfte treten durch die Verschiebung Δ auch bei elastisch nachgiebigen Ringen auf, deren Größe sich aber auch nach den Formänderungsanteilen der Kräftegruppe für die Ringe und die Rippen richtet.

Durch Superposition der Wirkungen der voll- und halbsymmetrischen Kräfte bestimmen sich die Auflagerkräfte des ganzen Systems.

4. Die vollsymmetrischen Kräfte.

Es bezeichne: $\delta_0^{(r)}, \delta_1^{(r)}, \delta_2^{(r)}$ die resultierende Formänderung bei angeschlossenen Nebenrippen; $\delta_0, \delta_\varphi, \delta_{\frac{\pi}{2}}$ usw. die Ringdeformationen des von Nebenrippen freien Ringes im Sinne der Gleichungen 2), 3) und 4)

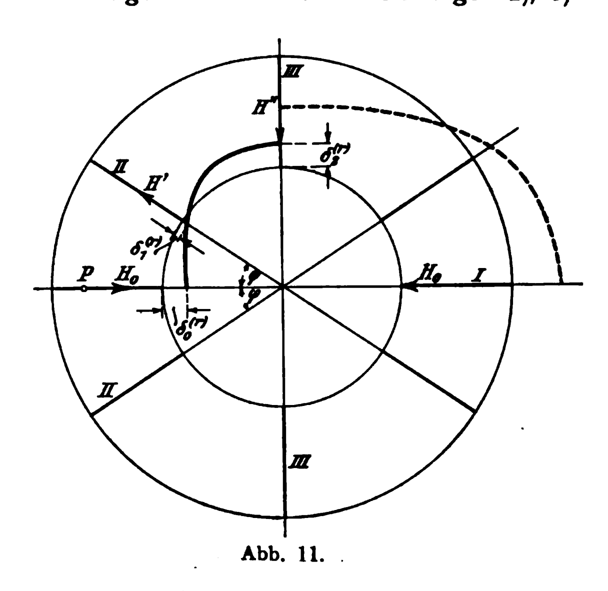


Abb. 11.

$$\delta_\varphi = \frac{Hr^3}{4\,EJ_r}\left[\frac{4}{\pi} + \cos\varphi\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi\right].$$

Es bezeichne:

$$K_\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi} + \cos\varphi\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi\right]$$

$$\delta_\varphi = \frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\cdot K_\varphi$$

$$\delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\cdot K_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\delta_0 = -\frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{Hr^3}{2\,EJ_r}\cdot K_0.$$

Es bezeichne:

$$K_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$K_0 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$K_{\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi} + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi\right]$$

$$K_{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi\right].$$

Daher $K_{\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = K_{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$; $\qquad K_0 = K_\pi$.

Es sind die resultierenden Formänderungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_0^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2\,EJ_r}\left[H_0 \cdot K_0 + 2\,H' K_\varphi + H'' K_{\frac{\pi}{2}}\right] \\ H_0 &= \frac{2\,EJ_b \cdot \delta_0^{(r)} + \int_0^b M_0\, y\, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2\, ds} \end{aligned}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2\,EJ_r}\left[H_0 \cdot K_\varphi + H'(K_0 + K_{2\varphi}) + H'' K_{\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right] \\ H' &= \frac{EJ_b \cdot \delta_1^{(r)}}{\int_0^b y^2\, ds} \end{aligned}\right\} (2) \quad . \quad 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_2^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2\,EJ_r}\left[H \cdot K_{\frac{\pi}{2}} + 2\,H' K_{\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} + H'' K_0\right] \\ H'' &= \frac{EJ_b \cdot \delta_2^{(r)}}{\int_0^b y^2\, ds} \end{aligned}\right\} (3)$$

Aus diesen n Gleichungen sind n Bogenkräfte der Rippen bestimmbar.

Sind Kopf- und Fußring elastisch, so ist

$$\left.\begin{aligned} \delta_0^{(r)} &= \frac{1}{2E}\left(\frac{r^3}{J_r}+\frac{R^3}{J_R}\right)\left[H_0\cdot K_0+2H'K_\varphi+H''K_{\frac{\pi}{2}}\right] \\ H_0 &= \frac{-2EJ_b\cdot\delta_0+\int\limits_0^b M_0\,y\,ds}{2\cdot\int\limits_0^b y^2\,ds} \end{aligned}\right\} \quad (1') \;.\; 8')$$

usw.

---

5. Die halbsymmetrischen Kräfte.

Wie in 3. ausgeführt, entstehen diese Kräfte durch die Verschiebungen des Systems nach der unbelasteten Seite. Diese Wirkungen seien zunächst unter der Voraussetzung absolut starrer Ringe und seitlich nicht biegungsfähiger (entsprechend gelagerter) Rippen untersucht. Durch die Verschiebung der Ringe (in Abb. 12 des Kopfringes) werden von diesen auf je zwei diametral liegende Rippenhälften gleiche und, absolut genommen, gleich gerichtete Schübe H_2, H_3 . . . ausgeübt. Die Widerstände der Rippen werden in ihrer Resultierenden durch die starren Ringe auf das Hauptsystem übertragen.

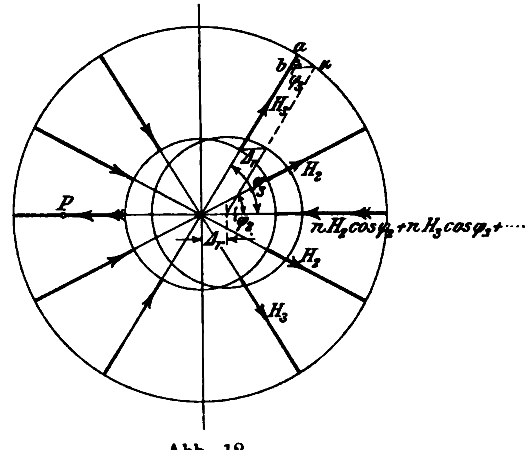


Abb. 12.

Das ganze System sei unter der Wirkung aller Rippen bei der resultierenden Ringverschiebung Δ_r im Gleichgewicht.

Die Verkürzung bezw. Verlängerung einer Rippenhälfte ergibt sich aus $ab\alpha$ durch $ab = \Delta_r\cdot\cos\varphi$.

Die resultierende Verschiebung des Hauptsystems besteht aus der Verschiebung des Hauptsystems allein

$$\Delta_0 = \frac{\int\limits_0^b M_0\,y\,ds}{2\,EJ_b}$$

und der rückschiebenden Wirkung der am Hauptsystem angreifenden Widerständeresultierenden R:

$$EJ_b\cdot\Delta_R = R\int\limits_0^b y^2\,ds = (n\,H_2\cos\varphi_2+n\,H_3\cos\varphi_3+\ldots)\int\limits_0^b y^2\,ds.$$

Diese resultierende Ringverschiebung ist zufolge der Starre der Ringe für alle Punkte derselben gleich Δ_r. Der für eine beliebige Rippe m in deren Achse entfallende Verschiebungsteil $\Delta_m = ab = \Delta_r \cos \varphi$

$$E J_b \cdot \Delta_m = H_m \cdot \int_0^b y^2\, ds; \qquad \Delta_r = \frac{\Delta_m}{\cos \varphi_m} = \frac{H_m}{E J_b \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2\, ds.$$

Daher

$$\Delta_r = \frac{1}{2 E J_b} \cdot \int_0^b M_0\, y\, ds - \frac{n\,(H_2 \cos \varphi_2 + H_3 \cos \varphi_3 + \ldots H_m \cos \varphi_m)}{E J_b} \cdot \int_0^b y^2\, ds$$

$$= \frac{H_2}{E J_b \cos \varphi_2} \cdot \int_0^b y^2\, ds = \frac{H_3}{E J_b \cos \varphi_3} \cdot \int_0^b y^2\, ds = \ldots \frac{H_m}{E J_b \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2\, ds \quad 9)$$

$n =$ Anzahl der auf jeder Kuppelhälfte unter dem gleichen Winkel φ zur Hauptsystemachse liegenden Rippenhälften. (Bei einfachen Rippen $n = 2$, bei Doppelrippen [Skizze] $n = 4$ usw.)

Aus den m Gleichungen 9) ergibt sich zunächst

$$H_3 = H_2 \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2}; \qquad H_4 = H_3 \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_3} = H_2 \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_2} = \ldots H_m \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_m}.$$

Die zur Bestimmung von H_m aus der Gruppe 9 dienende Gleichung kann somit auch geschrieben werden:

$$\Delta_r = \frac{1}{2 E J_b} \cdot \int_0^b M_0\, y\, ds - \frac{n}{E J_b} \left(H_m \cdot \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_m} + H_m \cdot \frac{\cos^2 \varphi_3}{\cos \varphi_m} + \ldots H_m \cdot \cos \varphi_m \right) \cdot \int_0^b y^2\, ds$$

$$= \frac{H_m}{E J_b \cdot \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2\, ds$$

$$H_m = \frac{\int_0^b M_0\, y\, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2\, ds \left[n \left(\cos \varphi_m + \ldots \frac{\cos^2 \varphi_3}{\cos \varphi_m} + \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_m} \right) + \frac{1}{\cos \varphi_m} \right]}$$

und unter Berücksichtigung, daß

$$X = \frac{\int_0^b M_0\, y\, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2\, ds} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

der Schub des Hauptsystems mit starrem Ringe, ist

$$H_m = \frac{X \cdot \cos \varphi_m}{1 + n(\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 + \ldots \cos^2 \varphi_m)} \quad . \; . \; . \quad 10)$$

Wenn nur ein Rippenpaar außer dem Hauptsystem vorhanden ist:

$$H_\varphi = \frac{X \cdot \cos \varphi}{1 + 2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $H_\varphi = 0$

für $\varphi = 0$: $H_\varphi = \frac{X}{3}$.

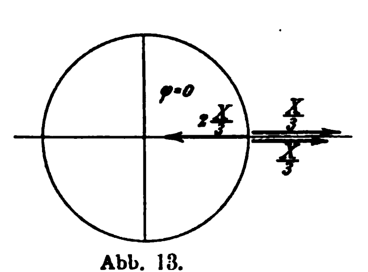


Abb. 13.

Die Wirkung auf das Hauptsystem ist auch hier $= 0$, da $R = 2\frac{X}{3}$ sich gegen die beiden auch am Hauptsystem angreifenden Schübe von je $H_\varphi = \frac{X}{3}$ aufhebt.

Die Frage nach $\max H_\varphi$ wird gelöst durch

$$\frac{d H_\varphi}{d \varphi} = X \cdot \frac{-(1 + 2\cos^2 \varphi)\sin \varphi + 4 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 + 2\cos^2 \varphi)^2} = 0$$

$$-\sin \varphi + 2 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}; \qquad \max H_\varphi = \frac{X}{2\sqrt{2}}.$$

Im vorstehenden waren stets Rippen vorausgesetzt, welche vermöge ihrer Fußlagerung keine Biegungen im wagerechten Sinne erfahren sollen. Die Rippen müßten in diesem Falle durch die Verschiebung des starren Ringes um Δ_r parallel zu ihrer Anfangslage verschiebbar sein (Abb. 10).

Der allgemeinere und mit der Wirklichkeit besser übereinstimmende Annahmefall ist der mit seitlich biegungsfähigen Rippen.

In Abb. 14 bezeichne

Δ_r die resultierende Verschiebung des Ringes,

u die Verkürzung der unter φ gelagerten Rippe,

v die tangentielle Verschiebung derselben am Ringe.

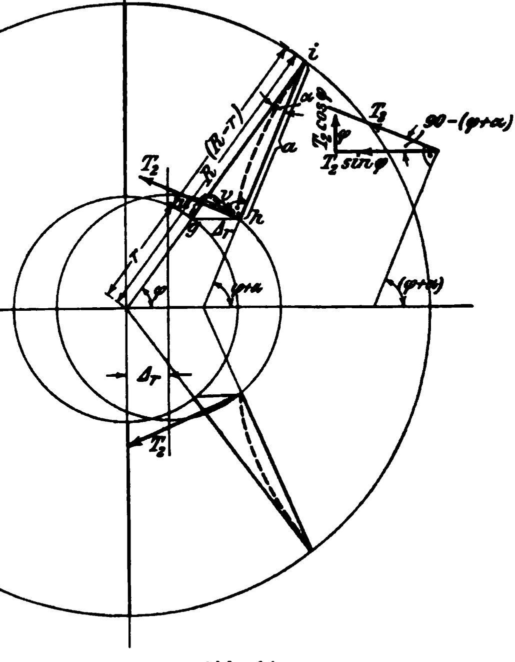


Abb. 14.

Es ergibt sich aus den geometrischen Beziehungen unter Annahme einer sehr kleinen Verschiebung Δ_r:

$$\Delta ghi) \ldots \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta_r \cdot \sin \varphi}{(R - r) - \Delta_r \cdot \cos \varphi} \doteq \alpha$$

$$a = \sqrt{\Delta_r^2 + (R - r)^2 - 2 \Delta_r (R - r) \cos \varphi}$$

und unter Vernachlässigung von Δ_r^2:

$$a = (R - r) + \frac{1}{2 (R - r)} [\Delta_r^2 - 2 \Delta_r (R - r) \cos \varphi] + \ldots$$

$$a = (R - r) \doteq \Delta_r \cdot \cos \varphi.$$

$$v = a \cdot \operatorname{tg} \alpha = [(R - r) - \Delta_r \cdot \cos \varphi] \cdot \frac{\Delta_r \cdot \sin \varphi}{(R - r) - \Delta_r \cdot \cos \varphi}$$

$$\doteq (R - r) \frac{\Delta_r \cdot \sin \varphi}{(R - r) - \Delta_r \cdot \cos \varphi} \doteq \Delta_r \cdot \sin \varphi$$

$$v = \Delta_r \cdot \sin \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

$$u = (R - r) - a = \Delta_r \cdot \cos \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

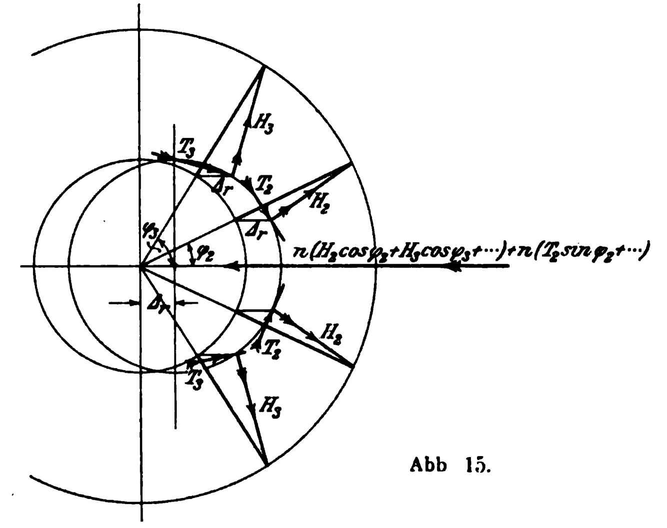


Abb 15.

Über die Elastizitätsverhältnisse der Rippen für die seitliche Biegung sei folgendes festgesetzt:

J_s sei das konstante, für alle Rippen gleiche Trägheitsmoment in bezug auf die vertikale Hauptachse des Rippenquerschnitts.

Ferner

$$b = (R - r)$$

(vergl. Abb. 6).

Ebenso wie unter 5a, ergibt sich die Verkürzung der Nebenrippe „m“:

$$u_m = \Delta_r \cdot \cos \varphi_m = \frac{H_m}{E J_b} \cdot \int_0^b y^2 \, ds$$

und die seitliche Ausweichung:

$$v_m = \Delta_r \cdot \sin \varphi_m = \frac{T_m}{E J_s} \cdot \int_0^b x^2 \, dx = \frac{T_m b^3}{3 E J_s} \cdot$$

Die unter φ_2 geneigte Rippe habe den Schub H_2 und die Tangentialkraft T_2
„ „ φ_3 „ „ „ „ „ H_3 „ „ „ T_3
„ „ φ_m „ „ „ „ „ H_m „ „ „ T_m
(Abb. 15).

Analog den Gleichungen 9) ergeben sich zur Bestimmung aller Kräfte H und T folgende $2\,m$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta r &= \frac{1}{2\,E J_b}\cdot\int_0^b M_0\, y\, ds - \\
&- \frac{n}{E J_b}\cdot(H_2\cdot\cos\varphi_2 + H_3\cdot\cos\varphi_3 + \ldots H_m\cdot\cos\varphi_m + T_2\cdot\sin\varphi_2 + T_3\cdot\sin\varphi_3 + \ldots T_m\cdot\sin\varphi_m)\cdot\int_0^b y^2\, ds \\
&= \frac{1}{E J_b}\cdot\frac{H_2}{\cos\varphi_2}\cdot\int_0^b y^2\, ds = \frac{1}{E J_b}\cdot\frac{H_3}{\cos\varphi_3}\cdot\int_0^b y^2\, ds = \ldots \frac{1}{E J_b}\cdot\frac{H_m}{\cos\varphi_m}\cdot\int_0^b y^2\, ds \\
&= \frac{1}{E J_s}\cdot\frac{T_2}{\sin\varphi_2}\cdot\frac{b^3}{3} = \frac{1}{E J_s}\cdot\frac{T_3}{\sin\varphi_3}\cdot\frac{b^3}{3} = \ldots \frac{1}{E J_s}\cdot\frac{T_m}{\sin\varphi_m}\cdot\frac{b^3}{3}
\end{aligned}\right\}\quad 13)$$

$$H_3 = H_2\cdot\frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_2}\ldots H_m = H_2\cdot\frac{\cos\varphi_m}{\cos\varphi_2}$$

$$T_3 = T_2\cdot\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_2}\ldots T_m = T_2\cdot\frac{\sin\varphi_m}{\sin\varphi_2}\,;\qquad T_m\cdot\sin\varphi_m = H_2\cdot\frac{\sin^2\varphi_m}{\cos\varphi_2}\cdot\left(\frac{J_s}{J_b}\right)\cdot\frac{3\cdot\int_0^b y^2\, ds}{b^3}.$$

Unter Einführung des Schubes X des Hauptsystems allein nach 5):

$$H_m = \frac{X\cdot\cos\varphi_m}{1 + n\,(\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 + \ldots\cos^2\varphi_m) + n\,(\sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 + \ldots\sin^2\varphi_m)\cdot\left(\frac{J_s}{J_b}\right)\cdot\int_0^b y^2\, ds\cdot\frac{3}{b^3}}\qquad 14)$$

$$T_m = \frac{X\cdot\sin\varphi_m}{\frac{b^3}{3}\cdot\left(\frac{J_b}{J_s}\right)\cdot\frac{(1 + n\cdot\cos^2\varphi_2 + n\cdot\cos^2\varphi_3 + \ldots n\cdot\cos^2\varphi_m)}{\int_0^b y^2\, ds} + n\,(\sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 + \ldots\sin^2\varphi_m)}\qquad 15)$$

In vorstehenden Abschnitten 2 bis 5 war das Vorhandensein nur eines Ringes (Kopfringes), mit Ausnahme der Behandlung der vollsymmetrischen Kräfte, angenommen. Im folgenden sollen nun für mehrere Ringe (Vorhandensein von Zwischenringen) die vollsymmetrischen Kräfte und Formänderungen von elastischen Ringen sowie die halbsymmetrischen Kräfte bei starren Ringen untersucht werden. Die Behandlung der halbsymmetrischen Kräfte für elastische Ringe soll für einen und mehrere Ringe getrennt erfolgen.

6. Das Hauptsystem mit Zwischenringen.

Bei der getroffenen Annahme über das Hauptsystem ist dasselbe bei n Zwischenringen $(n + 1)$ fach statisch unbestimmt.

6a. Die Ringkräfte bei starren Ringen.

$$L = \int\frac{M_y^2}{E J_b}\cdot ds;\qquad \frac{dL}{dX_1} = 0;\qquad \frac{dL}{dX_2} = 0;$$

links: von B—A: $M_y = -X_2 y + M_0$

von A—D: $M_y = -X_2 y - X_1 (y - h) + M_0$;

rechts: von B—A: $M_y = - X_2 y$

von A—D: $M_y = - X_2 y - X_1 (y - h)$

von B—D: $\frac{dM_y}{dX_2} = - y$; von A—D: $\frac{dM_y}{dX_1} = -(y - h)$;

von B—A: $\frac{dM}{dX_1} = 0$

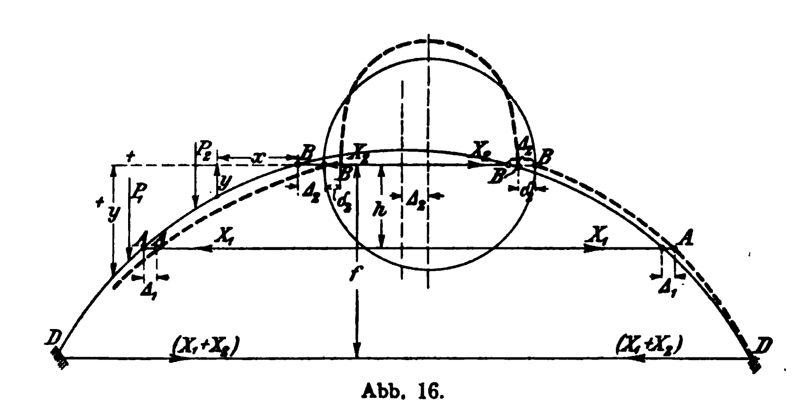


Abb. 16.

$$\frac{dL}{dX_2} = 2 X_2 \cdot \int_B^D y^2 \, ds - \int_B^D M_0 \, y \, ds + 2 X_1 \cdot \int_A^D y (y - h) \, ds = 0$$

$$\frac{dL}{dX_1} = 2 X_2 \cdot \int_A^D y (y - h) \, ds - \int_A^D M_0 (y - h) \, ds + 2 X_1 \cdot \int_A^D (y - h)^2 \, ds = 0.$$

Es bezeichne

$$\int_A^D y \, y_1 \cdot ds = Y_{1,2}; \quad y_1 = y - h$$

$$\int_B^D y^2 \, ds = Y_{2,2}; \quad \int_A^D y_1^2 \, ds = Y_{1,1}; \quad \int_B^D M_0 \, y \, ds = \mu_{2,2}; \quad \int_A^D M_0 \, y_1 \, ds = \mu_{1,1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 X_2 \cdot Y_{2,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,2} = \mu_{2,2} \\ 2 X_2 \cdot Y_{1,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,1} = \mu_{1,1} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

$$X_2 = \frac{\mu_{2,2} \cdot Y_{1,1} - \mu_{1,1} \cdot Y_{1,2}}{Y_{2,2} \cdot Y_{1,1} - Y_{1,2}^2}; \quad X_1 = \frac{\mu_{1,1} \cdot Y_{2,2} - \mu_{2,2} \cdot Y_{1,2}}{Y_{2,2} \cdot Y_{1,1} - Y_{1,2}^2}.$$

Die Größen $Y_{1,1}$, $Y_{1,2}$, $Y_{2,2}$, $\mu_{1,1}$ und $\mu_{2,2}$ können, ebenso wie in Abschnitt 2 für das Hauptsystem mit einem Ringe gezeigt, durch Seilpolygone der Kräftepläne der „Kräfte" y bezw. y_1 konstruiert werden, auch für inkonstantes J_b der Rippen.

6b. Die Ringkräfte des Hauptsystems für elastische Ringe werden durch Anwendung des Satzes von Castigliano erhalten:

$$\frac{dL}{dX_2} = -2\,\delta_2; \quad \frac{dL}{dX_1} = -2\,\delta_1;$$

die Gleichungen 16) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} 2\,X_2 \cdot Y_{2,2} + 2\,X_1 \cdot Y_{1,2} - \mu_{2,2} &= -2\,EJ_b \cdot \delta_2 \\ 2\,X_2 \cdot Y_{1,2} + 2\,X_1 \cdot Y_{1,1} - \mu_{1,1} &= -2\,EJ_b \cdot \delta_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 16')$$

Es bezeichne r_1, r_2, $J_{r,1}$ und $J_{r,2}$ die Radien und Trägheitsmomente der Ringe (Fußring nicht vorhanden oder starr), so ist nach 4):

$$\delta_2 = \frac{X_2 \cdot r_2^3}{2\,EJ_{r,2}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right); \quad \delta_1 = \frac{X_1 \cdot r_1^3}{2\,EJ_{r,1}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right).$$

Es bezeichne wieder $K_0 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right)$ [absolut genommen, Vorzeichen ist in 16') berücksichtigt]:

$$X_2 \cdot \left[2\,Y_{2,2} + \left(\frac{J_b}{J_{r,2}}\right) \cdot r_2^3\,K_0\right] + 2\,X_1 \cdot Y_{1,2} = \mu_{2,2}$$

$$2\,X_2 \cdot Y_{1,2} + X_1 \cdot \left[2\,Y_{1,1} + \left(\frac{J_b}{J_{r,1}}\right) \cdot r_1^3\,K_0\right] = \mu_{1,1}.$$

Ist der Fußring auch elastisch (Radius R, Trägheitsmoment J_R), so ist die Gesamtverschiebung zwischen Ring 2 und Fußring, absolut genommen:

$$\delta_2 = \frac{X_2}{2\,E} \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R}\right) \cdot K_0; \quad \delta_1 = \frac{X_1}{2\,E} \cdot \left(\frac{r_1^3}{J_{r,1}} + \frac{R^3}{J_R}\right) \cdot K_0$$

und somit die zwei Gleichungen zur Ermittlung der Ringkräfte:

$$\left.\begin{aligned} X_2 \cdot \left\{2\,Y_{2,2} + \left[\left(\frac{J_b}{J_{r,2}}\right) \cdot r_2^3 + \left(\frac{J_b}{J_R}\right) \cdot R^3\right] \cdot K_0\right\} + 2\,X_1 \cdot Y_{1,2} &= \mu_{2,2} \\ 2\,X_2 \cdot Y_{1,2} + X_1 \cdot \left\{2\,Y_{1,1} + \left[\left(\frac{J_b}{J_{r,1}}\right) \cdot r_1^3 + \left(\frac{J_b}{J_R}\right) \cdot R^3\right] \cdot K_0\right\} &= \mu_{1,1} \end{aligned}\right| \quad 17)$$

Ebenso für n Zwischenringe die $(n + 1)$ Gleichungen 17) zur Bestimmung der Ringkräfte für das Hauptsystem allein bei elastischen Ringen.

7. Die vollsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren Zwischenringen.

Für im ganzen n Ringe, deren einer der Fußring ist, und m Rippen ergeben sich $m\,(n - 1)$ Doppelgleichungen zur Bestimmung der vollsymmetrischen Ringformveränderungen und der Schübe. Die am Fußring angreifenden Schübe sind für diese vollsymmetrischen Kräfte gleich der algebraischen Summe der einzelnen Ringkräfte jeder Rippe.

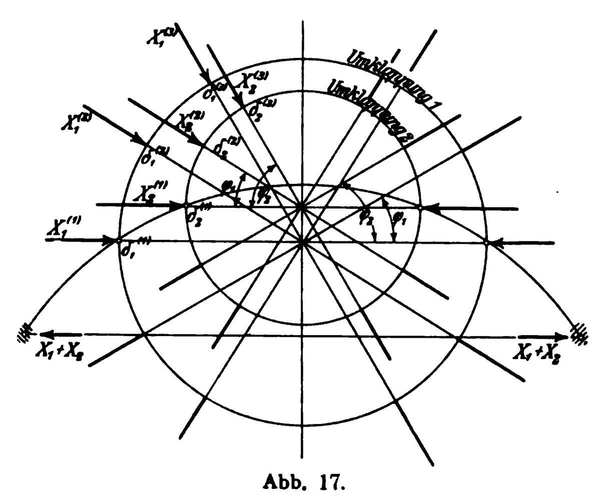


Abb. 17.

Es bezeichne im folgenden: die Schübe des obersten Ringes, je nach der Rippe:

$$X_2^{(1)};\quad X_2^{(2)};\quad X_2^{(3)};$$

die Verschiebungen an diesem Ring und dem Fußring, je nach der Rippe:

$$\delta_2^{(1)};\quad \delta_2^{(2)};\quad \delta_2^{(3)};$$

die Schübe am Zwischenring, je nach der Rippe:

$$X_1^{(1)};\quad X_1^{(2)};\quad X_1^{(3)};$$

die Verschiebungen:

$$\delta_1^{(1)};\quad \delta_1^{(2)};\quad \delta_1^{(3)}.$$

Die Schübe am Fußring sind sodann

$$\left[X_2^{(1)}+X_1^{(1)}\right];\quad \left[X_2^{(2)}+X_1^{(2)}\right];\quad \left[X_2^{(3)}+X_1^{(3)}\right].$$

Die $(n-1)\,m$ Doppelgleichungen, die sich durch Anwendung von 8) und 16′) ergeben, lauten:

Rippe 1 (Hauptsystem)

$$\left.\begin{aligned}\delta_2^{(1)} &= \frac{1}{2\,E}\cdot\left(\frac{r_2^{\,3}}{J_{r,2}}+\frac{R^3}{J_R}\right)\cdot\left[X_2^{(1)}\cdot K_0+2\,X_2^{(2)}\cdot K_{\varphi,1}+2\,X_2^{(3)}\cdot K_{\varphi,2}\right]\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_2^{(1)} &= -\mu_{2,2}+2\,X_2^{(1)}\cdot Y_{2,2}+2\,X_1^{(1)}\cdot Y_{1,2}\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_1^{(1)} &= \frac{1}{2\,E}\cdot\left(\frac{r_1^{\,3}}{J_{r,1}}+\frac{R^3}{J_R}\right)\cdot\left[X_1^{(1)}\cdot K_0+2\,X_1^{(2)}\cdot K_{\varphi,1}+2\,X_1^{(3)}\cdot K_{\varphi,2}\right]\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_1^{(1)} &= -\mu_{1,1}+2\,X_2^{(1)}\cdot Y_{2,1}+2\,X_1^{(1)}\cdot Y_{1,1}\text{*)}\end{aligned}\right\}(2)$$

Rippe 2

$$\left.\begin{aligned}\delta_2^{(2)} &= \frac{1}{2\,E}\cdot\left(\frac{r_2^{\,3}}{J_{r,2}}+\frac{R^3}{J_R}\right)\cdot\left[X_2^{(2)}\cdot(K_0+K_{2\varphi,1})+X_2^{(3)}\cdot(K_{(\varphi,2-\varphi,1)}+K_{(\varphi,2+\varphi,1)})+X_2^{(1)}\cdot K_{\varphi,1}\right]\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_2^{(2)} &= +2\,X_2^{(2)}\cdot Y_{2,2}+2\,X_1^{(2)}\cdot Y_{1,2}\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_1^{(2)} &= \frac{1}{2\,E}\cdot\left(\frac{r_1^{\,3}}{J_{r,1}}+\frac{R^3}{J_R}\right)\cdot\left[X_1^{(2)}\cdot(K_0+K_{2\varphi,1})+X_1^{(3)}\cdot(K_{(\varphi,2-\varphi,1)}+K_{(\varphi,2+\varphi,1)})+X_1^{(1)}\cdot K_{\varphi,1}\right]\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_1^{(2)} &= +2\,X_2^{(2)}\cdot Y_{2,1}+2\,X_1^{(2)}\cdot Y_{1,1}\end{aligned}\right\}(4)$$

Rippe 3

$$\left.\begin{aligned}\delta_2^{(3)} &= \dots\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_2^{(3)} &= \dots\end{aligned}\right\}(5)\qquad \left.\begin{aligned}\delta_1^{(3)} &= \dots\\ 2\,EJ_b\cdot\delta_1^{(3)} &= \dots\end{aligned}\right\}(6)\quad \dots\dots$$

(Gleichungen 1–6 zusammen: 18))

Hieraus die $(n-1)\,m$ unbekannten vollsymmetrischen Kräfte.

*) $Y_{2,1}=Y_{1,2}$.

8. Die halbsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren (starren) Ringen.

Es bezeichne (siehe Abb. 18)

Δ_2 die Verschiebung des obersten Ringes nach der unbelasteten Seite zu am Hauptsystem allein,

Δ_1 dieselbe Verschiebung des Zwischenringes,

X_1 und X_2 die Ringkräfte nach 16), am Hauptsystem mit starren Ringen.

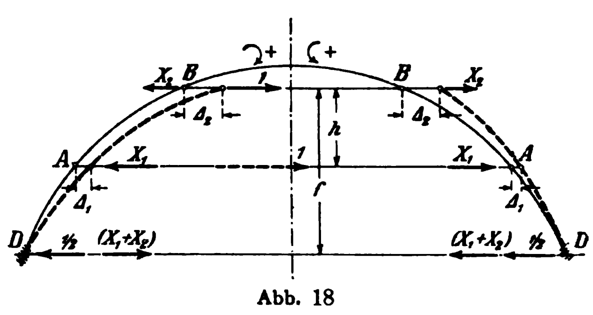


Abb. 18

Es bestimmen sich sonach die Verschiebungen nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$EJ_b \cdot \Delta_2 = \int_0^b M_y M_2' \, ds + \int_0^b M_y M_2' \, ds$$

und

$$EJ_b \cdot \Delta_1 = \int_0^b M_y M_1' \, ds + \int_0^b M_y M_1' \, ds,$$

worin die Momente M_2' die am statisch bestimmten Fall, bei Wirkung von 1 am Kopfring bedeutet M_1' die des statisch bestimmten Falles für 1 am Zwischenring.

Es ergeben sich die M_y wie in 6a):

links: von $B—D$: $M_2' = +\frac{y}{2}$ | $M_1' = 0$

von $A—D$: $M_2' = +\frac{y}{2}$ | $M_1' = +\frac{(y-h)}{2} = +\frac{y_1}{2}$

rechts: von $B—D$: $M_2' = -\frac{y}{2}$ | $M_1' = 0$

von $A—D$: $M_2' = -\frac{y}{2}$ | $M_1' = -\frac{y_1}{2}$

$$EJ_b \cdot \Delta_2 = \int_B^D - X_2 \cdot \frac{y^2}{2} \, ds + \int_B^D \frac{M_0 y}{2} \, ds - \int_A^D X_1 y \cdot \frac{y_1}{2} \, ds$$

$$+ \int_B^D X_2 \cdot \frac{y^2}{2} \, ds + X_1 \cdot \int_A^D y \cdot \frac{y_1}{2} \, ds;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\,EJ_b \cdot \varDelta_2 = \int\limits_B^D M_0\, y\, ds = \mu_{2,2}; \quad \varDelta_2 = \dfrac{\mu_{2,2}}{2\,EJ_b} \\ \text{ebenso ergibt} \qquad \varDelta_1 = \dfrac{\mu_{1,1}}{2\,EJ_b} \end{array}\right\} \quad . \; . \; 19)$$

Es bezeichne wie in 7), nur mit der Änderung, daß es sich hier um die halbsymmetrischen Kräfte handelt:

$X_2^{(2)} \cdot X_2^{(3)} \ldots X_2^{(m)}$ die halbsymmetrischen Kräfte am oberen Ring,
$X_1^{(2)} \cdot X_1^{(3)} \ldots X_1^{(m)}$ „ „ „ „ Zwischenring,

berücksichtigt man ferner aus 16) und 19)

$$\varDelta_2 = \frac{X_2 \cdot Y_{2,2} + X_1 \cdot Y_{1,2}}{EJ_b}; \quad \varDelta_1 = \frac{X_2 \cdot Y_{2,1} + X_1 \cdot Y_{1,1}}{EJ_b} \quad . \; . \; 19')$$

Die resultierende Verschiebung am oberen Ring unter Mitwirkung von m Nebenrippen sei $\varDelta_{r,2}$, am Zwischenring $\varDelta_{r,1}$, so ist wie in 5):

$$\varDelta_{r,2} = \frac{\varDelta_2^{(m)}}{\cos\varphi_m} = \frac{X_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m} = \frac{V^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

$$\varDelta_{r,1} = \frac{\varDelta_1^{(m)}}{\cos\varphi_m} = \frac{X_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m} = \frac{U^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

$$\varDelta_{r,2} = \frac{\mu_{2,2}}{2\,EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \left(V^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + V^{(3)} \cdot \cos\varphi_3 + \ldots V^{(m)} \cdot \cos\varphi_m\right)$$

$$= \frac{V^{(2)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2} = \frac{V^{(3)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_3} = \ldots \frac{V^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

$$\varDelta_{r,1} = \frac{\mu_{1,1}}{2\,EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \left(U^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + U^{(3)} \cdot \cos\varphi_3 + \ldots U^{(m)} \cdot \cos\varphi_m\right)$$

$$= \frac{U^{(2)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2} = \frac{U^{(3)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_3} = \ldots \frac{U^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mu_{2,2}}{2} \cdot \cos\varphi_m - V^{(m)} \left[1 + n\,(\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 + \ldots \cos^2\varphi_m)\right] = 0 \\ \dfrac{\mu_{1,1}}{2} \cdot \cos\varphi_m - U^{(m)} \left[1 + n\,(\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 + \ldots \cos^2\varphi_m)\right] = 0 \end{array}\right\} \quad 20)$$

Die Gleichungen 20) ermöglichen die Bestimmung der Unbekanntengruppen $U^{(m)}$, $V^{(m)}$ für die Rippe m.

Diese bekannt, bestimmen sich die Schübe $X_2^{(m)}$ und $X_1^{(m)}$ aus

$$\left.\begin{array}{l} V^{(m)} = X_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,2} \\ U^{(m)} = X_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,1} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 20')$$

Die Gleichungen 20) ergeben die halbsymmetrischen Kräfte unter Voraussetzung von seitlich nicht biegungsfähigen und dementsprechend gelagerten Rippen.

Im nachfolgenden mögen die halbsymmetrischen Kräfte unter Berücksichtigung der seitlichen Biegung der Rippen bei mehreren Ringen behandelt werden. Es bezeichne:

$H_2^{(2)}, H_2^{(3)} \dots H_2^{(m)}$ die halbsymmetrischen Schübe am oberen Ring der Rippen II, III ... *m*,

$T_2^{(2)}, T_2^{(3)} \dots T_2^{(m)}$ die Tangentialkräfte am oberen Ring (Ring 2),

$H_1^{(2)}, H_1^{(3)} \dots H_1^{(m)}$ desgl. die Schübe am Ring 1,

$T_1^{(2)}, T_1^{(3)} \dots T_1^{(m)}$ desgl. die Tangentialkräfte am Ring 1,

$\Delta_{r,2}$ und $\Delta_{r,1}$ die resultierenden Ringverschiebungen der Ringe 2 bezw. 1,

$v_2^{(2)}, v_2^{(3)} \dots v_2^{(m)}$ die tangentiellen Verschiebungen der Anschlußpunkte der Rippen II, III ... *m* an den Ring 2,

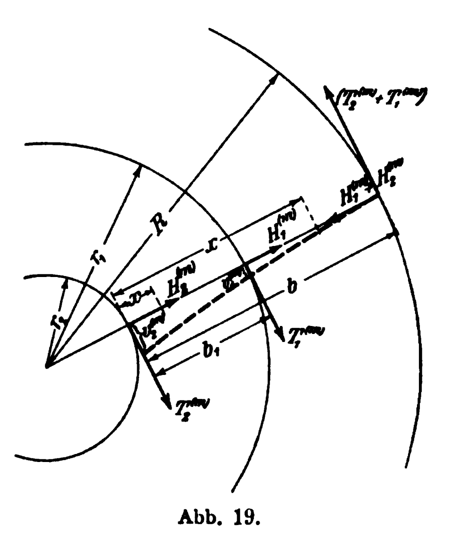


Abb. 19.

$v_1^{(2)}, v_1^{(3)} \dots v_1^{(m)}$ desgl. an den Ring 1,

$u_2^{(2)}, u_2^{(3)} \dots u_2^{(m)}$ die achsialen Verschiebungen der Anschlußpunkte der Rippen II, III ... *m* an den Ring 2,

$u_1^{(2)}, u_1^{(3)} \dots u_1^{(m)}$ desgl. an den Ring 1.

Entsprechend den Gleichungen 19') ist die achsiale Verschiebung einer Rippe durch die achsialen Kräfte derselben

$$\Delta_2 = \frac{\Sigma X_2 \cdot Y_{2,2} + \Sigma X_1 \cdot Y_{1,2}}{EJ_b}; \qquad \Delta_1 = \frac{\Sigma X_2 \cdot Y_{2,1} + \Sigma X_1 \cdot Y_{1,1}}{EJ_b};$$

hierin ist unter ΣX_2 und ΣX_1 die Projektion aller am Ring 2 bezw. Ring 1 angreifenden Schübe auch der Tangentialkräfte auf die in Betracht gezogene (Haupt-)Rippe zu verstehen.

Ferner ist entsprechend den Gleichungen 12)

$$\Delta_{r,2} = \frac{u_2^{(2)}}{\cos\varphi_2} = \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2}$$

$$\Delta_{r,2} = \frac{u_2^{(3)}}{\cos\varphi_3} = \frac{H_2^{(3)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(3)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_3}$$

. . . .

$$\Delta_{r,2} = \frac{u_2^{(m)}}{\cos\varphi_m} = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

$$\Delta_{r,1} = \frac{u_1^{(2)}}{\cos\varphi_2} = \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2}$$

. . . .

. . . .

$$\Delta_{r,1} = \frac{u_1^{(m)}}{\cos\varphi_m} = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$

Die Beziehungen zwischen den Tangentialkräften einer Rippe m und den seitlichen Verschiebungen $v_2^{(m)}$ und $v_1^{(m)}$ bestimmen sich wie folgt (siehe Abb. 19):

$$EJ_S \cdot v_2^{(m)} = \int_0^b M_x M_2' \, dx$$

$$\text{von } 0-b_1 \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x \\ M_2' = 1 \cdot x \end{cases}; \qquad \text{von } b_1-b \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x + T_1 (x-b_1) \\ M_2' = 1 \cdot x \end{cases}$$

$$EJ_S \cdot v_2^{(m)} = \int_0^b T_2 x^2 \, dx + \int_{b_1}^b T_1 x^2 \, dx - b_1 \cdot \int_{b_1}^b T_1 x \, dx;$$

hieraus
$$6\, EJ_S \cdot v_2^{(m)} = 2\, T_2^{(m)} \cdot b^3 + T_1^{(m)} (2\, b^3 + b_1^3 - 3\, b^2 b_1) \quad . \quad 21a)$$

---

ebenso
$$EJ_S \cdot v_1^{(m)} = \int_0^b M_x M_1' \, dx$$

$$\text{von } 0-b_1 \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x \\ M_1' = 0 \end{cases}; \qquad \text{von } b_1-b \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x + T_1 (x - b_1) \\ M_1' = 1\,(x - b_1) \end{cases}$$

$$EJ_S \cdot v_1^{(m)} = T_2 \cdot \int_{b_1}^b x\,(x - b_1)\, dx + T_1 \cdot \int_{b_1}^b (x - b_1)^2 \, dx;$$

hieraus

$$6\, EJ_S \cdot v_1^{(m)} = T_2^{(m)} (2 b^3 + b_1^3 - 3 b^2 b_1) + T_1^{(m)} (2 b^3 - 2 b_1^3 - 6 b^2 b_1 + 6 b b_1^2) \quad 21b)$$

Es bezeichne zur Abkürzung

$$\psi = \frac{b^3}{3}; \qquad \chi = \frac{(2\, b^3 + b_1^3 - 3\, b^2 b_1)}{6}; \qquad {}^{*)}\ \sigma = \frac{2\, b^3 + b_1^3 - 3\, b^2 b_1}{6}$$

$$\tau = \frac{(2\, b^3 - 2\, b_1^3 - 6\, b^2 b_1 + 6\, b\, b_1^2)}{6} = \frac{(b - b_1)^3}{3}.$$

Entsprechend den Gleichungen 11) ergibt sich:

$$\Delta_{r,2} = \frac{v_2^{(2)}}{\sin \varphi_2} = \frac{\psi \cdot T_2^{(2)} + \chi \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2} \qquad \Delta_{r,1} = \frac{v_1^{(2)}}{\sin \varphi_2} = \frac{\sigma \cdot T_2^{(2)} + \tau \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2}$$

. . . .

$$\Delta_{r,2} = \frac{v_2^{(m)}}{\sin \varphi_m} = \frac{\psi \cdot T_2^{(m)} + \chi \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m} \qquad \Delta_{r,1} = \frac{v_1^{(m)}}{\sin \varphi_m} = \frac{\sigma \cdot T_2^{(m)} + \tau \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m}$$

*) $\chi = \sigma$, wie dies auch unmittelbar aus dem Maxwellschen Satze folgt.

Entsprechend Gleichungen 13) ergeben sich folgende Gleichungsgruppen:

$$\Delta_{r,2} = \frac{\mu_{2,2}}{2EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \Big\{ \big[H_2^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_2^{(m)} \cdot \cos\varphi_m + T_2^{(2)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_2^{(m)} \cdot \sin\varphi_m \big] \cdot Y_{2,2}$$
$$+ \big[H_1^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_1^{(m)} \cdot \cos\varphi_m + T_1^{(2)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_1^{(m)} \cdot \sin\varphi_m \big] \cdot Y_{1,2} \Big\}$$
$$= \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$
$$= \frac{\psi \cdot T_2^{(2)} + \chi \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin\varphi_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\psi \cdot T_2^{(m)} + \chi \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin\varphi_m}$$

$$\Delta_{r,1} = \frac{\mu_{1,1}}{2EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \Big\{ \big[H_2^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_2^{(m)} \cdot \cos\varphi_m + T_2^{(2)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_2^{(m)} \cdot \sin\varphi_m \big] \cdot Y_{1,2}$$
$$+ \big[H_1^{(2)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_1^{(m)} \cdot \cos\varphi_m + T_1^{(2)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_1^{(m)} \cdot \sin\varphi_m \big] \cdot Y_{1,1} \Big\}$$
$$= \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos\varphi_m}$$
$$= \frac{\sigma \cdot T_2^{(2)} + \tau \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin\varphi_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\sigma \cdot T_2^{(m)} + \tau \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin\varphi_m}$$

Bei m Rippen und r Ringen (Fußring mitgezählt) enthalten die Gleichungsgruppen 22) $2 \cdot m\,(r-1)$ voneinander unabhängige Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten.

In den Abschnitten 5 und 8 waren für die Behandlung der halbsymmetrischen Kräfte starre Ringe vorausgesetzt. Im nachfolgenden sollen diese Kräfte unter Berücksichtigung der Ringelastizität ermittelt werden. Dazu ist vor allem wieder die Kenntnis der Ringformveränderungen unter der Einwirkung von Gruppen halbsymmetrischer, im Gleichgewicht befindlicher Kräfte nötig. Sind diese Formveränderungen bekannt, so können sie, zu den Rippenformänderungen in Beziehung gebracht, die halbsymmetrischen Kräfte bei elastischen Ringen finden lassen.

9. Halbsymmetrische Kräfte und Ringformveränderung.

A. Radiale Kräfte.

a) Ermittlung der Überzähligen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$2\,X - Y \cdot 2\,r = 0; \qquad Y = \frac{X}{r}$$

X ergibt sich aus

$$\frac{dL}{dX} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \cdot \frac{dM_\varphi}{dX} \cdot ds = 0;$$

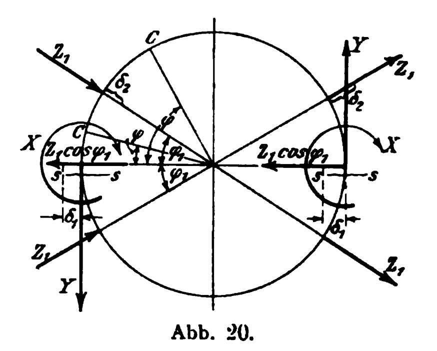


Abb. 20.

links: von $0-\varphi_1$: $M_\varphi = Z_1 \cdot \cos\varphi_1\, r \cdot \sin\varphi - Yr(1-\cos\varphi) + X$;

$$M_\varphi = X \cdot \cos\varphi + Z_1 \cdot \cos\varphi_1\, r \cdot \sin\varphi; \quad \frac{\partial M_\varphi}{dX} = \cos\varphi;$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$: $M_\varphi = X \cdot \cos\varphi + Z_1 \cdot \cos\varphi_1\, r \cdot \sin\varphi - Z_1 r \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)$;

$$\frac{dM_\varphi}{dX} = \cos\varphi;$$

rechts: von $0-\varphi_1$: $M_\varphi = -X \cdot \cos\varphi - Z_1 \cdot \cos\varphi_1\, r \cdot \sin\varphi$;

$$\frac{dM_\varphi}{dX} = -\cos\varphi;$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$: analog.

$$0 = Xr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot d\varphi + Z_1 r^2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi -$$

$$- Z_1 r^2 \cdot \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \varphi_1) \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi.$$

Nach Durchführung der Integration und Reduktion ergibt sich:

$$X = -Z_1 \cdot \frac{r}{\pi} \cdot \sin\varphi_1 (\pi - 2\varphi_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 23)$$

für $\varphi_1 = 0$; $X = 0$; für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $X = 0$.

b) Ermittlung der Verschiebungen δ_2.

Diese kann durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen geschehen.

Wird das Hauptsystem durch Aufschneiden des Ringes ($S-S$) erhalten, so ist es vorteilhaft, vier Kräfte 1 an diesem anzubringen. Man erhält dann als Arbeit der äußeren Kräfte $4 \cdot \delta_2$ wegen der im System herrschenden Symmetrie. Die Momente M_φ (vergl. Abb. 21a) ergeben sich unter Benutzung von Gleichung 23):

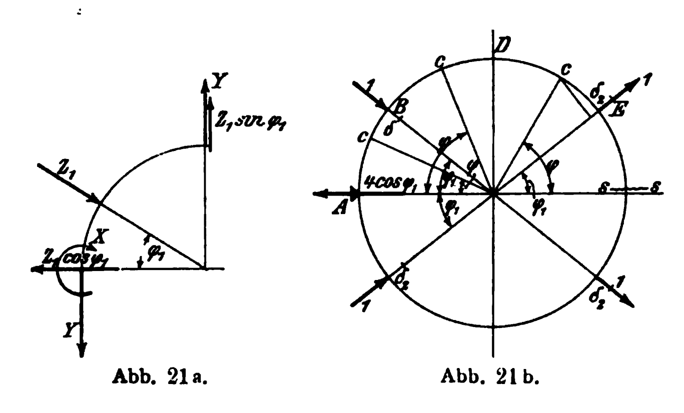


Abb. 21a. Abb. 21b.

von $0-\varphi_1$:

$$M_\varphi = -Z_1 \frac{r}{\pi} (\pi - 2\varphi_1) \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi + Z_1 \cdot \cos\varphi_1\, r \cdot \sin\varphi \underbrace{- Z_1 r \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)}_{\text{für } \varphi = \varphi_1 \text{ bis } \frac{\pi}{2}}$$

M': von $A-B$: $M' = +2\cos\varphi_1\, r\cdot\sin\varphi$
von $B-D$: $M' = +2\cos\varphi_1\, r\cdot\sin\varphi - 1\,r\cdot\sin(\varphi-\varphi_1)$
von $E-D$: $M' = +1\,r\cdot\sin(\varphi-\varphi_1)$.

Nach Aufstellung der Produkte $(M_\varphi\, M'\, d\varphi)$ und Reduktion derselben:

$$4\,EJ_r\cdot\delta_2 = 2\,Z_1\,r^3\cdot\left[\frac{4\,\varphi_1}{\pi}\cdot\sin^2\varphi_1\cdot\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot d\varphi - \frac{(\pi-2\,\varphi_1)}{\pi}\cdot\frac{\sin 2\,\varphi_1}{2}\right.$$

$$\left.\int_0^{\varphi_1}\sin 2\,\varphi\cdot d\varphi + 2\cos^2\varphi_1\cdot\int_0^{\varphi_1}\sin^2\varphi\cdot d\varphi\right]$$

Nach Auswertung der Integrale und Reduktion:

$$\delta_2 = \frac{Z_1\,r^3}{2\,EJ_r}\left[\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\left(\cos\varphi_1 + \frac{2\,\varphi_1^2}{\pi}\cdot\sin\varphi_1\right)\right] \quad . \quad . \quad 24)$$

Wegen der in jedem Quadranten gleichen Arbeitsbeiträge ist es auch statthaft, als Hauptsystem nur einen solchen Quadranten zu wählen. Wie im folgenden ausgeführt, wird die Verschiebung gleichlautend erhalten.

$$1\cdot\delta_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M_\varphi\;M_2'}{E\,J_r}\,ds.$$

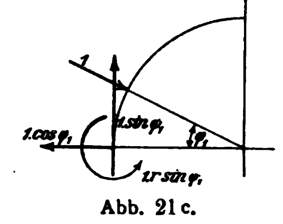


Abb. 21 c.

Für den statisch bestimmten Fall der Momente M_2' siehe Abb. 21 c.

Wie unter b) ist von $0-\varphi_1$

$$M_\varphi = -Z_1\cdot\frac{r}{\pi}\cdot(\pi-2\,\varphi_1)\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi + Z_1\cdot\cos\varphi_1\cdot r\cdot\sin\varphi$$

und von $0-\varphi_1$

$$M_2' = r\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi - r\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi$$

$$E\,J_r\cdot\delta_2 = Z_1\cdot r^3\left\{-\frac{(\pi-2\,\varphi_1)}{4\,\pi}\cdot\sin 2\,\varphi_1\cdot\int_0^{\varphi_1}\sin 2\,\varphi\cdot d\,\varphi + \cos^2\varphi_1\cdot\right.$$

$$\left.\int_0^{\varphi_1}\sin^2\varphi\cdot d\,\varphi + \frac{(\pi-2\,\varphi_1)}{\pi}\cdot\sin^2\varphi_1\cdot\int_0^{\varphi_1}\cos^2\varphi\cdot d\,\varphi - \frac{\sin 2\,\varphi_1}{4}\cdot\int_0^{\varphi_1}\sin 2\,\varphi\cdot d\,\varphi\right\}.$$

Nach Integration und Reduktion ergibt sich

$$\delta_2 = \frac{r^3\,Z_1}{2\,E\,J_r}\left[\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\left(\cos\varphi_1 + \frac{2\,\varphi_1^2}{\pi}\cdot\sin\varphi_1\right)\right] \quad . \quad . \quad 24)$$

wieder für $\varphi_1 = 0$; $\delta_2 = 0$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\delta_2 = 0$.

B. Tangentielle Kräfte und Ringformveränderungen.

a) Ermittlung der Überzähligen.

Es gelingt nachzuweisen, daß das System nicht, wie in Abb. 22 erkenntlich gemacht, dreifach, sondern nur einfach unbestimmt ist.

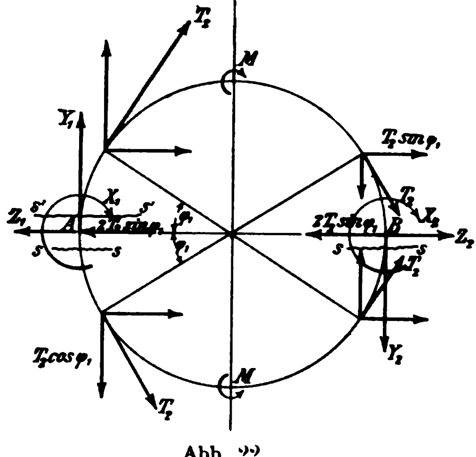


Abb. 22.

Aus dem Gleichgewicht im vertikalen Sinne folgt $Y_1 = Y_2$; im horizontalen $Z_1 = Z_2$.

Momentengleichung auf B

$$X_1 + X_2 + 2\,Y_1 \cdot r + 2\,T_2 \cdot r = 0 \quad \alpha)$$

Moment M obere Hälfte (Schnitt $s - s$)

$$M = X_1 + Y_1 \cdot r + Z_1 \cdot r + T_2 \cdot r\,(\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) \quad \beta)$$

Moment M untere Hälfte (Schnitt s'—s'; umgekehrte Schnittkräfte)

$$M = -X_1 - Y_1 \cdot r + Z_1 \cdot r - T_2 \cdot r \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \gamma)$$

Aus β) und γ)

$$0 = 2\,X_1 + 2\,Y_1 \cdot r + 2\,T_2 \cdot r \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \delta)$$

Aus α) und δ)

$$\underline{X_1 = X_2.}$$

Z_1 ergibt sich aus

$$\frac{2}{E\,J_r} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \cdot \frac{d\,M_\varphi}{d\,Z_1} \cdot ds = 0.$$

von $0 - \varphi_1$

links

$$M_\varphi = X_1 + Z_1\,r \sin\varphi + Y_1\,r\,(1 - \cos\varphi) + T_2 \sin\varphi_1\,r \sin\varphi$$

rechts

$$M_\varphi = -X_1 + Z_1\,r \sin\varphi - Y_1\,r\,(1 - \cos\varphi) - T_2 \sin\varphi_1\,r \sin\varphi$$

$$\frac{d\,M_\varphi}{d\,Z_1} = r \sin\varphi;$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$

links

$$M_\varphi = X_1 + Z_1\,r \sin\varphi + Y_1\,r\,(1 - \cos\varphi) + T_2 \sin\varphi_1\,r \sin\varphi + T_2\,r\,[1 - \cos(\varphi - \varphi_1)]$$

rechts

$$M_\varphi = -X_1 + Z_1\,r \sin\varphi - \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\frac{d\,M_\varphi}{d\,Z_1} = r \sin\varphi.$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{d M_\varphi}{d Z_1}\, ds = 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, Z_1\, r^3 \sin^2\varphi\, d\,\varphi + \overbrace{(X_1\, r^2 \sin\varphi - X_1\, r^2 \sin\varphi + \ldots)}^{0}\, d\,\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\{T_2\, r^3 [1 - \cos(\varphi - \varphi_1)] \sin\varphi - T_2\, r^3 [1 - \cos(\varphi - \varphi_1)] \sin\varphi\}}_{0}\, d\,\varphi$$

ergibt

$$\underline{Z_1 = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

Wird Gleichung γ (entsprechend dem 4. Quadranten) für ↻ = minus geschrieben

$$M = + X_1 + Y_1\, r - Z_1\, r + T_2\, r \quad \ldots\ldots \quad \gamma')$$

Aus β) und γ')

$$\underline{Z_1 = 0.}$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{d M_\varphi}{d X_1}\, ds = 0.$$

Nach Aufstellung von M_φ unter Berücksichtigung von $Z_1 = 0$ und Gleichung α) und $\frac{d M_\varphi}{d X_1}$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X_1\, \frac{1}{2}\, r\, d\varphi - X_2\, \frac{1}{2}\, r\, d\,\varphi\right)$$

$$\underbrace{- \frac{(X_1 + X_2)}{4} (1 - \cos\varphi)\, r\, d\,\varphi + \frac{(X_1 + X_2)}{4} (1 - \cos\varphi)\, r\, d\,\varphi + \ldots}_{0} = 0$$

$$\underline{X_1 = X_2.}$$

Somit ist das System auch nur einfach unbestimmt.

Aus α)

$$Y_1\, r = -(X_1 + T_2\, r)$$

von $(0-\varphi_1)$:

links

$$M_\varphi = X_1 \cos\varphi - T_2\, r + T_2\, r \cos\varphi + T_2\, r \sin\varphi_1 \sin\varphi; \qquad \frac{d M_\varphi}{\partial X_1} = \cos\varphi$$

rechts

$M_\varphi = - X_1 \cos\varphi + T_2 r - T_2 r \cos\varphi - T_2 r \sin\varphi_1 \sin\varphi$; $\quad \frac{\partial M_\varphi}{d X_1} = - \cos\varphi$

von $\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)$

links

$M_\varphi = X_1 \cos\varphi - T_2 r + T_2 r \cos\varphi + T_2 r - T_2 r \cos\varphi \cos\varphi_1$; ebenso rechts mit umgekehrten Vorzeichen.

$$0 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (X_1 \cos\varphi + T_2 r \cos\varphi) r \cos\varphi \, d\varphi - 2\int_0^{\varphi_1} T_2 r^2 \cos\varphi \, d\varphi +$$

$$+ 2\int_0^{\varphi_1} T_2 r^2 \sin\varphi_1 \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi - 2\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} T_2 r^2 \cos\varphi_1 \cos^2\varphi \, d\varphi.$$

Nach Integration und Reduktion ergibt sich

$$X_1 = X_2 = \frac{4 T_2 r}{\pi} \cdot \left[- \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\varphi_1}{2} + \cos\varphi_1 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \quad 26)$$

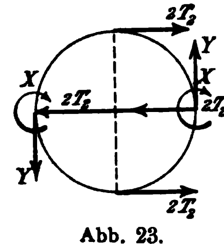


Abb. 23.

für $\varphi_1 = 0$, $X_1 = 0$;

für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $X_1 = - T_2 r \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$

(vergl. hierzu den Wert M_B der radialen Angriffe, Abschnitt 1).

b) Die Verschiebung δ_2 (an einer Nebenrippe.

$$1 \cdot \delta_2 = \frac{1}{E J_r} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi M_2' \, ds$$

M_φ siehe oben

von $0-\varphi_1$:

$$M_2' = - r + r \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi,$$

von $0-\varphi_1$:

$$M_\varphi = X_1 \cdot \cos\varphi - T_2 r + T_2 r \cdot \cos\varphi + T_2 r \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi.$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$: $M_2' = 0$.

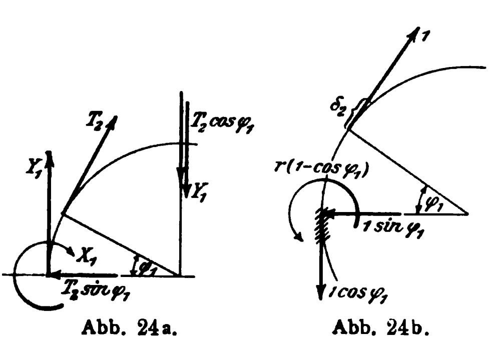


Abb. 24a. Abb. 24b.

Nach Bildung der Produkte $M_\varphi M_2' ds$ und Integration sowie Einführung von X_1 nach 26) ergibt sich

$$\delta_2 = \frac{T_2 r^3}{E J_r} \cdot \left[\sin^2 \varphi_1 \cdot \left(\frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{\sin 2\varphi_1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2\varphi_1}{\pi} \right) + \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_1}{\pi} \right) + \varphi_1 - 2 \sin \varphi_1 \right] 2$$

Durch die Beziehungen 23), 24), 26) und 27) sind die Ringformveränderungen durch Gruppen halbsymmetrischer Schübe und Querbiegungskräfte der Rippen bekannt.

10. Ermittlung der halbsymmetrischen Kräfte bei elastischen Ringen.

Die in Gleichung 7) errechnete Verschiebung des starren Kopfringes des Hauptsystems ist direkt proportional der Bogenkraft. Da die halbsymmetrischen Kräfte der Nebenrippen von dieser Verschiebung Δ_r abhängen, so ergibt sich nach Gleichung 10) bezw. den Gleichungen 14) und 15) direkte Proportionalität zwischen den halbsymmetrischen Kräften (Bogen- und Tangentialkräfte der Nebenrippen) mit der Bogenkraft X des Hauptsystems mit starren Ringen. Für mehrere starre Ringe bestehen die analogen Beziehungen der Gleichungen 22).

Sind die Ringe elastisch, so tritt durch zwei Umstände eine Veränderung der halbsymmetrischen Kräfte ein:

1. Tritt an die Stelle der Bogenkraft X des Hauptsystems mit starrem Ringe (bezw. an Stelle der Ringkräfte X_1, X_2 . . . bei mehreren Ringen) die Bogenkraft (bezw. die Ringkräfte), welche unter Berücksichtigung der vollsymmetrischen Ringformveränderung unter Mitwirkung aller Rippen nach den Gleichungen 8) bezw. den Gleichungen 18) errechnet wird (Schübe H_0 bezw. $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ . . .).

2. Wird ein Teil der halbsymmetrischen Kräfte oder, besser ausgedrückt, der Reaktionen der Nebenrippen (im achsialen und tangentiellen Sinne) zur Formänderung der Ringe aufgewendet und wird diese Reaktion nur teilweise als stabilisierende Kraft durch den Ring dem Hauptsystem übertragen.

Zur Berechnung der halbsymmetrischen Kräfte bei elastisch veränderlichen Ringen soll die Wirkung dieser zwei Ursachen getrennt, nacheinander erfolgend, gedacht werden.

Im folgenden sei

1. Querbiegung der Rippen vorläufig ausgeschaltet;
2. zunächst nur ein Kopfring und die Nebenrippen m nebst dem Hauptsystem vorhanden.

Es bezeichne entsprechend Abschnitt 5 ... $H_{m,e}$ die halbsymmetrische Bogenkraft der Rippe m bei elastischem Ring (die weiter unten behandelten mehreren Nebenrippen entsprechend ... $H_{2,e}$, $H_{3,e}$ ...).

Die Ringformänderung an der Anschlußstelle der Rippe m ist entsprechend Gleichung 25)

$$\delta_m = \frac{r^3 H_{m,e}}{2\,E J_r} \cdot \underbrace{\left[\varphi_m - \sin\varphi_m \cdot \left(\cos\varphi_m + \frac{2\,\varphi_m^2}{\pi} \cdot \sin\varphi_m\right)\right]}_{e_{m,m}} \quad . \quad 28)$$

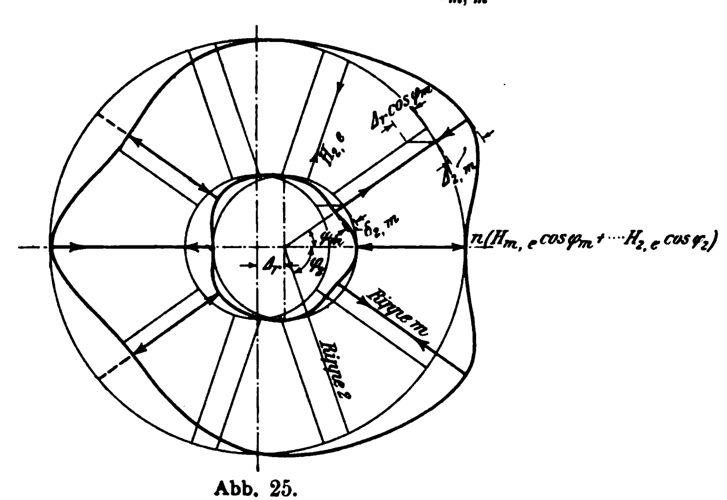


Abb. 25.

Der von φ_m abhängige Biegungseinflußwert sei mit $e_{m,m}$ bezeichnet. (Für mehrere Nebenrippen sei beispielsweise der Biegungseinflußwert der Nebenrippe 2 auf den Anschlußpunkt der Rippe m mit $e_{2,m}$ bezeichnet. Dieser allgemeine Einflußwert wird unten berechnet werden.)

Zur Berechnung von $H_{m,e}$ denke man sich zunächst ein Hauptsystem, dessen Schub der aus allen vollsymmetrischen Ringformänderungen aus der Gleichungsgruppe 8 errechnete Wert H_0 ist. Die Verschiebung dieses (gedachten) Hauptsystems nach der unbelasteten Seite zu wäre nach Gleichung 7)

$$\Delta_0 = H_0 \cdot \int_0^b \frac{y^2\,ds}{E J_b}$$

und die resultierende Verschiebung der Hauptsystemrippe unter Mitwirkung der Nebenrippen

$$\Delta_{r,0} = (H_0 - n \cdot H_{m,e} \cdot \cos\varphi_m) \cdot \frac{\int_0^b y^2\,ds}{E J_b} \,.$$

Die Verkürzung bezw. Verlängerung einer Rippe m setzt sich zusammen (vergl. Abb. 24) aus $\Delta_{r,0} \cdot \cos\varphi_m$ und der Ringformänderung $\delta_{m,2}$.

Somit ist die Längenänderung der Nebenrippe m

$$\Delta_{r,m} = \Delta_{r,0} \cdot \cos \varphi_m - \delta_{m.2} = \frac{\int\limits_0^b y^2 ds}{E J_b} \cdot (H_0 \cdot \cos \varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \cos^2 \varphi_m) -$$

$$- \frac{r^3 \cdot H_{m.e}}{2 E J_r} \cdot e_{m,m} = \frac{H_{m,e} \cdot \int\limits_0^b y^2 ds}{E J_b}.$$

Hieraus wird gefunden

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{r^3}{2} \cdot \left(\frac{J_b}{J_r}\right) \cdot \frac{e_{m,m}}{\int\limits_0^b y^2 ds}}$$

und bei vorhandenem elastischen Fußring (siehe Abb. 24)

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{J_b}{J_R}\right) R^3 + \left(\frac{J_b}{J_r}\right) \cdot r^3\right] \cdot \frac{e_{m,m}}{\int\limits_0^b y^2 ds}} \qquad 30)$$

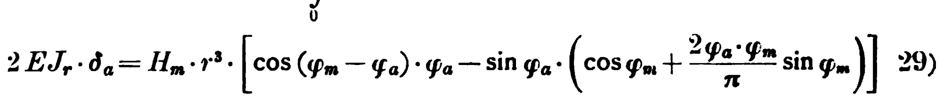
Für starre Ringe ($J_r = J_R = \infty$) gehen, da auch $H_0 = X$ wird, die Gleichungen in die Gleichungen 10) über. Für sehr schwache Ringe ($\lim J_r = J_R = 0$) nähert sich $H_{m,e}$ dem Werte 0.

Sind mehrere Nebenrippen vorhanden, so sind zunächst die oben erwähnten Einflußwerte der Ringbiegung $e_{m,a}$ zu finden.

Unter der Voraussetzung $\varphi_a < \varphi_m$ folgt aus (Abb. 26)

Abb. 26.

$$E J_r \cdot \delta_a = \int\limits_0^{\varphi_a} M_\varphi \, M' \, ds$$



$$2 E J_r \cdot \delta_a = H_m \cdot r^3 \cdot \left[\cos(\varphi_m - \varphi_a) \cdot \varphi_a - \sin \varphi_a \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_a \cdot \varphi_m}{\pi} \sin \varphi_m\right)\right] \qquad 29)$$

welche für $\varphi_a = \varphi_m$ in die Gleichung 24) übergeht.

Für $\varphi_a = 0$ (Auflager) $\delta_a = 0$.

Der Ringbiegungseinflußwert $e_{m,a}$ ist somit

$$e_{m,a} = \left[\cos(\varphi_m - \varphi_a) \cdot \varphi_a - \sin \varphi_a \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_a \cdot \varphi_m}{\pi} \sin \varphi_m\right)\right] \qquad 29)$$

Nach dem Maxwellschen Satze ist $e_{m,a} = e_{a,m}$.*)

*) Siehe Tabelle der Ringbiegungseinflußwerte und Darstellung der Ringformänderung am Schlusse.

Somit ergibt sich für den halbsymmetrischen Schub $H_{m,e}$ bei Vorhandensein mehrerer Nebenrippen:

$$\Delta_{r,m} = \Delta_{r,0} \cdot \cos\varphi_m - \Sigma\delta_{m,2} = \frac{\int\limits_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot$$

$$\cdot [H_0 \cdot \cos\varphi_m - n \cdot \cos\varphi_m \cdot (H_{2,e} \cdot \cos\varphi_2 + H_{3,e} \cdot \cos\varphi_3 + \ldots H_{m,e} \cdot \cos\varphi_m)] -$$

$$- \frac{r^3}{2\,EJ_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,m} + H_{3,e} \cdot e_{3,m} + \ldots H_{m,e} \cdot e_{m,m}) = \frac{H_{m,e} \cdot \int\limits_0^b y^2\,ds}{EJ_b};$$

ebenso: z. B. für Rippe 3

$$\Delta_{r,3} = \frac{\int\limits_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot [H_0 \cdot \cos\varphi_3 - n \cdot \cos\varphi_3 \cdot (H_{2,e} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_{m,e} \cdot \cos\varphi_m)] -$$

$$- \frac{r^3{}^{*)}}{2\,EJ_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,3} + H_{3,e} \cdot e_{3,3} + \ldots H_{m,e} \cdot e_{m,3}) = H_{3,e} \cdot \frac{\int\limits_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \qquad 31)$$

Hieraus alle Unbekannten $H_{2,e}$, $H_{3,e} \ldots H_{m,e}$ bestimmbar.

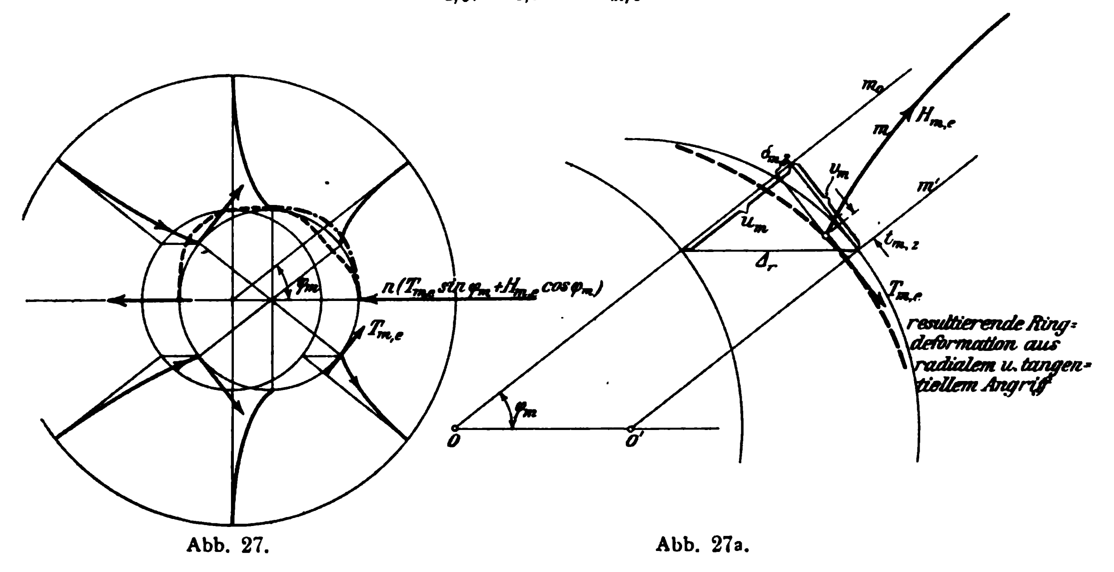


Abb. 27. Abb. 27a.

Nunmehr sollen auch die halbsymmetrischen Kräfte unter Berücksichtigung der Querbiegung der Rippen bei elastischen, also jetzt auch tangentiell beanspruchten Ringen berechnet werden.

*) Bei elastischem Fußring tritt an Stelle von

$$\frac{r^3}{J_r} \cdots \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r^3}{J_r}\right).$$

Es bezeichne analog oben gewählter Bezeichnung:

$H_{m,e}$, $T_{m,e}$ die beiden halbsymmetrischen Kräfte der Rippe m.

H_e den aus der Gruppe 8) errechneten Schub der Hauptrippe, unter Berucksichtigung aller vollsymmetrischen Ringformänderungen.

Ferner: $\tau_{m,m}$ den Ringformveränderungseinflußwert der Kraft T_m auf den Anschlußpunkt der Rippe m selbst,

ebenso $\tau_{a,m}$ den Einflußwert der Kraft T_a auf die tangentielle Verschiebung des Anschlußpunktes der Rippe m am Ring.

Wie oben ist $\tau_{a,m} = \tau_{m,a}$.

Der Einflußwert $\tau_{m,m}$ ist nach Gleichung 27)

$$\tau_{m,m} = 2\left\{\sin^2\varphi_m\cdot\left(\frac{\varphi_m}{2}-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{\sin 2\varphi_m}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2\varphi_m}{\pi}\right)+\right.$$
$$\left.+\varphi_m\cdot\cos^2\varphi_m\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\varphi_m}{\pi}\right)+\varphi_m-2\sin\varphi_m\right\}.$$

Der Einflußwert $\tau_{m,a}$ ergibt sich aus

$$EJ_r\cdot\tau_{m,a} = \int_0^\pi M_c\, M'\, ds$$

unter der (wegen obengenannter Anwendbarkeit des Maxwellschen Satzes) zulässigen Voraussetzung $\varphi_a < \varphi_m$ durch folgende, allerdings umständliche Beziehung:

$$\tau_{m,a} = 2\left\{\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin\varphi_m}{2}+\cos\varphi_m\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_m}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\cdot\right.$$
$$\cdot\left[-\sin\varphi_a+\frac{1}{4}\cdot\sin(2\varphi_a-\varphi_m)+\frac{\varphi_a}{2}\cdot\cos\varphi_m+\frac{\sin\varphi_m}{4}\right]$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\sin(2\varphi_a-\varphi_m)+\varphi_a-\sin\varphi_a+2\sin\varphi_m\cdot(\cos\varphi_a-1)$$
$$-\cos\varphi_m\cdot\sin\varphi_a+\frac{\varphi_a}{2}\cdot\cos\varphi_m+\frac{\sin 2\varphi_m}{8}\cdot(1-\cos 2\varphi_a)$$
$$\left.+\frac{\sin\varphi_m}{4}+\sin^2\varphi_m\cdot\left(\frac{\varphi_a}{2}-\frac{\sin 2\varphi_a}{4}\right)\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad 32)$$

Es sei zunächst wieder nur eine Rippe in jedem Quadranten außer dem Hauptsystem angenommen (φ_m, $H_{m,e}$ und $T_{m,e}$).

In Abb. 27a sind die Formänderungen, bezogen auf die ursprüngliche Rippenlage und deren Normale, kenntlich gemacht.

m_0 = ursprüngliche Rippenlage, m' = Rippenlage bei nicht querbiegungsfähigen (dementsprechend gelagerten) Rippen, m = tatsächliche Rippenlage nach radialer und tangentieller Ringformänderung.

Nach Gleichungen 11) und 12)

$$u_m = \Delta_r\cdot\cos\varphi_m;\qquad v_m = \Delta_r\cdot\sin\varphi_m.$$

Die resultierende radiale Verschiebung $u_{r,m} = \Delta_r\cdot\cos\varphi_m - \delta_m$;
die resultierende tangentielle Verschiebung $v_{r,m} = \Delta_r\cdot\sin\varphi_m - t_m$.

Wie oben ist

$$\delta_m = \frac{r^3 \cdot H_{m,e}}{2\,EJ_r} \cdot e_{m,m}; \qquad t_m = \frac{r^3 \cdot T_{m,e}}{2\,EJ_r} \cdot \tau_{m,m}.$$

$$\left.\begin{aligned}
u_{r,m} &= \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot (H_0 \cdot \cos\varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \cos^2\varphi_m - n \cdot T_{m,e} \cdot \sin\varphi_m \cdot \cos\varphi_m) - \\
&\quad - \frac{r^3 H_{m,e}}{2\,EJ_r} \cdot e_{m,m} = H_{m,e} \cdot \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \\
v_{r,m} &= \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot (H_0 \cdot \sin\varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \sin\varphi_m \cdot \cos\varphi_m - n \cdot T_{m,e} \cdot \sin^2\varphi_m) - \\
&\quad - \frac{r^3 T_{m,e}}{2\,EJ_r} \cdot \tau_{m,m} = T_{m,e} \cdot \frac{b^3}{3\,EJ_S}
\end{aligned}\right\} \quad 33)$$

Aus Gleichung 32) ist nach vorher aus Gleichung 8) errechneten H_0 $H_{m,e}$ und $T_{m,e}$ zu bestimmen.

Ist auch ein elastischer Fußring vorhanden, so ist

a) H_0 aus der Gleichungsgruppe 8') vorzubestimmen,

b) in Gleichung 33) einzuführen:

$$\delta_m = \frac{H_{m,e} \cdot e_{m,m}}{2\,E} \cdot \left(\frac{r^3}{J_r} + \frac{R^3}{J_R}\right); \qquad t_m = \frac{T_{m,e} \cdot \tau_{m,m}}{2\,E} \cdot \left(\frac{r^3}{J_r} + \frac{R^3}{J_R}\right).$$

Sind mehrere Nebenrippenpaare 2, 3, 4 ... m ($\varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_m$) vorhanden mit entsprechenden $H_{2,e}$, $T_{2,e}$; $H_{3,e}$, $T_{3,e} \ldots H_{m,e}$, $T_{m,e}$, so existiert für jede Rippe m ein Gleichungspaar $u_{r,m}$, $v_{r,m}$, z. B. für Rippe 2:

$$\left.\begin{aligned}
u_{r,2} &= \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \\
&\quad \cdot [H_0 - n \cdot (H_{2,e} \cdot \cos\varphi_2 + H_{3,e} \cdot \cos\varphi_3 + \ldots H_{m,e} \cdot \cos\varphi_m + \\
&\quad + T_{2,e} \cdot \sin\varphi_2 + T_{3,e} \cdot \sin\varphi_3 + \ldots T_{m,e} \cdot \sin\varphi_m)] - \\
&\quad - \frac{r^3}{2\,EJ_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,2} + H_{3,e} \cdot e_{3,2} + \ldots H_{m,e} \cdot e_{m,2}) = H_{2,e} \cdot \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \\
v_{r,2} &= \frac{\int_0^b y^2\,ds}{EJ_b} \cdot \sin\varphi_2 \cdot \\
&\quad \cdot [H_0 - n \cdot (H_{2,e} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_{m,e} \cdot \cos\varphi_m + T_{2,e} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_{m,e} \cdot \sin\varphi_m)] \\
&\quad - \frac{r^3}{2\,EJ_r} \cdot (T_{2,e} \cdot \tau_{2,2} + T_{3,e} \cdot \tau_{3,2} + \ldots T_{m,e} \cdot \tau_{m,2}) = T_{2,e} \cdot \frac{b^3}{3\,EJ_S}
\end{aligned}\right\} \quad 33')$$

Anmerkung: In den Gleichungen 33) und 33′) ist eine Vernachlässigung des Einflusses der Tangentialkräfte auf die radialen Verschiebungen und umgekehrt der Schübe auf die tangentiellen Verschiebungen erfolgt, da diese sekundären Verschiebungen sehr klein sind.

Die Biegungseinflußwerte $\delta = f(T_e)$ und $\tau = f_1 (H_e)$ sind daher auch nicht ermittelt worden. Der Weg zur Berücksichtigung dieser Einflüsse ist nach dem oben Dargelegten einfach zu finden, doch gestaltet sich die Ermittlung dieser Biegungseinflußwerte recht umständlich.

Es erübrigt nun noch, die halbsymmetrischen Kräfte bei mehreren elastischen Ringen und Rippen aufzusuchen.

Es bezeichne wieder im folgenden:

H_2^0, H_1^0 die Schübe des Hauptsystems am Ring 2 bezw. 1, errechnet unter Berücksichtigung der vollsymmetrischen Formänderungen nach Gleichungen 18). (In den Gleichungen 18) entspricht der Bezeichnung H_2^0 der Wert $X_2^{(1)}$, dem Werte $X_1^{(1)}$ die Bezeichnung H_1^0.)

Die halbsymmetrischen Schübe und Tangentialkräfte der einzelnen Rippen sind bezeichnet

$$\text{am Ring 2} \begin{cases} H_2^{(2,e)},\ H_2^{(3,e)} \ldots H_2^{(m,e)} \\ T_2^{(2,e)},\ T_2^{(3,e)} \ldots T_2^{(m,e)} \end{cases}$$

$$\text{am Ring 1} \begin{cases} H_1^{(2,e)},\ H_1^{(3,e)} \ldots H_1^{(m,e)} \\ T_1^{(2,e)},\ T_1^{(3,e)} \ldots T_1^{(m,e)} \end{cases}$$

am Fußring ist sodann

$$H_f^{(2,e)} = H_2^{(2,e)} + H_1^{(2,e)}$$
$$T_f^{(2,e)} = T_2^{(2,e)} + T_1^{(2,e)}$$

Es bezeichne weiter:

$u_{r,2}^{(2)}, u_{r,2}^{(3)} \ldots u_{r,2}^{(m)}$ die radialen resultierenden Verschiebungen am Ring 2,
$u_{r,1}^{(2)}, u_{r,1}^{(3)} \ldots u_{r,1}^{(m)}$ „ „ „ „ „ „ 1,
$v_{r,2}^{(2)}, v_{r,2}^{(3)} \ldots v_{r,2}^{(m)}$ „ tangentiellen „ „ „ „ 2,
$v_{r,1}^{(2)}, v_{r,1}^{(3)} \ldots v_{r,1}^{(m)}$ „ „ „ „ „ „ 1.

Für jede beliebige Rippe m ergeben sich bei den (außer dem eventuellen Fußring) angenommenen zwei Ringen 2×2 Verschiebungsgleichungen für die vier Unbekannten $H_2^{(m,e)}$, $H_1^{(m,e)}$, $T_2^{(m,e)}$, $T_1^{(m,e)}$:

$$\left.\begin{aligned} u_{r,2}^{(m)} &= \Delta_{r,2} \cdot \cos \varphi_m - \Sigma H^{(\cdot e)} \cdot e_{(\cdot m)} \\ v_{r,2}^{(m)} &= \Delta_{r,2} \cdot \sin \varphi_m - \Sigma T^{(\cdot e)} \cdot \tau_{(\cdot m)} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} u_{r,1}^{(m)} &= \Delta_{r,1} \cdot \cos \varphi_m - \Sigma H^{(\cdot e)} \cdot e_{(\cdot m)} \\ v_{r,1}^{(m)} &= \Delta_{r,1} \cdot \sin \varphi_m - \Sigma T^{(\cdot e)} \cdot \tau_{(\cdot m)} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 19′) ergibt sich:

$$\begin{aligned} EJ_b \cdot \Delta_{r,2} = {} & \left[H_2^0 - n \cdot \left(H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \ldots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \ldots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m\right)\right] \cdot \Gamma_2 \\ & + \left[H_1^0 - n \cdot \left(H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \ldots H_1^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_1^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \ldots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m\right)\right] \cdot \Gamma_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} EJ_b \cdot \Delta_{r,1} = {} & \left[H_2^0 - n \cdot \left(H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \ldots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \ldots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m\right)\right] \cdot \Gamma_2 \\ & + \left[H_1^0 - n \cdot \left(H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m\right)\right] \cdot \Gamma \end{aligned}$$

Dann ergeben sich die Verschiebungsgleichungen z. B. für Rippe m:

$$\left.\begin{aligned} u_{r,2}^{(m)} \cdot E J_b = Y_{2,2} \cdot \cos\varphi_m \cdot \left[H_2^0 - n \cdot \left(H_2^{(2,e)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_2^{(m,e)} \cdot \cos\varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_2^{(m,e)} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] \\ - \left(\frac{J_b}{2}\right) \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_2^3}{J_{r,2}}\right) \cdot \left[H_2^{(2,e)} \cdot e_{2,m} + \ldots H_2^{(m,e)} \cdot e_{m,m}\right] \\ + Y_{1,2} \cdot \cos\varphi_m \cdot \left[H_1^0 - n \cdot \left(H_1^{(2,e)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_1^{(m,e)} \cdot \cos\varphi_m + T_1^{(2,e)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_1^{(m,e)} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] \\ = H_2^{(m,e)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m,e)} \cdot Y_{1,2} \end{aligned}\right\} \quad 34a)$$

analog die übrigen drei Verschiebungen: $u_{r,1}^{(m)}$, $v_{r,2}^{(m)}$, $v_{r,1}^{(m)}$ . . . . . 34b, c, d)

Die Verschiebungsgleichung für $v_{r,2}^{(m)}$ stellt sich unter Benutzung der Beziehungen 21a) und 21b) wie folgt dar:

$$\left.\begin{aligned} J_b \cdot E \cdot v_{2,r}^{(m)} = \sin\varphi_m \cdot \Big\{\left[H_2^0 - n\left(H_2^{(2,e)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots H_2^{(m,e)} \cdot \cos\varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_2^{(m,e)} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] \\ \cdot Y_{2,2} + \left[H_1^0 - n\left(H_1^{(2,e)} \cdot \cos\varphi_2 + \ldots + T_1^{(2,e)} \cdot \sin\varphi_2 + \ldots T_1^{(m,e)} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] \cdot Y_{1,2}\Big\} \\ - \left(\frac{J_b}{2}\right) \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R}\right) \cdot \left[T_2^{(2,e)} \cdot \tau_{2,m} + T_2^{(3,e)} \cdot \tau_{3,m} + \ldots T_2^{(m,e)} \cdot \tau_{m,m}\right] \\ = \left(\frac{J_b}{J_S}\right) \cdot \left(\psi \cdot T_2^{m,e} + \chi \cdot T_1^{m,e}\right) \end{aligned}\right\} \quad 34c)$$

[Für die Aufstellung der Verschiebungsgleichung $v_{1,r}^{(m)}$ sind sinngemäß die Einflußwerte σ und τ (letzteres nicht mit dem Ringbiegungseinflußwert τ zu verwechseln) der Beziehung 21b) an Stelle von ψ und χ anzuwenden.]

11. Anwendung des Verfahrens auf die Winddruckberechnung von Rippenkuppeln.

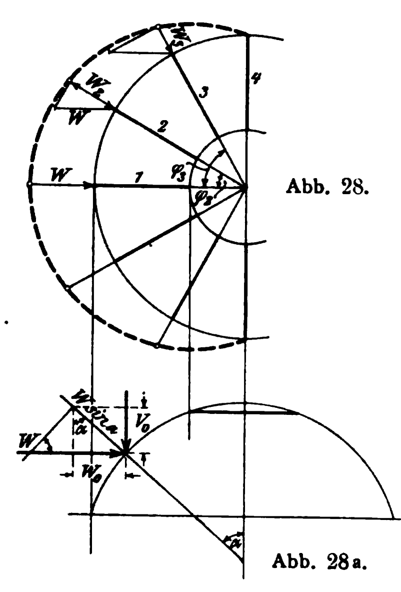


Abb. 28.

Abb. 28a.

Der Winddruck W kann zweckmäßig mit seiner Richtung in eine Rippenebene fallend angenommen werden (Rippe 1). Die auf die Rippen 2, 3, 4 . . . im Grundrisse entfallenden Winddrücke sind dann:

$$W_2 = W \cdot \cos\varphi_2;$$
$$W_3 = W \cdot \cos\varphi_3 \ldots \text{usw.}$$

Im Aufrisse ist in den anzunehmenden Bogenteilpunkten eine Zerlegung in

$$W_0 = W \cdot \sin^2\alpha$$

und

$$V_0 = \frac{W}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

vorzunehmen. Die entsprechenden Seitenkräfte der Nachbarrippen werden erhalten:

$$W_0^{(2)} = W \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi_2 \ldots\ldots W_0^{(m)} = W \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\varphi_m$$

$$V_0^{(2)} = \frac{W}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\varphi_2 \ldots V_0^{(m)} = \frac{W}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\varphi_m.$$

Es empfiehlt sich nun, die Ermittlung der Windseitenkräfte für die Mittelpunkte der Bogenelemente vorzunehmen, welche sich durch Teilung nach „konstanter Bogengröße" ergeben (siehe Abschnitt 2).

Es braucht nicht erst erwähnt zu werden, daß sämtliche Entwicklungen der vorigen Abschnitte auch für horizontale Kraftangriffe gelten, da die von der Belastung abhängigen Integralwerte μ (Abschnitt 6, Gleichung 16) ein Konsolenmoment M_0 des statisch bestimmten Falles des Hauptsystems enthalten, das ebensowohl durch horizontalen Angriff entstanden sein kann.

Da die Berechnung stets ein belastetes Hauptsystem und unbelastete Nebenrippen voraussetzt, muß die Berechnung so durchgeführt werden, daß die unbekannten Schübe und Tangentialkräfte hintereinander für folgende Fälle ermittelt und dann algebraisch zusammengelegt werden:

1. Rippe 1 mit den auf sie entfallenden Belastungen $W_0^{(1)}$, $V_0^{(1)}$ als Hauptsystem, alle anderen Rippen unbelastet als Nebenrippen;
2. Rippe 2 mit den auf sie entfallenden Belastungen $W_0^{(2)}$, $V_0^{(2)}$ als Hauptsystem, alle anderen als unbelastete Nebenrippen usw.

Natürlich braucht die Ermittlung der Unbekannten nur für den ersten Fall durchgeführt zu werden, da für die weiteren Fälle dieselben aus den zuerst ermittelten durch Multiplizieren mit $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ usw. erhalten werden.

Der Berechnungsgang selbst wird sich bei strenger Anwendung des ganzen Verfahrens (man beachte die vorgenommene Vernachlässigung zu Gleichungen 32) und 33) wie folgt gestalten.

Nach analytischer oder graphischer Ermittlung der Werte $\mu_{1,1}$, $\mu_{2,2}$ (bei mehr als 3 Ringen der entsprechend übrigen) und ebenso der Integralwerte $Y_{1,1}$, $Y_{1,2}$, $Y_{2,2}$ (entsprechend eventuell der übrigen) entsprechend Abschnitt 6a und den ähnlichen Einflußwerten der Querbiegung der Rippen σ, τ, ψ, χ der Gleichungen 21a) und 21b) sind die Einflußwerte der vollsymmetrischen Ringformänderung K_0, K_φ, $K_{2\varphi}$ usw. nach Abschnitt 4 zu ermitteln. Hierauf erfolgt die Bestimmung der vollsymmetrischen Kräfte nach Gleichungsgruppe 18) (ohne Zwischenringe nach Gleichungsgruppe 8).

Für die sodann folgende Ermittlung der halbsymmetrischen Kraftgruppen ist (für elastische Ringe wie oben) zunächst die Berechnung der Ringbiegungseinflußwerte e und τ nach Gleichungen 29) und 32) vorzunehmen. (Besondere Ausdrücke für $e_{2,2}$, $e_{3,3}$ usw. siehe Abschnitt 10.)

Hierauf sind die halbsymmetrischen Kräfte aus je einer Gruppe von Verschiebungsgleichungen für jede Rippe aus den Gleichungsgruppen 34) zu ermitteln.

Dies geschehen, sind die erhaltenen voll- und halbsymmetrischen Kräfte mit richtigem Vorzeichen zu addieren, und zwar getrennt für jeden der oben beschriebenen Winddruckbelastungsfälle.

Hierauf sind die für die verschiedenen Belastungsfälle erhaltenen Gesamtschübe und -Tangentialkräfte algebraisch für jeden der Angriffspunkte zusammenzuzählen.

Damit sind alle äußeren Kräfte ermittelt. Die Ringmomente sind dann durch Superposition je zweier vollsymmetrischer Kräfte und je eines Paares halbsymmetrischer Kräfte mit Hilfe der Beziehungen 1), 23) und 26) für die statisch unbestimmten Ringgrößen zu ermitteln.

Die genaue Anwendung des Verfahrens ist insbesondere wegen der langwierigen Ermittlung der Ringbiegungseinflußwerte*) und der großen Zahl von Gleichungen bei mehreren Rippen und Ringen sehr zeitraubend.

Es ist daher von Wichtigkeit, sich darüber klar zu werden, ob in den etwa bei der Berechnung vorzunehmenden Vernachlässigungen größere oder unbedeutendere Fehler als in den Annahmen des Verfahrens von vornherein liegen.

a) Der erste und wichtigste Annahmefehler des Systems liegt für Fälle der Praxis in der Nichteinbeziehung der zwischen Rippen und Ringe gespannten Decken (zumeist gleichfalls Eisenbetondecken), deren unzweifelhaft stark versteifende Wirkung nicht in der Rechnung erscheint. Die Berücksichtigung dieser Wirkung setzte die Lösung des Problems der glatten, einseitig belasteten, biegungssteifen Kuppel voraus, welche noch nicht existiert.

b) Die in der Einleitung bereits erwähnten Annahmefehler der gewählten Lagerung, welche von der Übertragung der Querkräfte absieht und die vertikalen Ringbiegungen sowie Torsionen ausschaltet.

c) Für den im Verfahren eventuell angenommenen Fußring herrscht der Widerspruch, daß er absolut verdrehungsfest, aber im radialen Sinne elastisch angenommen ist.

Der versteifenden Wirkung der Kuppeldecken kann zweckmäßig durch Einbeziehung eines bestimmten Teiles derselben für die Ermittlung der Ringträgheitsmomente J_R, $J_{r,1}$, $J_{r,2}$ usw. annähernd Rechnung getragen werden.

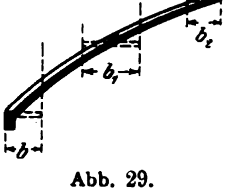


Abb. 29.

Durch die Entwicklungen der vorhergehenden Abschnitte wird konstatiert werden können, welche Fehler bei folgenden beabsichtigten Vernachlässigungen zu erwarten sind.

1. Vernachlässigung der Rippenquerbiegung.

Angenommene Rippenform: flache Parabel.

Kopfring $r = 2$ m; Fußring $R = 12$ m; $b = 10$ m; Pfeil $f = 4$ m

$$\frac{J_b}{J_S} = 1. \qquad \int_0^b y^2\, ds = \frac{f^2 \cdot b}{5} = \frac{16 \cdot 10}{5} = 32.$$

*) Für die häufig vorkommenden Winkelwerte ist eine Tabelle der Ringbiegungseinflußwerte am Schluß gegeben.

a) $\varphi_m = \frac{\pi}{4}$.

Nach Gleichung 14) $$H_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 32}{(10)^3}} = 0{,}338\, X.$$

Nach Gleichung 15) $$T_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{(10)^3}{3 \cdot 32} \cdot 1 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{2}{4}\right) + 2 \cdot \frac{2}{4}} = 0{,}0323\, X$$

Der Fehler der Vernachlässigung durch T_m beträgt somit etwa 9,5 vH.

b) $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$. max $T_m = \frac{X \cdot 1}{\frac{(10)^3}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + 2 \cdot 1} = 0{,}08\, X.$

Der Wert von H_m in a) käme bei Vernachlässigung von T_m auf

$$H_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{4}} = X \cdot 0{,}353.$$

Die auf das Hauptsystem übertragene Kraft wäre bei Vernachlässigung von T_m:

$$n \cdot H_m \cdot \cos\varphi_m = X \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}353 = 0{,}499\, X,$$

mit Berücksichtigung von T_m

$$n\,(H_m \cdot \cos\varphi_m + T_m \cdot \sin\varphi_m) = \left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}338 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}0323\right] \cdot X = 0{,}524\, X.$$

Die stabilisierende Kraft am Hauptsystem fällt somit bei Vernachlässigung der Querbiegung um etwa 5 vH. geringer aus, während die radiale Nebenrippenbeanspruchung um 5 vH. größer ausfällt. Die Vernachlässigung ist also nicht bedeutend und erhöht die Sicherheit selbst bei Annahme einer so großen Seitensteifigkeit der Rippen wie $\left(\frac{J_b}{J_S}\right) = 1$, die gewöhnlich nicht vorkommt.

2. Vernachlässigung der Ringformveränderlichkeit für die halbsymmetrischen Kräfte.

Zur Untersuchung des Einflusses der Vernachlässigung der Ringelastizität für die Ermittlung der halbsymmetrischen Kräfte ist nur die Veränderung der halbsymmetrischen Schübe zu untersuchen, da die Tangentialkräfte zufolge 1. beim Näherungsverfahren ausscheiden.

Der Einfluß ist erkennbar aus 30):

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{J_b}{J_R}\right) \cdot R^3 + \left(\frac{J_b}{J_r}\right) \cdot r^3\right] \cdot \frac{c_{m,m}}{\int_0^b y^2 ds}}$$

$$\text{für } \varphi_m = \frac{\pi}{4}; \quad \left(\frac{J_b}{J_R}\right) = \frac{1}{3}; \quad \left(\frac{J_b}{J_r}\right) = 1; \quad R = 12; \quad r = 2 \text{ m}$$

$$c_{m,m} = \left[\varphi_m - \sin \varphi_m \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_m^2}{\pi} \cdot \sin \varphi_m\right)\right] = 0{,}089$$

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot 0{,}7071}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot 1728 + 8\right) \cdot \frac{0{,}089}{64}} = \frac{H_0 \cdot 0{,}7071}{2 + 0{,}955}.$$

Im Falle angenommener Starre der Ringe ($J_R = J_r = \infty$):

$$H_m = \frac{H_0 \cdot 0{,}7071}{2}.$$

Es wird daher bei der Bestimmung der halbsymmetrischen Schübe ein Fehler von etwa 30 vH. begangen und, da der halbsymmetrische Schub maximal etwa ein Drittel des Hauptsystemschubes beträgt, ein Fehler von etwa 10 vH. in bezug auf diesen. Die stabilisierende Kraft am Hauptsystem verändert sich um

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{100} \cdot H_0 = \frac{14}{100} \cdot H_0,$$

also um etwa 14 vH. Es wird demnach bei Annahme starrer Ringe für die Hauptrippen zu günstig, für die Nebenrippen zu ungünstig gerechnet.

Die vorliegenden Fehlergrenzen gelten natürlich nur für die eben getroffenen Annahmen.

Bei der Berechnung praktischer Fälle wird es demnach dem Konstrukteur überlassen bleiben, auf Grund einer mehr oder minder möglichen Einschätzung der in Betracht kommenden Ringträgheitsmomente das Verfahren mehr oder weniger weit auszudehnen. Dabei wird er sich stets bewußt sein müssen, daß nur Genauigkeitsgrenzen in Betracht kommen können, die dem Fehlerbereich der Annahmen entsprechen.

Rechnungsbeispiel für eine parabolische Rippenkuppel, bestehend aus drei Ringen und acht Rippen auf einseitigen Lastangriff.

Annahmen:

Rippenform flach parabolisch: $y = \frac{f}{b^2} \cdot x^2$; $R = 15$ m; $r_1 = 12$ m,

$r_2 = 2$ m; $b = 13$ m; $f = 7$ m; $h = \frac{7}{13^2} \cdot (12 - 2)^2 = 4{,}15$ m.

Laststellung: $a = 10$ m.

Bestimmung der Konstanten und Belastungswerte nach Gleichung 16:*)

$$\mu_{2,2} = \int_0^A M_0\, y\, dx = \frac{f}{b^2} \cdot \left[\frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(b - \frac{a}{3}\right)^2\right] = 206$$

$$\mu_{1,1} = \int_B^A M_0\, y_1\, dx = \int_{(r_1 - r_2)}^{(R - r_2)} \left(\frac{f}{b^2} \cdot x^2 - h\right) \cdot M_0\, dx; \quad M_0 = x - b + a$$

$$\mu_{1,1} = \frac{f}{b^2} \cdot \left[(a - b) \cdot \int_{(r_1 - r_2)}^{(R - r_2)} x^2\, dx + \int_{(r_1 - r_2)}^{(R - r_2)} x^3\, dx\right] -$$

$$- h \cdot \left[(a - b) \cdot \int_{(r_1 - r_2)}^{(R - r_2)} dx + \int_{(r_1 - r_2)}^{(R - r_2)} x\, dx\right] = 37$$

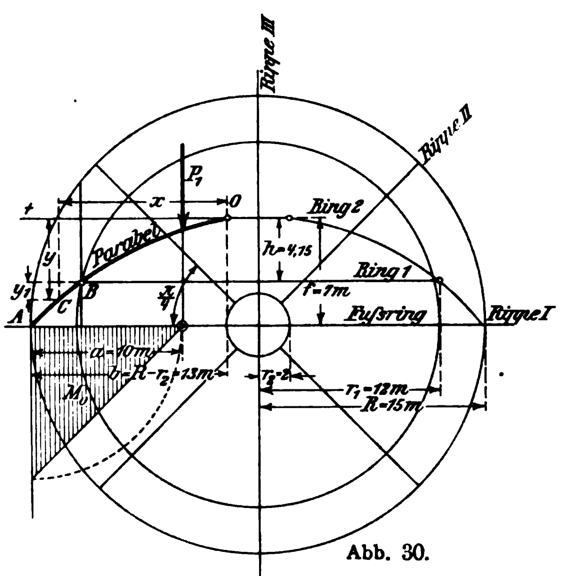


Abb. 30.

$$Y_{2,2} = \frac{f^2 b}{5} = \int_0^A y^2\, dx = 128$$

$$Y_{1,1} = \int_B^A y_1{}^2 dx = \frac{f^2}{5\, b^4} \cdot [(R - r_2)^5 - (r_1 - r_2)^5] -$$

$$- \frac{2\, h\, f}{3\, b^2} \cdot [(R - r_2)^3 - (r_1 - r_2)^3] + h^2 \cdot (R - r_1) = 6{,}6$$

$$Y_{1,2} = \int_B^A y\, y_1\, dx = \frac{f^2}{5\, b^4} [(R - r_2)^5 - (r_1 - r_2)^5] -$$

$$- \frac{h f}{3\, b^2} \cdot [(R - r_2)^3 - (r_1 - r_2)^3] = 24.$$

*) Sämtliche Ausrechnungen dieses Beispiels sind mit dem Rechenstabe durchgeführt, daher mit Genauigkeitsfehlern behaftet. Um die Fehler bei der Berechnung der sehr kleinen Biegungseinflußwerte der Ringe für weitere Fälle der Praxis möglichst einzuschränken, sind Tabellen dieser Werte für die gebräuchlichsten Winkel am Schlusse angegeben.

Zu Vergleichszwecken seien die Schübe am Hauptsystem (Rippe I) allein, unter der Annahme starrer Ringe, vorerst ermittelt.

Nach Gleichung 16:

$$\left.\begin{aligned} 256\,X_2 + 48\,X_1 &= 206 \\ 48\,X_2 + 13{,}2\,X_1 &= 37 \end{aligned}\right\}$$

hieraus $X_2 = +\,0{,}88$; $X_1 = -\,0{,}41$. Fußring: $X_1 + X_2 = 0{,}47$.

Fehlte der Zwischenring 1, so ergibt sich

$$X = \frac{\mu_{2,2}}{Y_{2,2}} = \frac{206}{256} = 0{,}81.$$

Biegungseinflußwerte der vollsymmetrischen Ringformänderung:

$$K_0 = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = -\,0{,}151$$

$$K_{\frac{\pi}{2}} = K_{\varphi_2} = +\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = +\,0{,}137$$

$$K_{\varphi_1} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{\pi} + \cos\varphi_1\cdot\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\varphi_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{4}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - 1\right)\right] = +\,0{,}0077.$$

Da das negative Vorzeichen eine Ringbiegung nach innen hier bezeichnet, müssen die Biegungseinflußwerte sämtlich mit umgekehrten Vorzeichen in die folgenden Gleichungsgruppen eingeführt werden. Ein positiv aus diesen Gleichungen erhaltener Schub am Ring 2 oder Ring 1 beansprucht dann diesen Ring auf Druck.

Annahmen bezüglich Trägheitsmomente:

$$\frac{J_b}{J_{r,2}} = 1;\quad \frac{J_b}{J_{r,1}} = \frac{1}{3};\quad \frac{J_b}{J_R} = \frac{1}{5}.$$

Unter Einführung der oben ermittelten $\mu_{1,1}$; $\mu_{2,2}$; $Y_{2,2}$; $Y_{1,2}$; $Y_{1,1}$ sowie K_0; $K_{\frac{\pi}{4}}$; $K_{\frac{\pi}{2}}$ ergeben sich nach 18) folgende Gleichungen der vollsymmetrischen Ringformänderungen:

$$2\,EJ_b\cdot\delta_2^{(1)} = \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5}\right)\cdot\left[0{,}151\,X_2^{(1)} - 0{,}015\,X_2^{(2)} - 0{,}137\,X_2^{(3)}\right]$$

$$= 206 - 256\,X_2^{(1)} - 48\,X_1^{(1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\text{a})$$

und

$$2\,EJ_b\cdot\delta_1^{(1)} = \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5}\right)\cdot\left[0{,}151\,X_1^{(1)} - 0{,}015\,X_1^{(2)} - 0{,}137\,X_1^{(3)}\right]$$

$$= 37 - 48\,X_2^{(1)} - 13{,}2\,X_1^{(1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\text{b})$$

$$2\,EJ_b\cdot\delta_2^{(2)} = \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[(0{,}151 - 0{,}137)\,X_2^{(2)} - 0{,}0077\,X_2^{(1)} - 0{,}0077\,X_2^{(3)}\right]$$

$$= -\,256\,X_2^{(2)} - 48\,X_1^{(2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\text{a})$$

und $2\,EJ_b \cdot \delta_1^{(2)} = \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5}\right) \cdot$

$$\cdot \left[(0{,}151 - 0{,}137)\,X_1^{(2)} - 0{,}0077\,X_1^{(1)} - 0{,}0077\,X_1^{(3)}\right]$$

$$= -48\,X_2^{(2)} - 13{,}2\,X_1^{(2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2b)$$

$$2\,EJ_b \cdot \delta_2^{(3)} = \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5}\right) \cdot \left[0{,}151\,X_2^{(3)} - 0{,}015\,X_2^{(2)} - 0{,}137\,X_2^{(1)}\right]$$

$$= -256\,X_2^{(3)} - 48\,X_1^{(3)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3a)$$

$$2\,EJ_b \cdot \delta_1^{(3)} = \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5}\right) \cdot \left[0{,}151\,X_1^{(3)} - 0{,}015\,X_1^{(2)} - 0{,}137\,X_1^{(1)}\right]$$

$$= -48\,X_2^{(3)} - 13{,}2\,X_1^{(3)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3b)$$

Es ergeben sich durch Auflösung dieser sechs Gleichungen die vollsymmetrischen Schübe

am Ring 2	am Ring 1	am Fußring
$X_2^{(1)} = +\,0{,}551$	$X_1^{(1)} = +\,0{,}344$	$X_2^{(1)} + X_1^{(1)} = +\,0{,}895$
$X_2^{(2)} = -\,0{,}031$	$X_1^{(2)} = +\,0{,}276$	$X_2^{(2)} + X_1^{(2)} = +\,0{,}245$
$X_2^{(3)} = +\,0{,}103$	$X_1^{(3)} = +\,0{,}304$	$X_2^{(3)} + X_1^{(3)} = +\,0{,}407$

Wären die Ringe starr, so ergibt sich (siehe oben) $X_2^{(1)} = +\,0{,}88$, $X_1^{(1)} = -\,0{,}41$; weitere vollsymmetrische Schübe treten nicht auf.

Die halbsymmetrischen Kräfte mögen an diesem praktischen Rechnungsbeispiel unter Ausschluß der Tangentialkräfte wegen des geringen Einflusses derselben ermittelt werden.

Zunächst sind die Ringbiegungseinflußwerte zu berechnen.

Nach Gleichung 28):

$$e_{m,m} = e_{2,2} = \left[\varphi_m - \sin\varphi_m \cdot \left(\cos\varphi_m + \frac{2\,\varphi_m{}^2}{\pi} \cdot \sin\varphi_m\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = 0{,}0891,$$

ferner für $\qquad \varphi_m = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_a = \frac{\pi}{4};$

nach Gleichung 29):

$$e_{m,a} = e_{3,2} = \left[\cos \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_a\right) \cdot \varphi_a - \sin\varphi_a \cdot \left(\cos\varphi_m + \frac{2\,\varphi_a \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] = 0,$$

ebenso für $\qquad \varphi_m = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_a = 0; \quad e_{m,a} = e_{2,1}$

$$= \left[\cos \cdot (\varphi_m - 0) \cdot 0 - \sin 0 \cdot \left(\cos\varphi_m + \frac{2 \cdot 0 \cdot \varphi_m}{\pi} \cdot \sin\varphi_m\right)\right] = 0.$$

In den Gleichungsgruppen 34) ist $H_2^0 = X_2^{(1)}$ der Gleichung 18) und $H_1^0 = X_1^{(1)}$.

Diese Gleichungen sind dann im besonderen Falle

$$u_{r,2}^{(2)} \cdot EJ_b = Y_{2,2} \cdot \{\cos\varphi_2 \cdot [H_2^0 - n \cdot H_2^{(2e)} \cdot \cos\varphi_2]\}$$
$$+ Y_{1,2} \cdot \{\cos\varphi_2 \cdot [H_1^0 - n \cdot H_1^{(2e)} \cdot \cos\varphi_2]\}$$
$$- \frac{J_b}{2} \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_2^3}{J_{r,2}}\right) \cdot H_2^{(2e)} \cdot e_{2,2} = H_2^{(2e)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2e)} \cdot Y_{1,2}$$

$$u_{r,1}^{(2)} \cdot EJ_b = Y_{1,2} \cdot \{\cos\varphi_2 \cdot [H_2^0 - n \cdot H_2^{(2e)} \cdot \cos\varphi_2]\}$$
$$+ Y_{1,1} \cdot \{\cos\varphi_2 \cdot [H_1^0 - n \cdot H_1^{(2e)} \cdot \cos\varphi_2]\}$$
$$- \frac{J_b}{2} \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_1^3}{J_{r,1}}\right) \cdot [H_1^{(2e)} \cdot e_{2,2}] = H_2^{(2e)} \cdot Y_{1,2} + H_1^{(2e)} \cdot Y_{1,1}$$

$$u_{r,2}^{(2)} \cdot EJ_b = 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0{,}551 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_2^{(2e)}\right]$$
$$+ 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0{,}344 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_1^{(2e)}\right]$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15^3}{5} + \frac{2^3}{1}\right) \cdot 0{,}0891 \cdot H_2^{(2e)} = 128 \cdot H_2^{(2e)} + 24 \cdot H_1^{(2e)}$$

$$u_{r,1}^{(2)} \cdot EJ_b = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0{,}551 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_2^{(2e)}\right]$$
$$+ 6{,}6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0{,}344 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_1^{(2e)}\right]$$
$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15^3}{5} + \frac{12^3}{3}\right) \cdot 0{,}0891 \cdot H_1^{(2e)} = 24 \cdot H_2^{(2e)} + 6{,}6 \cdot H_1^{(2e)}.$$

Hieraus bestimmt sich $H_2^{(2e)} = +0{,}19$; $H_1^{(2e)} = +0{,}026$.

Auf die Hauptrippe I somit

am Ring 2: $n \cdot \cos\varphi_2 \cdot H_2^{(2e)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}19 = 0{,}269$,

am Ring 1: $n \cdot \cos\varphi_2 \cdot H_1^{(2e)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}026 = 0{,}0367$.

Zum Vergleich seien wieder die halbsymmetrischen Kräfte bei starren Ringen ermittelt:

Nach Gleichung 20): $\frac{206}{2} \cdot \cos\varphi_2 - 2 \cdot V^{(2)} \cdot \cos^2\varphi_2 = V^{(2)}$

$$\frac{37}{2} \cdot \cos\varphi_2 - 2 \cdot U^{(2)} \cdot \cos^2\varphi_2 = U^{(2)}$$

ergibt $V^{(2)} = 36{,}4 \cdot U^{(2)} = 6{,}5$,

somit $\left.\begin{aligned} 128\, H_2^{(2)} + 24 \cdot H_1^{(2)} &= 36{,}4 \\ 24\, H_2^{(2)} + 6{,}6 \cdot H_1^{(2)} &= 6{,}5 \end{aligned}\right\} H_2^{(2)} = +0{,}315;\ H_1^{(2)} = -0{,}16.$ *)

---

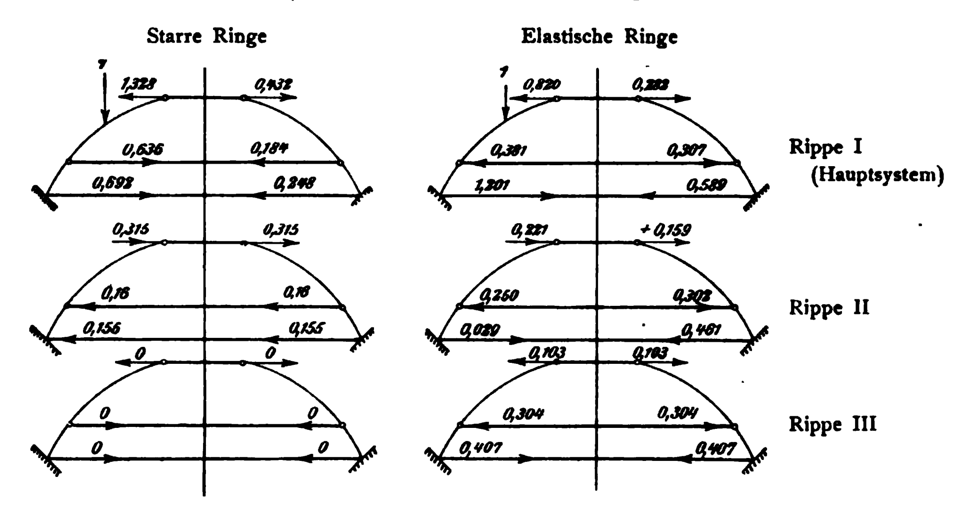
*) Auf das Hauptsystem wirkt

am Ring 2: $n \cdot \cos\varphi_2 \cdot H_2^{(2)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}315 = 0{,}448$,

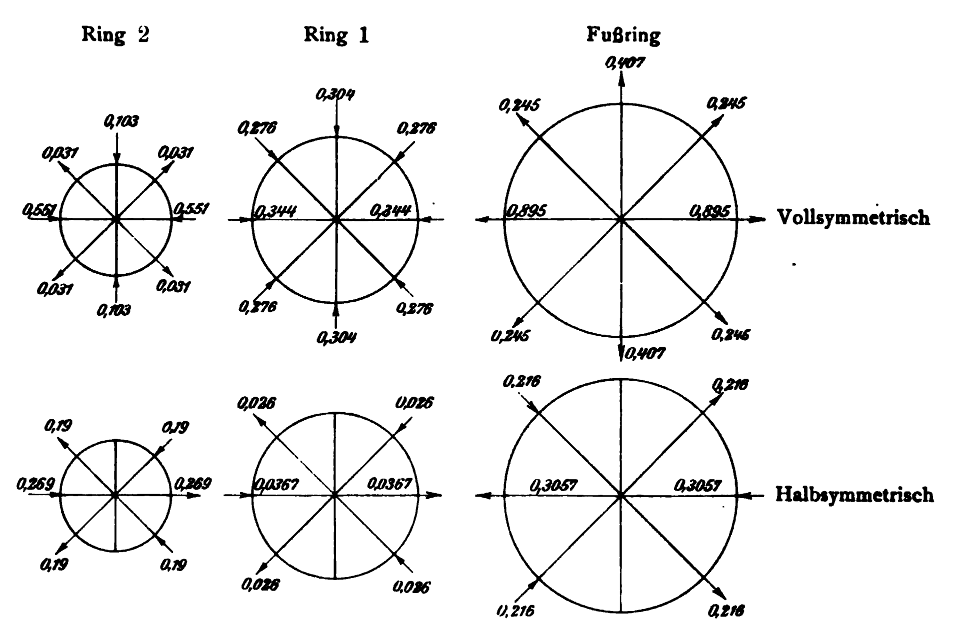
am Ring 1: $n \cdot \cos\varphi_2 \cdot H_1^{(2)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-0{,}16) = -0{,}226$.

In nachstehenden Abbildungen sind die resultierenden Schübe der Rippen für diese und die Ringe dargestellt, also die Teilsysteme zur Ermittlung der inneren Kräfte frei gemacht.

a) Äußere Kräfte der Rippen.



b) Äußere Kräfte der Ringe.



Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Die Rippenmomente sind nach

$$M_x = M_0 - X_2 \cdot y - X_1 \cdot y_1$$

und die Ringmomente durch Superposition je zweier diametraler vollsymmetrischer Kräfte nach

$$M_c = -\frac{Hr}{2}\left(\cos\varphi - \frac{2}{\pi}\right)$$

und der halbsymmetrischen nach

$$X = -Z \cdot \frac{r}{\pi} \sin\varphi_1 (\pi - 2\varphi_1)$$

und den sich mit dieser Unbestimmten ergebenden Winkelwerten der Momente zu bestimmen.

Nachfolgend noch eine Tabelle aller Ringbiegungseinflußwerte für die in der Praxis zumeist verwendeten Winkel der Rippenlagen.

Tabelle für K_φ, e und τ.

φ°	K_φ	$e_{m,m}$	$\tau_{m,m}$
90	+ 0,1366	+ 0	+ 0,0379
75	+ 0,1198	+ 0,0412	+ 0,03246
67½	+ 0,09954	+ 0,0704	+ 0,0258
60	+ 0,0727	+ 0.0906	+ 0,0179
45	+ 0,00538	+ 0,08904	+ 0,00656
30	− 0,0668	+ 0,04695	+ 0,00123
22½	− 0,0989	+ 0,0248	+ 0,00035
15	− 0,1250	+ 0,0089	+ 0,00015
0	− 0,1488	+ 0	+ 0

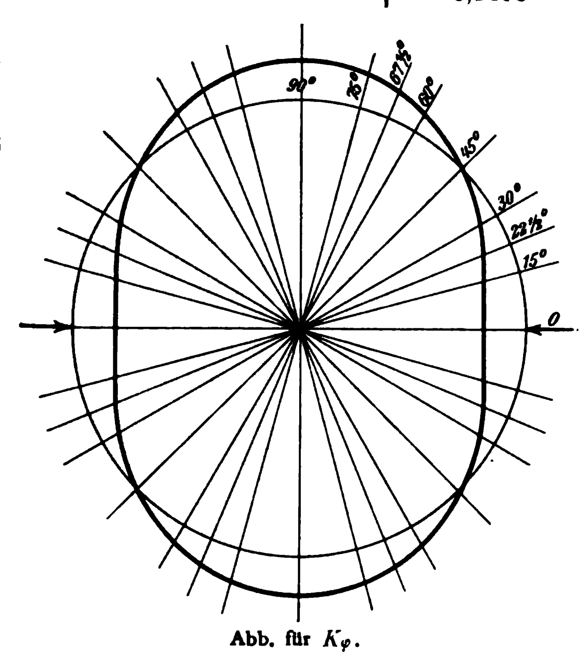


Abb. für K_φ.

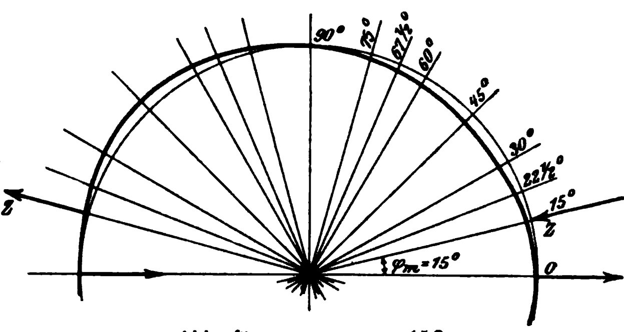


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 15°$.

Im folgenden sind diese Biegungseinflußwerte als Schaubilder der Ringformveränderungen dargestellt und durch $e_{m,a} = e_{a,m}$ und $\tau_{m,a} = \tau_{a,m}$ aus den Tabellen ergänzt.

Tabelle für $e_{m,a}$.

φ_m °	φ_a °						
	75 °	$67^1/_2$ °	60 °	45 °	30 °	$22^1/_2$ °	15 °
	+	+	+	+	+	+	+
90	0	0	0	0	0	0	0
75		0,0528	0,0574	0,0501	0,0301	0,0190	0,0094
$67^1/_2$			0,0784	0,0702	0,04266	0,0271	0,0134
60				0,08444	0,0523	0,03305	0,0166
45					0,05964	0,0391	0,02076
30						0,03305	0,01744
$22^1/_2$							0,01396

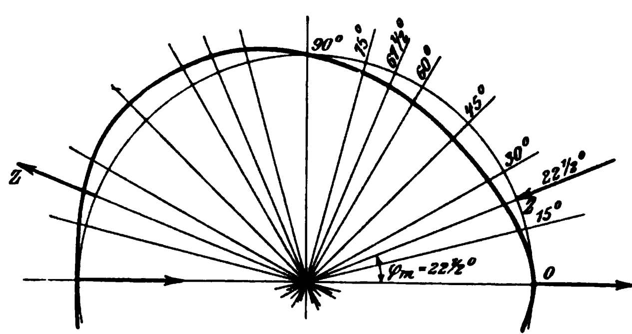


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 22^1/_2$°.

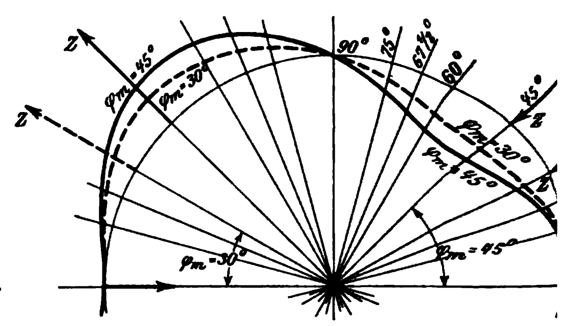


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 45$°; 30°.

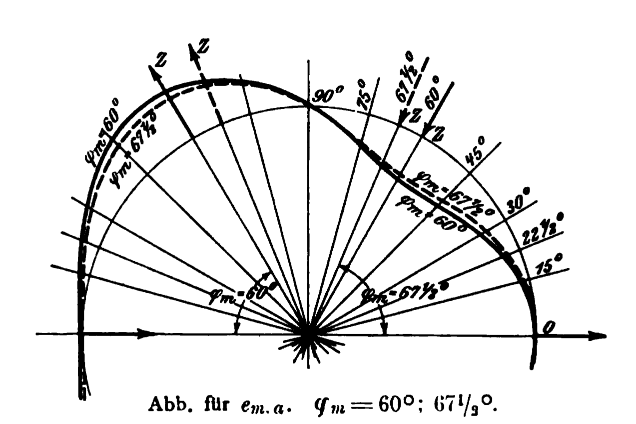


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 60$°; $67^1/_2$°.

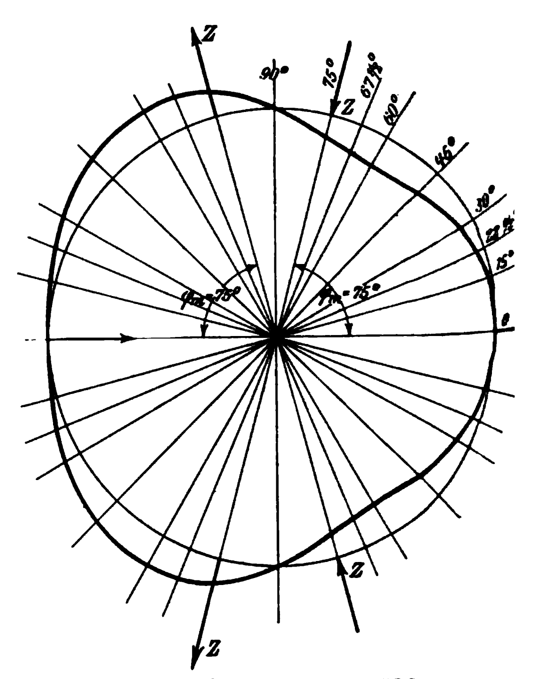


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 75$°.

Tabelle für $\tau_{m.a}$.

φ_m °	φ_a °						
	75 °	67½ °	60 °	45 °	30 °	22½ °	15 °
	+	+	+	+	+	+	+
90	0,03820	0,03927	0,04169	0,05132	0,06223	0,06302	0,05711
75		0,03150	0,03190	0,03526	0,04078	0,04143	0,03743
67½			0,02499	0,02639	0,02980	0,03041	0,02782
60				0,01830	0,02009	0,02344	0,01917
45					0,00674	0,00695	0,00675
30						0,00123	0,00123
22½							0,00034

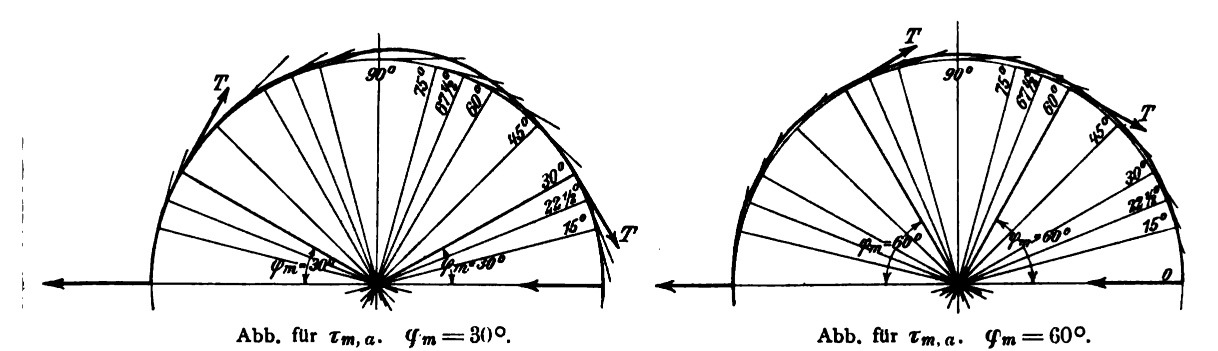


Abb. für $\tau_{m,a}$. $\varphi_m = 30°$.

Abb. für $\tau_{m,a}$. $\varphi_m = 60°$.

In der zur Darstellung der $\tau_{m,a}$ nötigen großen Verzerrung sind die Verschiebungen für $\varphi_m > 75°$ zufolge Überschneiden der Formänderungsstrecken bei $\varphi_a = 0$ nicht mehr richtig darstellbar.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW. 68.





FORSCHER

AUF DEM G

EISENB

EINE GÜTEPRO
SYS
DR. v. EM

HEFT XIV

VON
GERHARD M
INGENI
IM SPEZIALBUREAU FÜR EISENBETO

ZWEITE NEUBEARBE

MIT 9 TEXTABB



Gerhard Neumann

Eine Güteprobe für Beton System Dr. von Emperger



Eine Güteprobe für Beton System Dr. von Emperger

von

Gerhard Neumann
Ingenieur im Spezialbureau für Eisenbeton Dr. Ing. Fritz von Emperger.

Zweite vermehrte Auflage.

Mit 9 Textabbildungen

Berlin 1911
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Vorwort.

Die erste Auflage der Beschreibung der im folgenden behandelten, für den Eisenbetonbau so wichtigen Materialprüfungsmethode war nur für einen engen Kreis von Fachgenossen bestimmt, da es sich infolge der geradezu entmutigenden Nichtbeachtung der ersten Veröffentlichung, nach so manchem Jahr der Ruhe zunächst nur darum handelte, das allgemeine Interesse wieder auf diese Methode zu lenken. Die Schnelligkeit, mit der die Anregung nun allerorten aufgegriffen wurde, der Entschluß der maßgebenden Kreise, die Brauchbarkeit der genannten Prüfungsmethode durch umfangreiche Versuche zum Zwecke der Aufnahme in die in Vorbereitung befindlichen neuen Betonvorschriften zu erproben, und die von allen Seiten einlaufenden Anfragen und Bestellungen genannter Broschüre machten eine Neuauflage nötig.

Diese Neuauflage wurde nach den inzwischen gemachten Erfahrungen ergänzt und erweitert. Einige praktisch erprobte Änderungen haben den Arbeitsvorgang geregelt und vereinfacht, seine Beschreibung wurde auf das ausführlichste und genaueste abgefaßt, um so jedem, der nach dieser, bereits im Jahre 1903 in „Beton u. Eisen" von Dr. F. v. Emperger klargelegten Methode zu arbeiten gewillt ist, über die unangenehmen Schwierigkeiten einer neuen Einrichtung tunlichst hinwegzuhelfen. An alle Fachgenossen trete ich mit dem Ersuchen heran, alle etwaigen Erfahrungen von Wichtigkeit an das unterzeichnete Bureau gelangen zu lassen, damit durch ihre Berücksichtigung möglichst schnell etwas Vollkommenes und Einwandfreies von jedermann geleistet werden kann. Auf diese Weise ist zu erhoffen, daß die Methode in kürzester Zeit auf jene Höhe abgeklärter Erfahrung gehoben wird, welche die Würfelprobe bei der peinlichsten Genauigkeit der laboratoriummäßigen Behandlung für Konstruktionen reinen Druckes besitzt, und deren die Methode der Kontrollbalken in erhöhtem Maße bedarf, die sie aber auch verdient, da sie sich durch ihre Einfachheit und Billigkeit außerordentlich zur Verallgemeinerung eignet. Durch sie ist es jedem Fachmann, der mit Ernst und Liebe seinen Beruf erfaßt, ermöglicht, auf Grund eigener Versuche die **besten** und **billigsten** Betonqualitäten zu ermitteln, ökonomischer als bis jetzt zu arbeiten und dabei überdies stets mit voller Sicherheit von der Güte seines Materials überzeugt zu sein.

Herr Oberbaurat Dr. Fritz v. Emperger hatte die Güte, mich mehrfach mit der Durchführung solcher Kontrollproben und der im folgenden vorliegenden Auswertung ihrer Ergebnisse zu betrauen und mich zu dieser Veröffentlichung zu ermächtigen. Ich erlaube mir, ihm an dieser Stelle für die durch ihn erfolgte Durchsicht der Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Wien, im Januar 1911.

Gerhard Neumann,

Ingenieur im Spezialbureau für Eisenbeton Dr. Ing. Fritz v. Emperger.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

In den Anfängen des Eisenbetons hielt man die Tragfähigkeit des Balkens für abhängig von der Eisenmenge und dementsprechend steigerungsfähig, eine Anschauung, die sich in allen früheren Veröffentlichungen bis zu den von Thullie (Zeitschrift des Österr. Ing.- und Arch.-Vereines 1896) findet. Erst in der Zeitschrift des Österr. Ing.- und Arch.-Vereines 1897 ist von Dr. v. Emperger die Rolle der Druckfestigkeit oder der zulässigen Druckspannung in der heute allgemein bekannten Wirkung dargelegt worden, und wurde auch nachgewiesen, in welcher Weise die zugehörigen Lasten von den Bewehrungsprozenten abhängig sind. Das führte in der Folge dazu, diese Begrenzung der Tragfähigkeit durch die Druckfestigkeit des Betons näher zu untersuchen und den Unterschied zwischen dieser Zahl und jener Annahme nachzuweisen, welche die Würfelfestigkeit des Betons als maßgebend für den Druckgurt der Eisenbetonbalken hingestellt hatte. Auf Grund dieses Studiums machte Dr. von Emperger in „Beton u. Eisen“ 1903, Seite 26 den Vorschlag, von der Würfelprobe überhaupt abzusehen und bei Eisenbetonbauten die Probe mittels entsprechend konstruierter Balken als „sichere Kontrolle des Ganzen“ anzustellen.

Auf diesen Anschauungen und Vorschlägen beruht die ganze weitere Entwicklung dieser Güteprobe; es ist bezeichnend dafür, wie langsam sich das Gute Bahn bricht, daß es voller acht Jahre bedurfte, bis die Bedeutung dieser Idee voll erfaßt wurde. Dr. v. Emperger hat gleich im nächsten Heft „Beton u. Eisen“ 1903, S. 94 seinen Vorschlag zu einem genau umgrenzten System verdichtet und alle Einzelheiten für eine derartige Erprobung dargelegt. Er stützte sich dabei auf die bis dahin ausgeführten Versuche mit Eisenbetonbalken. Es waren dies in erster Linie die Versuche der Amsterdamer Cement-Ijzer-Werke (L. A. Sanders) aus dem Jahre 1900 mit Balken von 9 cm nutzbarer Höhe mit 15 cm und mehr Breite und einer Bewehrung bis 2,7 %. Es sind damit zwei Qualitäten Beton untersucht worden. In einem besonderen Graphikon wurde von ihm gezeigt, daß selbst bei diesen Versuchen bis 2,7 % Eisen die Druckfestigkeit nur bei magerem Beton (1:6) festgestellt werden kann und daß sie bei einem Beton 1:4 gar nicht zum Ausdruck kommt. Zu diesem Zwecke wurden in derselben Abbildung noch die Versuche aus Boston mit Ransome-Eisen graphisch zusammengestellt und übersichtlich vorgeführt, welche Bewehrungen bis 4 % zeigen.

Auf Grund dieser sowie einiger Versuche, die Dr. v. Emperger bei Pittel und Brausewetter in Weißenbach a. d. Triesting (1900) ausgeführt hatte, gelangte er zu bestimmten Vorschlägen über die Bestimmung der Güte des Betons mit Balken mit 8 cm nutzbarer Höhe und Bewehrungen bis 4%. Diese Methode wurde ausdrücklich als Güteprobe für die Qualität des Betons und zur Kontrolle aller Eigenschaften eines Eisenbetontragwerkes empfohlen und daran die Aufforderung geknüpft, durch Ausführung solcher Versuchsreihen sich von der Richtigkeit dieser Vorschläge zu überzeugen. Denn Dr. v. Emperger war sich bewußt, daß einer auch nur bescheidenen Einführung dieser Balkenprobe in die Praxis oder in eine amtliche Vorschrift eine weitgehende praktische Erprobung seines Vorschlages vorangehen mußte. Dieser Aufforderung leisteten jedoch nur sehr wenige Fachgenossen Folge und von diesen war es nur Herr Professor Mörsch, der die Sache mit Gründlichkeit in Angriff nahm, indem er Balken von 1,8% und 3,36% Bewehrung anfertigen, 1905 nach Stuttgart schaffen und dort erproben ließ. Diese Versuche finden sich in seinem Werk „Der Eisenbetonbau" auf Seite 97 der 3. Auflage beschrieben.

Diese Gleichgültigkeit gegen die Vorschläge Dr. v. Empergers, die einer Ablehnung von Seiten des Faches gleichkommt, hat naturgemäß entmutigend auf ihn gewirkt. Er hat sich daher in der Folge darauf beschränkt, mit einer Reihe von kleinen Balken von 8 · 8 cm Querschnitt die Möglichkeit nachzuweisen[1], daß damit die Druckfestigkeit ermittelt werden kann, und untersuchte sowohl die Einflüsse, welche dem Auftreten der reinen Druckfestigkeit hinderlich sind, als auch die brauchbare Form und Bewehrung der Balken, um sie zur Geltung zu bringen, und so die volle Tragfähigkeit zu sichern.

Als eine derartige gefährliche Eigenschaft erkannte er in erster Linie die Haftfestigkeit und bei einer zu großen Anhäufung der Eisen im Untergurt eine Erscheinung, die man gewöhnlich als Schubspannung bezeichnet. Seine weiteren Arbeiten zielten nun darauf hin, die Größe dieser Einflüsse zu ermitteln, um sie ausscheiden zu können. Diese Bestrebungen wollen wir als bekannt und nicht weiter hierher gehörig übergehen.[2] Da die angegebene Methode die Würfelproben ersetzen sollte, glaubte Dr. v. Emperger die letztern nach zwei Richtungen verbessern zu sollen: einerseits durch Ausbildung der graphischen Darstellung[3] und anderseits durch die Angabe einer Rechenmethode, die dazu bestimmt war, die Würfelfestigkeit direkt aus dem Versuch abzuleiten[4], da die Praxis unabänderlich an diesem Begriffe als Gütemaßstab festhielt.

Inzwischen hatte jedoch einer jener Fachmänner, welche ihre Mitwirkung bei Einführung dieser Güteprobe zugesagt hatten, sein Wort zur Tat werden lassen. Herr Professor Ostenfeld-Kopenhagen hatte diese Güte-

1) Beton u. Eisen 1905, S. 202.
2) Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Heft 3 u. 5.
3) Beton u. Eisen 1903, S. 182; 1904, S. 317, Tafel 24 u. a. m.
4) Beton u. Eisen 1904, S. 171 u. a. m.

probe für die Vorschriften für Eisenbeton, welche der dortige Ingenieurverein herausgab, 1906 vorgeschlagen und so findet sie sich bei den im Jahre 1908 erschienenen dänischen Vorschriften eingeführt. Dies war jedoch insofern eine Enttäuschung, als das dort angewendete Eisenprozent (1,49 % Eisen) nur die Ermittlung geringwertiger Betonfestigkeiten möglich machte, sich also zu einer Qualitätsprobe im Sinne der gemachten Vorschläge schlecht eignete. Dies hatte sich bei der Anwendung der dänischen Vorschriften in der Praxis bald herausgestellt. Als Dr. v. Emperger im Oktober 1908 den früheren Mitarbeiter des Herrn Professor Ostenfeld, den jetzigen Herrn Professor Suenson-Kopenhagen bei der Sitzung des internationalen Eisenbetonausschusses in Basel traf, gab er dieser Meinung Ausdruck und begrüßte es, als Professor Suenson die Absicht aussprach, die Versuche auszuführen, wie sie seinerzeit als Vorbedingung für die Einführung dieses Gütemaßstabes gefordert worden waren. Es wurde bereits dort eine Veröffentlichung dieser Versuche in „Beton u. Eisen“ vereinbart[1], um die Aufmerksamkeit des Faches neuerdings auf diese Frage zu lenken.

Die Arbeit von Suenson hatte in erster Linie die Unzulänglichkeit der Abmessungen in den dänischen Vorschriften erwiesen. Dieser Nachweis erstreckt sich auf alle in der Praxis vorkommenden Betonsorten. Gleichzeitig hat er die Ergebnisse einer Betonbalkenserie von 1 Woche, und einer Zementbalkenserie von $5\,^1/_2$ Monat Alter mit Bewehrungen von 1,5 bis 14 % untersucht. Diese Veröffentlichung bestätigt alle von Dr. v. Emperger aufgestellten Behauptungen und gab ihm eine neue Anregung, die Arbeit dort neu aufzugreifen, wo er sie entmutigt beiseite gelegt hatte. Hierzu gab sich ihm doppelte Gelegenheit. Einerseits hatte er sein Bureau durch die Aufnahme von Ingenieuren erweitert und war auf diese Weise in die Lage versetzt worden, verschiedene Aufträge zu übernehmen, welche er, wie die Bauüberwachung von großen Bauten, früher mit Rücksicht auf seine Zeit stets ablehnen mußte. Bei allen diesen Bauüberwachungen wurden sofort die Kontrollbalken als Güteprobe eingeführt, worüber später ausführlich berichtet werden wird. Eine wichtige Gelegenheit ergab sich ferner bei den Versuchen des österr. Eisenbeton-Ausschusses, da es sich auch darum handelte, alle praktischen Einzelheiten einer solchen Methode zu bestimmen und auszuprobieren. Bei den Versuchen waren, da vordem die Hauptarbeit des Ausschusses aus Säulenversuchen bestand, nur Würfelproben als Güteproben vorgesehen. Bei den unter Leitung von Dr. v. Emperger ausgeführten Balkenproben hatte die Meinung vorgeherrscht, daß bei so schwach bewehrten Balken die Biegungsdruckfestigkeit gar nicht in Frage kommen würde. Die unerwartet hohe Tragfähigkeit dieser Balken, sobald sie eingespannt wurden, machte jedoch diese Annahme zuschanden und nun galt es zu bestimmen, ob die auftretenden Druckzerstörungen primärer Art sind, d. h. von der Erschöpfung der Druckfestig-

1) Beton u. Eisen 1910, S. 149.

keit herrühren oder aber nur als Folgeerscheinung einer Überschreitung einer anderen Festigkeit anzusehen sind.

Eine ernstliche Prüfung der Würfelfestigkeiten ergab so große Abweichungen, daß man zunächst bei den fertigen Balken durch aus den Balken herausgestemmte Würfel eine Kontrolle versuchte und Dr. von Emperger die Einführung der Güteprobe durch Kontrollbalken bei den weiteren Versuchen beantragte und durchführte.

Über diese Einzelheiten wird der Bericht des Österreichischen Eisenbetonausschusses alle nötigen Angaben bringen.

1. Die derzeitigen Güteproben.

Wenn man von den Vorschriften der Kgl. Eisenbahn-Direktion Berlin absieht, wonach auch die Zugfestigkeit des Betons bei Biegung untersucht wird, so hat man sich bis jetzt zu diesem Zweck der Druckfestigkeit von Würfeln bedient. Obwohl sich der Nachweis der sogenannten Würfelfestigkeit in allen Vorschriften als einziger Gütemaßstab vorfindet, so hat er bei der Unmöglichkeit, eine dazu nötige genaue Presse bei der Hand zu haben, nur eine verschwindende Anwendung in der Praxis gefunden. Die Ursache für dieses sonst unbegreifliche Verhalten der Interessenten ist in dieser und in einer Reihe anderer Unzukömmlichkeiten, sowie in den Fehlerquellen des Verfahrens zu suchen, das nur in einem sorgfältig geleiteten Laboratorium mit seinen erfahrenen Hilfskräften einwandfreie Ergebnisse liefert. Jeder Eingeweihte weiß, daß sonst die Lastübertragung auf die Würfel, wie überhaupt deren ganze Herstellung unter Umständen stattfindet, die es kaum zulässig erscheinen lassen, die Ergebnisse unmittelbar auf den am Bau verwendeten Beton zu übertragen.

Diese Fehlerquellen treten bei gleichzeitigem Gebrauch von Balkenproben und Würfelproben deutlich hervor, da oft plötzlichen Abweichungen in der Würfelfestigkeit eines und desselben Betons, sei es einzeln, sei es in ganzen Reihen, die Gleichmäßigkeit der Ziffern aus den Balkenproben gegenübersteht und beweist, daß bei jenen Zahlen rein persönliche oder doch außerhalb des Materials gelegene Einflüsse ausschlaggebend mitgewirkt haben, wie die Fertigkeit im Stampfen, die Art der Versuchsausführung, Sorgfalt der Probe, Parallelismus der Druckflächen u. a. m., was Unterschiede bis 40 % und mehr ergibt.

Wir wollen hier schon deshalb nicht alle Klagen wiederholen, weil dies ohnehin zur Genüge bekannt ist. Wir wollen jedoch nicht unterlassen anzuführen, daß bei der Unmöglichkeit des Unternehmers, sich vorher laufend eine Gewißheit zu verschaffen, ob seine Vorkehrungen die richtigen waren und bei der wechselnden Auslegung der Zahlenangaben diese Würfelproben nur dort ihren Zweck ganz erfüllen, wo entweder eine Bauleitung den Unternehmer schikanieren will oder die Unternehmung der Bauleitung

ein X für ein U vormachen kann. Ganz unberechenbar sind aber die Folgen, wenn man, wie so häufig, in Streitfällen an dieses Gottesgericht appelliert.

Alle diese und manch andere Umstände haben die ganze Kontrolle von Beton durch laufend auf dem Bau durchgeführte Versuche in Mißkredit gebracht.

Trotz alledem besteht aber bei unseren modernen Beton- und Eisenbetonbauten das eingestandene und dringende Bedürfnis nach einer raschen und am Bau selbst durchführbaren Probe zur Bestimmung der jeweiligen Güte des Betons, worüber die zahlreichen und fruchtlosen Änderungen der Vorschriften über Würfelfestigkeit uns das beste Zeugnis geben.

Alle im Betonbau beschäftigten oder doch daran beteiligten Fachleute müssen es als einen schweren Mangel empfinden, daß sie kein einfaches Hilfsmittel für die Beurteilung dieses Baustoffes besitzen, wenn sie weitgehende Entschlüsse bezüglich aller dabei wichtigen Umstände rasch fassen müssen, wie z. B. Menge des Zementes, des Wassers, der Qualität und der Korngröße der Zuschlagstoffe, des geeigneten Zeitpunktes zur Ausschalung usw. bis zum Einfluß der niedrigen Temperaturen. Es kann nicht geleugnet werden, daß der Ingenieur bei allen diesen Umständen, die sich nicht in bestimmte zahlenmäßige Regeln fassen lassen, bloß nach dem Gefühl oder doch nach den fragwürdigen Faustregeln urteilt, ohne eine Möglichkeit, sich an Ort und Stelle eine Gewißheit über die Richtigkeit seiner Entscheidung zu verschaffen.

Wenn nun auf dieser schwankenden Unterlage zwei so verschiedene Interessengruppen wie die Baupolizei und die Unternehmer zu einem gemeinsamen Ergebnisse kommen sollen, so ist es verständlich, daß jene dies vermittelnden Vorschriften eine Quelle endloser Reibungen bilden und ihr eigentlicher Zweck: das Ziel, etwas herzustellen, das ebenso der Güte, wie der Ökonomie entspricht – auf diesem Wege nicht zu erreichen ist.

Aus dieser Sachlage heraus ergeben sich Auslegungen, bei denen, je nachdem der Einfluß einer mit dieser Sachlage nicht vertrauten Baupolizei vorwiegt, in einer oft ganz unberechtigten Weise über das Maß des aus Sicherheitsrücksichten Notwendigen hinaus gegangen wird, oder die umgekehrt das andere Extrem zeigen, wo eine pflichtbewußte Unternehmung vor einer ungewohnten Situation selbst das Notwendigste vernachlässigt, weil sie keine Möglichkeit besitzt, sich einen Einblick in den Wert ihrer Maßnahmen zu verschaffen.

Zu alledem kommt noch der Umstand, daß die meisten Ingenieure auch heute noch keinen Unterschied zwischen der reinen Druckfestigkeit und der Festigkeit auf Biegung machen und die Ergebnisse der Würfelproben für den Druckgurt in derselben Weise, nur mit einer doppelten Sicherheit anwenden, wie die nachgewiesene Zugfestigkeit des Eisens im Zuggurt, obwohl die Druckfestigkeit des Betons auf Biegung oft nahezu doppelt,

immer jedoch 1,3 mal so groß als die richtige Würfelfestigkeit ist, und man also hierbei gleich um das 3 bis 4 fache fehlgreift.

Es liegt die Annahme nahe, daß auch in den amtlichen Vorschriften in Deutschland dieser Unterschied zwischen Biegungs- und Druckfestigkeit nicht Berücksichtigung gefunden hat (siehe Abschnitt 6).

Noch größer wird der Fehlgriff, wenn überdies durch Forderung von bestimmten Grenzspannungen auf die örtliche Güte des Materiales keine Rücksicht genommen wird: man kommt dann leicht auf Werte von 10 und mehrfacher Sicherheit im Beton, bei einer gleichzeitigen 3 bis 4 fachen im Eisen.

Wir sehen also, daß alles zu einer Form von Proben drängt, welche die Art der wirklichen Inanspruchnahme des Betons im Tragwerk nachahmt, aber an Ort und Stelle ohne Beiziehung von komplizierten Maschinen mit hinreichender Genauigkeit ausführbar ist. Es ist nun versucht worden, durch die in der Folge beschriebenen Balkenversuche diese Übelstände zu beseitigen. Wir sind insbesondere überzeugt, daß es genügt, eine Vorrichtung zu schaffen, welche es leicht möglich macht, zu erfahren, was mit den jeweilig vorhandenen Materialien geleistet werden kann. Darauf kommt es immer hauptsächlich an. Unmögliches wird niemand verlangen. Wenn man dies also weiß und ermittelt hat, so wird die gestörte Harmonie zwischen einer pflichtbewußten Unternehmung und einer fachkundigen Überwachung leicht herzustellen sein.

2. Das System der Kontrollbalken.

Die vorerwähnten Umstände führten dazu, sich nach einem anderen Gütemaßstab für Beton umzusehen und hierzu die Druckfestigkeit des Betons auf Biegung zu verwenden. Bei diesen Versuchen entfallen zunächst die Fehlerquellen, herrührend von der Lastübertragung usw., und es zeigt die Gleichmäßigkeit der Ergebnisse, daß der Beton keinesfalls die so oft verschrieene Ungleichmäßigkeit besitzt, insbesondere, daß seine Qualität durch das vorhandene Sand- bezw. Steinmaterial lokal begrenzt ist und nicht **ausschließlich**, wie gemeinhin angenommen wird, von der Zementmenge, d. h. von dem Mischungsverhältnis alles abhängt.

Die Versuchskörper sind kleine am Bau hergestellte Balken, deren Querschnitt beispielsweise aus dem beiliegenden Protokoll zu entnehmen ist. Wichtig daran ist die genaue Einhaltung der maßgebenden Abmessungen der Rechnung; so im vorliegenden Beispiel: daß der Balken in der Mitte genau 70 mm breit und der Mittelpunkt der Rundeisen 80 mm von der Draufsicht entfernt bleibt. Diese Balken werden auf zwei Böcke gelegt und durch eine am Bau vorrätige Belastung, wie z. B. Ziegel (Abb. 1) oder einen anderen Baustoff, Schotter o. ä., zum Bruch gebracht. Die auf

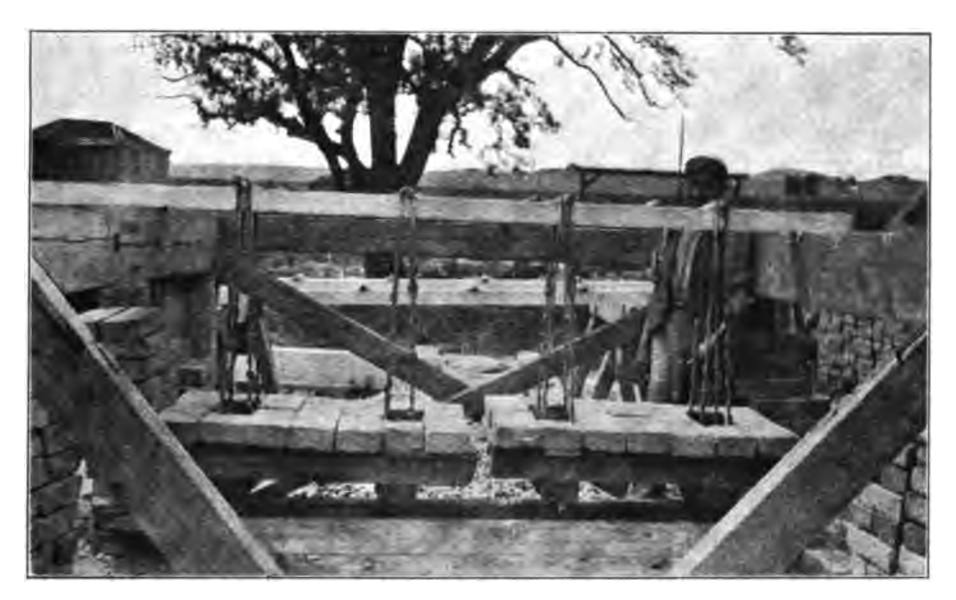


Abb. 1. Ein vollständig „baugemäßer" Belastungsapparat.

diese Weise ermittelte Bruchlast P in kg ergibt bei Einhaltung dieser Abmessungen die gesuchte Druckfestigkeit des Betons genau genug als $\frac{P}{3}$ in kg/cm².

Jedenfalls wurde darauf gesehen, daß alles für die Herstellung der Probekörper und des Belastungsapparates Nötige am Bau selbst zur Verfügung steht und so jedermann jederzeit in der weltfremdesten Gegend hiervon Gebrauch machen kann, ohne weitere besondere Vorbereitungen und andere Hilfsmittel zu benutzen, als sie bei jedem Betrieb vorhanden sein müssen; daß ferner die Herstellung des



Abb. 2. Ein vollständig „baugemäßer" Belastungsapparat nach dem Bruch des Balkens.

Versuches so geringe Kosten bereitet, daß es sich lohnt, ihn auch bei kleinen Objekten auszuführen.

Die Abb. 1 und 2 zeigen derartige ganz baumäßige Versuche, wie sie vom Österr. Eisenbetonausschuß anfangs durchgeführt wurden. Das Herstellen der Balken geschah in gewöhnlichen Holzformen. In den Lastpunkten wurde Rundeisen aufgegipst und daran mittels Stricken die Belastungsbühnen befestigt.

Behufs Einführung dieser Methode ist zur Bequemlichkeit aller Interessenten von dem Spezialbureau für Eisenbeton Dr. F. von Emperger ein Normalapparat entworfen worden.[1] Der Apparat wird hauptsächlich durch seine solide, für eine längere Dauer berechnete Ausführung überall dort Anklang finden, wo ein öfterer Gebrauch der Formen und aller übriger Teile in Frage kommt, und kann überall dort zur Anschaffung empfohlen werden, wo man sich mit den Methoden vertraut machen will. Eine genaue Ausführung kommt bei der Verwendung schon deshalb zu statten, weil die Abmessungen in der folgenden Tabelle in den dort gegebenen Rechnungen eingeführt worden sind und Abweichungen hiervon jeweilig nachgeprüft und neu berechnet werden müßten. Es sei aber ausdrücklich betont, daß die Anwendung der Methode an die in der Folge in Vorschlag gebrachten Abmessungen nicht gebunden und auch die graphische Tabelle so abgefaßt ist, um die Eintragung von M_0 eines jeden Balkenversuches von ganz beliebigen Abmessungen zu gestatten, indem man das Widerstandsmoment desselben

$$W = W_0 \frac{bh^2}{6}$$ setzt und so von b und h ganz unabhängig bleibt.[2]

Es ist dann $M = M_0 \frac{bh^2}{6} = W\sigma = W_0 \frac{bh^2}{6} \sigma$ oder $M_0 = W_0 \sigma$.

3. Beschreibung des Normalapparates.

Dieser ist zur Herstellung von zwei Balkentypen bestimmt, wie sie im beiliegenden Protokoll I und Abb. 3 und 4 im Querschnitt und in allen Einzelheiten dargestellt sind. Der ganze Apparat ist in zwei versandfähige Kisten verpackt, die alles enthalten, was wir zur Vorbereitung und Ausführung des Versuches brauchen.

a) Herstellung der Probebalken.

Die eine Kiste enthält zwei Formen zur gleichzeitigen Herstellung von 4 Balken, ferner 24 Distanzeisen und 1 RE. 12 mm und 2 Griffe als Muster, sowie 2 Kontrollehren. Der Vorgang ist der folgende:

Die Formen werden aufgestellt, gut gefettet damit die Balken leicht aus der Form gehen, in jede Form 1 bis 2 Distanzeisen in der Mitte und

1) Siehe die Preisliste Anhang S. 32.

2) Beton u. Eisen 1907 S. 316.

an jedem Ende ein Griff eingelegt (Abb. 3) und nun mit den Keilen die Seitenteile der Form so angezogen, daß sich für das mittlere Drittel genau 70 mm ergeben. Der Schnitt der Keile ermöglicht ein einfaches Regeln dieser maßgebenden Querschnittsteile. Diese Entfernung wird mit Hilfe der beigegebenen Lehre nachgeprüft. Wenn der Querschnitt so formgemäß vollständig richtig ist, werden je nach der Balkentype 1 oder 2 laut Muster abgebogene RE. 12 mm eingelegt. Diese legen sich in die Kerben der Distanzeisen und Griffe und brauchen wegen der Höhenlage keine weitere Kontrolle. Der Beton wird in derselben Weise und in derselben Qualität wie bei der in Frage stehenden Betonarbeit (bei Decken aus dem Druckgurt) eingebracht und leicht gepracktl.[1] Die gefüllte Form wird dann denselben Temperaturen und Witterungseinflüssen ausgesetzt, wie der verwendete Beton, dessen Kontrolle geliefert werden soll. Die Balken können natürlich nach 2 bis 3 Tagen ausgeformt werden. Zu diesem Zwecke löst man die Keile, hebt die an den Balken haftende Form an einem der Balkengriffe einige Zentimeter vom Boden und prellt durch einige leichte Hammerschläge auf den Steg der Form diese mühelos ab. Die Balken werden an den Griffen aufgehoben und so gelagert, daß sie bloß unter diesen unterstützt sind. Es empfiehlt sich, sie durch eine Bohlendecke gegen zufällige Stöße und dgl., insbesondere Umkehren, zu schützen, obwohl selbst die durch eine solche Behandlung verursachten Risse im Druckgurt in den oben erwähnten Versuchen von Prof. Mörsch keinen Einfluß auf die Bruchspannung ergaben.

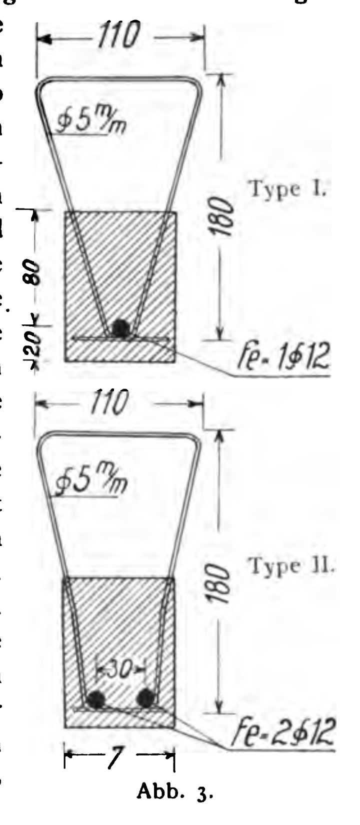


Abb. 3.

b) Versuchsdurchführung.

Die zweite Kiste enthält alle Bestandteile für die Belastungsprobe. Handelt es sich um Qualitätsproben, so soll man immer mindestens zwei, und zwar entweder zwei gleiche oder besser je einen Balken der Type I und II, der Probe unterziehen und das Alter der vier Proben für die vier Balken in zwei regelmäßigen Zeitabständen, z. B. 3 und 6 Wochen, wählen. Falls mehr als zwei Zeitabstände erwünscht sind, so genügen vier Balken nicht, da die zu vergleichenden Balken gleichzeitig aus derselben Mischung hergestellt werden müssen. Bei Versuchen zum Zweck der Ausschalung kann man ökonomischer vorgehen. Man kann nur einen Balken erproben und soll, wenn er nicht entspricht, die

[1] pracken = die Art und Weise wie eine Deckenplatte betoniert wird.

Ausschalung verschieben; wenn er entspricht, sich dies durch einen zweiten Versuch wenigstens bestätigen lassen. Diese Arbeitsweise wird auf den von Dr. v. Emperger geleiteten Bauten eingehalten und hat stets zuverlässige

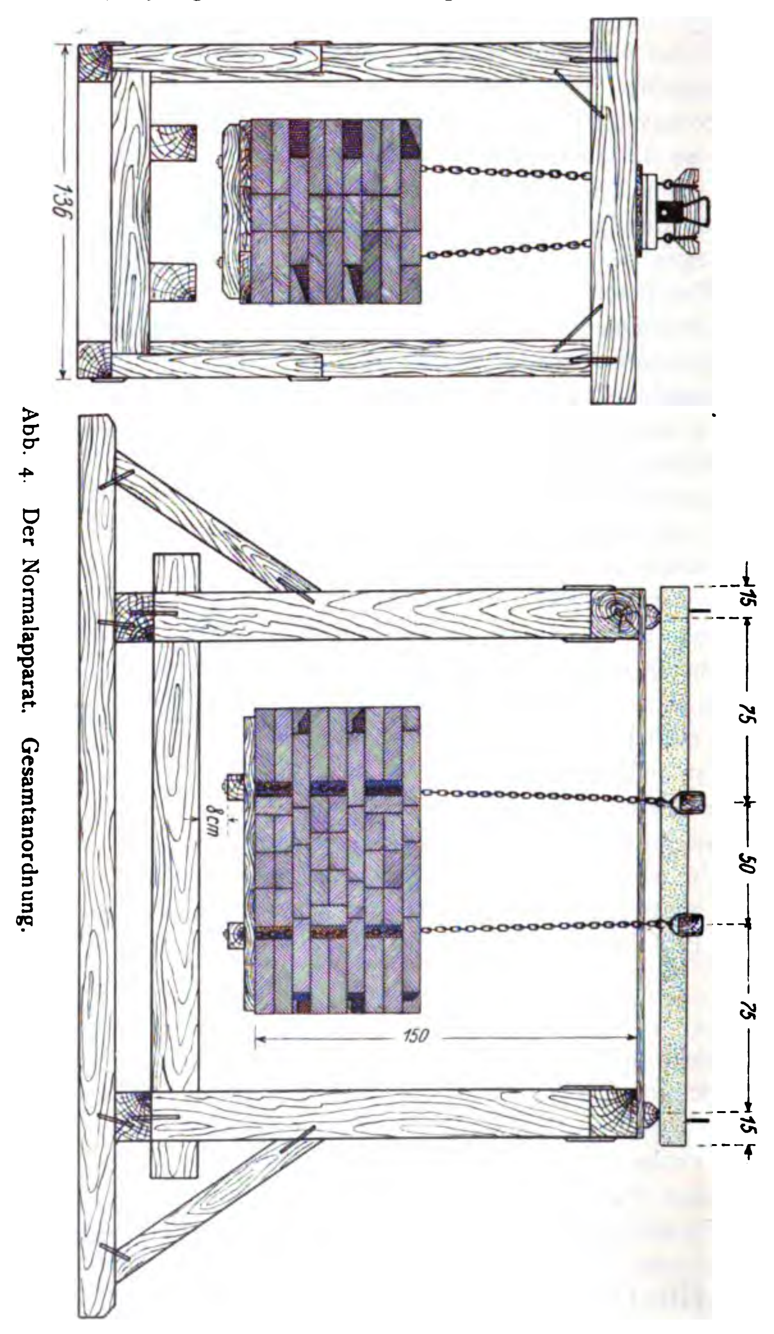


Abb. 4. Der Normalapparat. Gesamtanordnung.

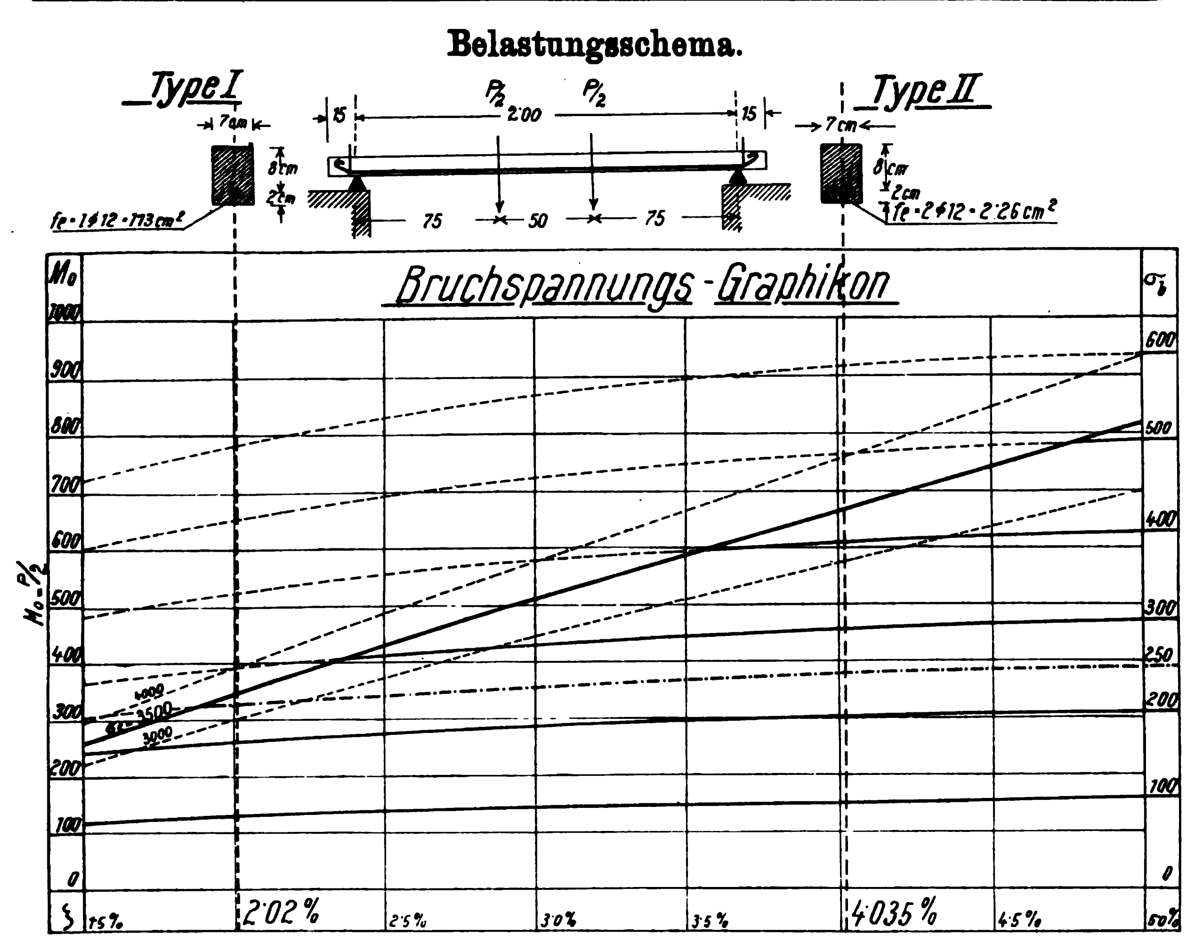
Ergebnisse gezeitigt. Zur Beurteilung der Güte eines Bauteiles ist das Alter maßgebend, bei welchem der Bauteil eine bestimmte Festigkeit haben soll, also insbesondere in der vorgeschriebenen Ausschalungszeit, die z. B. nach

Protokoll

über Biegebruchproben der Kontrollbalken nach Dr. Ing. Fritz von Emperger.

Balkenreihe	1		2		3		4	
Beschaffenheit des Betons								
Betoniert am								
Mittel d. Minimaltemperatur								
Alter in Tagen								
Bewehrungstype	I	II	I	II	I	II	I	II
Gewicht kg: $^2/_3$ des Balkens	21,5	22,6	21,5	22,6	21,5	22,6	21,5	22,6
Gewicht kg: der Belastungsbühne								
Gewicht kg: der Auflast								
Bruchlast P in kg								
$M_0 = 0{,}5022\,P = {}^1/_2\,P$								
$\sigma_{bI} = 0{,}384\,P$ | $\sigma_{bII} = 0.3285\,P$								
$\sigma_{eI} = 5{,}04\,P$ | $\sigma_{eII} = 2{,}65\,P$								

Belastungsschema.



Ort: . . . . am . . . . . 191 . . Der Versuchsausführende:

Bau: . . . .

Berechnung der Auflast in Ziegel.

Mittleres Ziegelgewicht = ... kg.

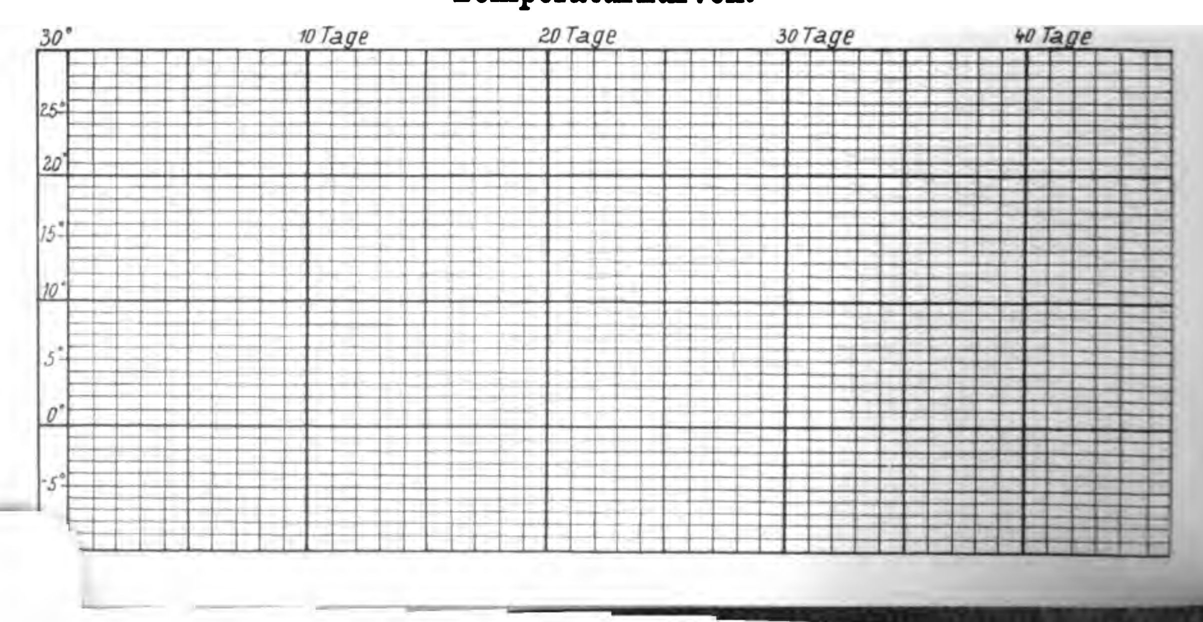
Gewicht von Ziegelscharen zu											
Stück	19	18	17	16							
Gewicht in kg											

Reihe		1		2		3		4	
Type		I	II	I	II	I	II	I	II
Gewichte der Ziegellagen	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								
	8								
	9								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
Auflast									

Normalschicht (19 Stück)

Binderschicht (18 Stück)

Temperaturkurven.



den österreichischen Vorschriften sechs Wochen beträgt, oder entsprechend der Zeit, in der das Tragwerk für eine Probelast reif ist, wie z. B. nach zwei Monaten; sonst, insbesondere bei Fragen, die mit der Ausschalung bei überstandenem Frost u. ä. zusammenhängen, muß der Zeitraum mit dem Alter übereinstimmen, das in dem besonderen Fall untersucht werden soll; es muß daher die Probe am Tage der Ausschalung gemacht und diese, wie früher erwähnt, von dem erzielten Ergebnisse abhängig gemacht werden.

Zur Belastungsprobe enthält die andere Kiste zwei Unterlagen, die auf die Böcke gelegt werden, um die Spannweite von 2 m genau einstellen zu können und ferner einer Belastungsvorrichtung. Dieselbe besteht aus zwei Reitern, vier Ketten und einer Belastungsbühne.

Es sind außerdem noch zwei entsprechend hohe hölzerne Böcke nötig, die etwa in 2 m Entfernung aufgestellt werden. Die ganze Belastungsanordnung zeigt die Abb. 4 in Tätigkeit; die Böcke müssen so hoch sein,

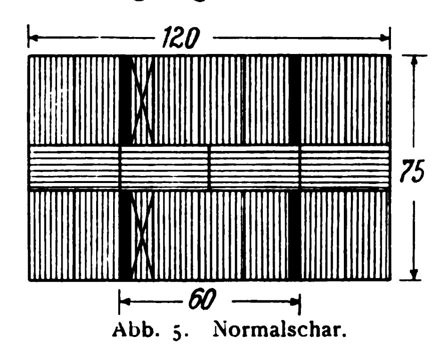
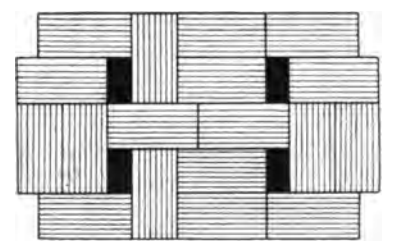


Abb. 5. Normalschar.


Abb. 6. Binderschar.

daß die Lastbühne frei hängt; jedoch so, daß beim Bruch kein zu tiefer Sturz erfolgt (8 cm Luftraum genügt, da die Balken nie über 2 bis 3 cm Durchbiegung aushalten). Zur weiteren Bequemlichkeit des Versuchsleiters empfiehlt es sich, unterhalb des Kontrollbalkens ein Brett (ja nicht einen starren Balken) zu legen, auf den sich der gebrochene Kontrollbalken auflegt und abgenommen werden kann. Der Vorteil dieser Anordnung ist ein doppelter: man verhindert das immerhin für die Arbeiter gefährliche Herabstürzen des Balkens (Abb. 2) und hat überdies Zeit, die Bruchstelle in Augenschein zu nehmen und aus ihrem Aussehen manchen nützlichen Schluß für Bruchursache usw. zu ziehen (z. B. Gestein- oder Mörtelbruch!). Auf diesem Brett läßt sich ein Maßstab anbringen, um die Durchbiegungen einzuschätzen und bei einiger Übung den Eintritt des Bruches anzusagen. Als Belastungsmaterial dienen am besten Ziegel, die in einem bequemen Verband aufzubringen wären (Abb. 5, 6); dies geschieht von zwei Arbeitern streng symmetrisch ruhig und ohne Pausen. Man zählt die Ziegel, bis der Bruch eintritt (s. Protokollformular, Rückseite). Das ermittelte Durchschnittsgewicht eines Ziegels ermöglicht nun, auch die dritte Zeile des Formulars für die Auflast beim Bruch auszufüllen, wobei jedoch die Belastungsart zu berücksichtigen ist (s. das ausgeführte Beispiel in Protokoll 2). Bei

vier Lasten, entsprechend einer gleichförmig verteilten Last (wie in Abb. 1 und in dem Protokoll 2), wäre die Eigenlast der Balken voll einzusetzen, sonst ist diese entsprechend (s. Protokollformular) zu reduzieren. Durch Addition der drei Rubriken für Eigengewicht des Balkens, der Belastungsbühne und der Auflast erhalten wir dann die Bruchlast P. Die Abb. 7 und 8 zeigen den ganzen Apparat in Tätigkeit.

Wir sind somit in die Lage versetzt, rechnerisch die Betondruckspannung zu bestimmen, die genau

bei Type I $\sigma_b = 0{,}384\ P$,
bei Type II $\sigma_b = 0{,}3285\ P$ beträgt.

Als erste Schätzung genügt die Zahl $\frac{P}{3}$ für $\sigma_{b\,II}$; für $\sigma_{b\,I}$ ist $0{,}4\ P$ genauer.

Wir müssen noch erwägen, ob die gefundene Zahl von σ_b auch Bruchursache ist, d. h. ob das Maximum der Druckfestigkeit erreicht wurde oder nicht. Dies ersehen wir, wenn wir uns auch σ_e berechnen, oder einfacher und übersichtlicher, indem wir $M_0 = \frac{P}{2}$ in das darunter stehende Graphikon im Protokollformular eintragen (s. hierzu noch das Beispiel in Protokoll 2). Wie das Graphikon recht übersichtlich zeigt, kann man mit der Type I Betonfestigkeiten bis etwa 265 kg/qcm nachweisen. Wenn man die geforderte Minimaldruckfestigkeit mit 250 kg/qcm begrenzt, so würde für die Praxis diese Type I allein ausreichen. Bei höheren Eisenspannungen spielt aber schon die Eisendehnung eine Rolle, und daher empfiehlt es sich, bei besseren Betonsorten zu der vierprozentigen Type II zu greifen, wenn auch eine schwächer bewehrte Art dem Praktiker „als mehr verwandt seiner Ausführung" sympathischer erscheinen mag. Die Haftspannung steht in allen diesen Fällen außer Betracht. Bei einer gründlichen und wissenschaftlichen Behandlung dieser Frage wird es sich empfehlen, immer beide Typen zu verwenden; ebenso wird der Anfänger wie auch der Eingeweihte, wenn er ein ihm neues Material untersucht, von beiden Typen Gebrauch machen. Der Praktiker, der sein Material bereits kennt, wird später in die Lage versetzt sein, die eine oder die andere Balkentype fallen zu lassen und nur mit einer weiterzuarbeiten.

Die Type II wird sich hierzu überall dort empfehlen, wo man nicht nur die Minimalfestigkeit, sondern auch die höheren Werte der Materialfestigkeit als Qualitätsprobe nachweisen will. Die volle Ausnutzung derselben gibt Werte für σ_b bis etwa 440 kg/qcm. Diese sehr hohen, leider für die Praxis derzeit eigentlich schon belanglosen Werte einer **elffachen Sicherheit** gegenüber der heute erlaubten größten Ausnutzung des Betons auf Druck erhält man bei wachsendem Alter und sehr gutem Material. Sollte sich das Bedürfnis geltend machen, noch weitere Festigkeiten zu ermitteln, so kann man einfach zu höheren Bewehrungsprozenten greifen.

Was die **Empfindlichkeit des Profiles** gegen Verschiebungen der Einlagen bei der Betonierung nach auf- oder abwärts innerhalb der Querschnitts-



Abb. 7. Modellapparat.



Abb. 8. Kontrollbalken (IV Stock, betoniert am 19. Okt., gebrochen am 10. Nov. 1910).
Nach dem Bruch.

abmessungen der Balken anbelangt, so kann diese mit 2 mm als immerhin möglich nach jeder Seite bezeichnet werden. Es beträgt in diesen Grenzen, die nach unserer Erfahrung bei einiger Sorgfalt leicht einzuhalten sind, die Spannungsschwankung für eine Höhendifferenz $\triangle h = \pm 1$ mm:

$$\left.\begin{array}{l}\text{bei Type I etwa } \mp 9\,^0/_{00} \text{ von } P \\ \text{bei Type II etwa } \mp 8\,^0/_{00} \;\;,, \;\; P\end{array}\right\} \text{oder rund } \mp \mathbf{2{,}4}\,\% \text{ \textbf{von} } \sigma_b.$$

Für eine Breitendifferenz von $\mp \triangle b = 1$ mm:

$$\left.\begin{array}{l}\text{bei Type I etwa } \mp 4\,^0/_{00} \text{ von } P \\ \text{bei Type II etwa } \mp 4\,^0/_{00} \;\;,, \;\; P\end{array}\right\} \text{oder rund } \mp \mathbf{1{,}1}\,\% \text{ \textbf{von} } \sigma_b.$$

Diese hier angegebenen Werte machen natürlich keinen Anspruch auf absolute Genauigkeit, sondern sind **abgerundete** Näherungswerte; doch sind sie für die Praxis genügend genau und kommen hauptsächlich zur Beurteilung der Bedeutung der Fehlerquellen in Frage. Kleine Schwankungen des Eisenquerschnittes, wie sie bei dem im Handel erhältlichen Eisen vorkommen, haben auf die Ergebnisse keinen maßgebenden Einfluß.

Zum besseren Verständnis der Frage, wann ein Bruch mit Erschöpfung der Druckfestigkeit eintreten kann und wann nicht, diene die folgende theoretische Ableitung.

4. Theorie der Biegungsspannungen beim Bruch.

Nach einer zuerst[1] von Dr. Ing. Fritz von Emperger aufgestellten Theorie kommen für die Tragfähigkeit der Verbundkörper fast nie ihre beiden Grenzfestigkeiten gleichzeitig in Frage, sondern nur entweder die Zugfestigkeit des Eisens σ_e oder die Druckfestigkeit des Betons σ_b oder die Überschreitungen in der Verbundfestigkeit K. Für diese Sache gibt das Graphikon eine übersichtliche Darstellung, die sich folgendermaßen ableitet.

Das Bruchmoment im Balken vom Querschnitt $F_b = b\,h$, bewehrt mit F_e, also mit Bewehrungsprozentsatz von

$$\zeta = \frac{F_e}{b\,h} = \frac{f_e}{h}$$

bezeichnen wir mit $M = M_0 \dfrac{b\,h^2}{6} = \dfrac{J_e}{h-x}\,\sigma_e = \dfrac{J_b}{x}\,\sigma_b$

und $$\frac{J_b}{x} = W_b = W_{b0} \cdot \frac{bh^2}{6}.$$

Es ist $W_e = \dfrac{J_e}{h-x} = F_e\left(h - \dfrac{x}{3}\right) = \zeta\,b\,h\left(h - \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{bh^2}{6} W_{e0}$ und daher

$$M = M_0 \frac{b\,h^2}{6} = \zeta\,b\,h^2 \left[1 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{n\,\zeta\,(n\,\zeta + 2)} + n\zeta\right)\right]\sigma_e = W_e \sigma_e.$$

1) Zeitschrift des Österr. Ing.- u. Arch.-Vereines 1897.

Es ist daher weiter $M_0 = \sigma\ \zeta [6 - 2$

oder $\sigma_e = \frac{}{\zeta [6 - 2}$

D. h. also das Bruchmoment ist ei

Das gleiche läßt sich auch n

$M_0 = \sigma_b [3 - \sqrt{n \zeta (n \zeta}$

oder $\sigma_b = \frac{}{[3 - \sqrt{n \zeta (n \zeta + 2}}$

Wählen wir zur graphischen Darstel Ordinaten, so entsprechen bestimn scharen mit gleichem Ursprung, aber sind für die Werte $\sigma_b = 100$, 200 u $\sigma_e = 3000$, 3500 und 4000 in dem Jedem beliebigen Balken mit der Be $M_b = \frac{6\ M}{b\ h^2}$, welches als Ordinate mit fixiert. Aus seiner Lage lasse spannungen σ_b und σ_e unmittell

Die Zugfestigkeit des Eisens behandeln. Es ist daher im Graphik Linie von 3500 kg/qcm besonders he liche Steigerung der Tragfähigkeit ül geschlossen. Ein tatsächliches Ine Eisens ist in den seltensten Fällen l dann nur abhängig von Fehlern im das Eisen in der Nähe seiner Zuggr und durch seine große Dehnbarkeit, freilich als sekundäre Erscheinung ze entsprechende Verschiebung der n daher ganz bedeutend wachsenden D ist.[1] Das Eintreten der Eisenzuggre ermitteln, und es bedarf eines beso Bruchbild zu ersehen. Nur wenn di erreicht wird, tritt bei entsprechenc Einschränkung der Tragfähigkeit ein, welche mit der Druckfestigkeit des zeichnet ist. Damit das Graphi gebraucht werden kann, ist das moment M und das Widerstandsmo zogen worden, welches von den Ab unabhängig ist.

Für unseren Fall sind die A

---

1) Siehe Versuche Suenson.

$$M_0 = \frac{6\,M}{b\,h^2} = \frac{P}{2} \text{ ist.}$$

Wenn wir also bei einem der Balken die Bruchlast ermittelt haben, so werden wir

für Type I bei $\zeta = 2{,}02\ \%$,
für Type II bei $\zeta = 4{,}04\ \%$

die Größe $\frac{P}{2}$ auftragen und gleichzeitig nach der Verschneidung der beiden Kurvenscharen die Größen σ_b und σ_e wissen. Erreicht die Größe $\frac{P}{2}$ die Kurven des Eisens für $\sigma_e = 3500$ kg/qcm vollständig oder beinahe, so ist der Bruch vom Eisen abhängig, und wir wissen nicht, ob die Druckfestigkeit des Betons erschöpft worden ist oder nicht.

Erreicht aber diese Ordinate die Eisenkurve nicht, so rührt der Bruch von der Erschöpfung der Druckfestigkeit des Betons her und unsere Probe ergibt uns diese, sei es rechnerisch, sei es aus dem Graphikon durch Schätzung.

5. Ein Beispiel der Anwendung der Güteprobe in der Praxis.

(Siehe hierzu das ausgefüllte Protokoll Nr. 2.)

Wie bereits früher erwähnt, ist längere Zeit hindurch mit dem in Protokoll Nr. 2 skizzierten Schema von 4 Lasten $\left(M = \frac{Pl}{8} = 25\,P\right)$ gearbeitet worden. Erst später ist man wieder auf die von Dr. v. Emperger bei seinen Versuchen 1905 bis 1907 eingehaltene Vorrichtung aus Gründen der Einfachheit bei dem Versuche zurückgegangen, welche mit der auf diese Weise nötigen Reduktion des Eigengewichts — eine einfache aus dem Protokollformular ersichtliche Änderung (vgl. ausgeführtes Protokoll) — wohl nicht zu teuer bezahlt ist. Hier sind absichtlich beide Formen der Belastung in beiden Protokollen und Lichtbildern zur Darstellung gebracht, um zu zeigen, daß der Ingenieur auch in dieser Hinsicht vollständig unabhängig wählen kann. Natürlich darf nicht übersehen werden, daß sich in jedem Fall die Rechnung ändert und daher andere Werte der Koeffizienten sich einstellen. Von der so günstig aussehenden Verwendung einer Mittellast oder doch zweier möglichst nahe aneinander liegender Mittellasten wurde Abstand genommen, da die Stelle des maximalen Momentes nicht durch Auflasten beeinflußt werden soll. Wir sind daher bei der Lastentfernung von 50 cm geblieben.

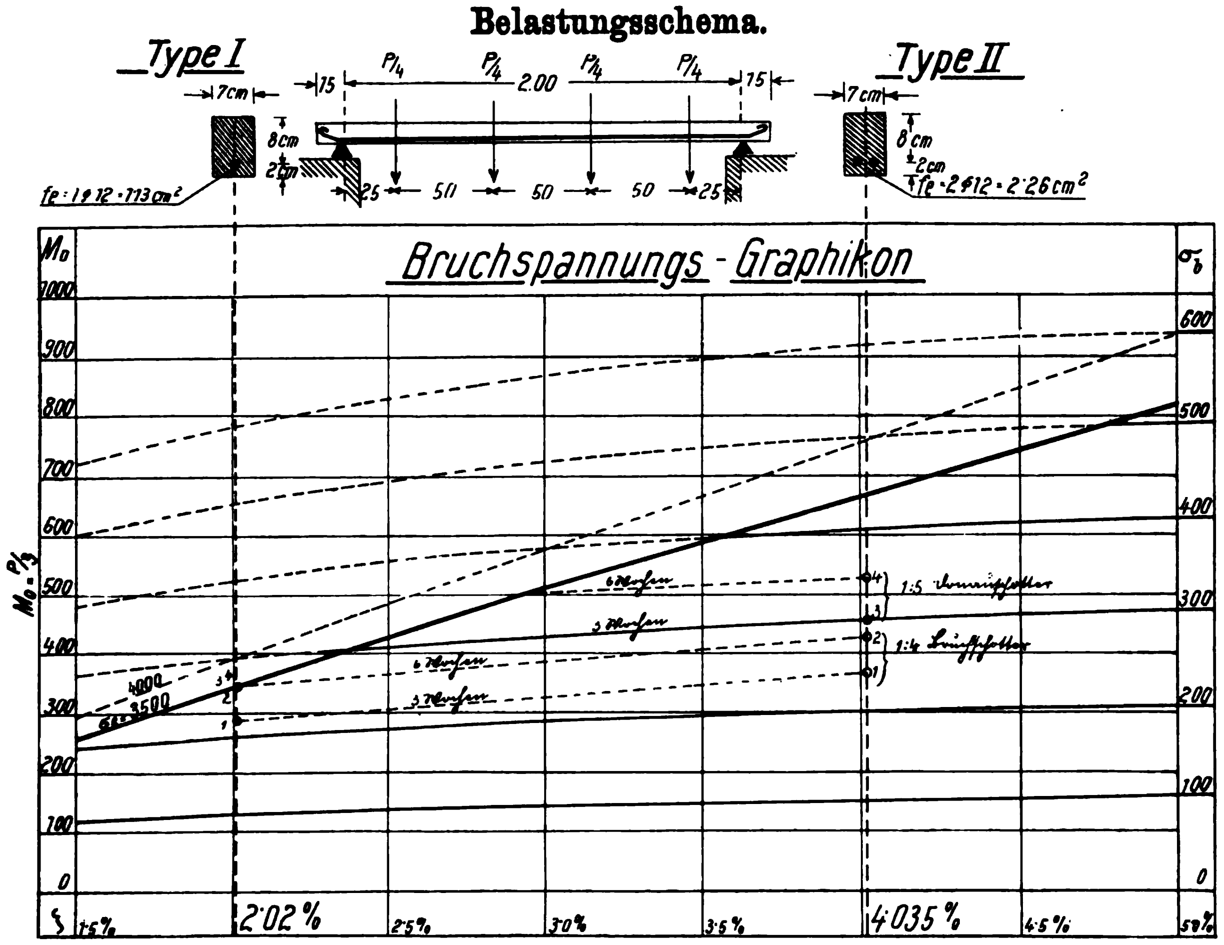
Das hier angeführte Beispiel hatte die Frage zu entscheiden, welcher Schotter bei einem wichtigen Hochbau zu verwenden war. Zur Wahl stand ein von maßgebender Seite empfohlener Maschinenbruchschotter (Reihe 1 und 2) und das Donaubaggergut (Reihe 3 u. 4), wie es in Wien billig erhält-

Protokoll Nr. 2

über Biegebruchproben der Kontrollbalken nach Dr. Ing. Fritz von Emperger.

	Balkenreihe	1		2		3		4	
	Beschaffenheit des Betons	350 kg auf 1 m³ Gemenge Bruchschotter		dsgl.		280 kg auf 1 m³ Gem. 3 Tle. Donauschotter 1 Tl. gebrochen		dsgl.	
	Betoniert am	16. Juli 1910		dsgl.		20. Aug. 1910		dsgl.	
	Witterungsangaben	kühl, regnerisch		dsgl.		kühl, regnerisch		dsgl.	
	Alter in Tagen	21		62		21		62	
	Bewehrungstype	I	II	I	II	I	II	I	II
Gewicht kg	des Balkens	32,16	33,92	32,16	33,92	32,16	33,92	32,16	33,92
	der Belastungsbühne	65,20	65,20	65,20	65,20	65,20	65,20	65,20	65,20
	Auflast in Ziegeln zu 4,3 kg	756,14	1005,00	920,00	920,00	933,04	1265,00	937,44	1480,00
	Bruchlast P in kg	853,50	1104,12	1017,36	1279,12	1030,40	1364,12	1034,80	1579,12
	$M_0 = 0{,}334\,P = \frac{P}{3}$	284,50	368,04	339,12	426,37	343,47	454,71	344,60	526,37
$\sigma_{bI} = 0{,}256\,P$	$\sigma_{bII} = 0{,}219\,P$	218,20	241,80	258,00?	279,83	264,00	298,60	264,40	345,80
$\sigma_{eI} = 3{,}360\,P$	$\sigma_{eII} = 1{,}768\,P$	2860	1950	3420?	2260	3460	2410	3465	2790

Belastungsschema.



Ort: Wien, am 5. Oktober 1910.

Bau: N. N.

Der Versuchsausführende:

Ing. G. Neumann.

lich ist und bei dem nur $^1/_4$ gebrochen wurde, um das fehlende Mittelkorn zu ersetzen.

Der Bauherr, der nur erstklassiges Material verwenden wollte, war, der allgemeinen Ansicht von den bedeutenden Vorzügen des scharfkantigen Bruchschotters folgend, sehr geneigt, diesen zu verwenden, obwohl er infolge der Bahnfracht bedeutend teuerer war als das Baggergut. Auf den Rat Dr. v. Empergers wurden die Versuche als Kalkulationsbehelf angestellt.

Die ersten Resultate ergaben ein so überraschendes Übergewicht des billigen und daher für schlecht angesehenen Materials, daß man zunächst die Sache so fortsetzte, daß man den Bruchschotter 1 : 4 mit einer Mischung 1 : 5 aus dem Donauschotter verglich und zuletzt sogar den gebrochenen Schotter wegließ. In dem beiliegenden Protokoll sind vier solche Versuchsreihen mit zwei Materialien vorgeführt. In beiden Fällen, d. i. in drei und in sechs Wochen, zeigt der Donauschotter um etwa 25% bessere Ergebnisse. Dabei sind die anderen Versuche keineswegs schlechte. Wir sehen aus dem ausgefüllten Protokoll, daß von dem Typus I bei 2,02% Eisen nur der Versuch Nr. 1 einen Bruch anzeigt, der zweifelsohne auf den Beton sich zurückführen läßt. Bei dem Versuch Nr. 2 (Bruchschotter sechs Wochen) ist dies auch ersichtlich. Die übrigen zwei (Donauschotter drei und sechs Wochen) erreichen bereits die Eisengrenze. Wir ersehen aus diesem Beispiel, wie irreführend es ist, bei der Gleichheit der Ergebnisse der Probebalken Nr. 2, 3 u. 4 auf eine gleiche Qualität Beton schließen zu wollen. Es scheint hier ebenso wie bei den späterhin erwähnten Versuchen von C. Bach der Quetschsand, vielleicht der dabei vorhandene Staub, an dem Abfall der Festigkeit schuld zu sein.

Dieses Beispiel zeigt auch, wie man ökonomisch arbeiten soll:

Die Bauleitung verlangt eine gewisse Betonfestigkeit, anstatt, wie heute üblich, das Mischungsverhältnis vorzuschreiben.

Der Unternehmer hätte nun vor dem Angebot die dieser Festigkeit entsprechende Mischungsart der Zuschlagstoffe festzustellen, wenn diese nicht bereits einmal anderweitig ermittelt wurde oder bekannt ist, oder aber die Mindestfestigkeitziffer anzugeben, welche er bei normaler Witterung nach 4 Wochen garantiert.

Um nun eine Kontrolle für die Güte des Betons zu haben, kann die Bauleitung zwei Wege einschlagen:

1. Sie kann das auf Grund der Vorversuche ausbedungene Material-Mischungsverhältnis und den Mischvorgang nachprüfen, wie das heute üblich ist.
2. Sie kann aber auch durch Entnahme von Proben zu Kontrollbalken alle anderen sonst nicht kontrollierbaren Einflüsse von Verarbeitung und Temperatur u. dgl. überprüfen und daraus ihre Schlüsse ziehen.

---

6. Die amtlichen Vorschriften über Betongüte.

Zur Bestimmung der Güte von Beton dient heute in erster Linie das „Mischungsverhältnis". Je mehr Zement, desto besser! gilt als Parole. Diese Anschauung läßt sich auf jene Zeit zurückführen, wo überhaupt nur Zugproben für die Qualität maßgebend angesehen wurden.

Bezüglich der Druckfestigkeit enthalten die Vorschriften folgende Bestimmungen:

Die preußischen Vorschriften vom 24. Mai 1907 sagen:

§ 16 Abs. 1. Bei den auf Biegung beanspruchten Bauteilen soll die Druckspannung des Betons den sechsten Teil seiner Druckfestigkeit nicht übersteigen.

Es wird diese Vorschrift immer auf die Würfelfestigkeit bezogen, obzwar dies nicht ausdrücklich gesagt und nicht wahrscheinlich ist.

Sie sagt in bezug hierauf:

§ 1 Abs. 2. In der Beschreibung ist der Ursprung und die Beschaffenheit der Baustoffe, ihr Mischungsverhältnis, der Wasserzusatz sowie die Druckfestigkeit, die der zu verwendende Beton aus den auf der Baustelle zu entnehmenden Baustoffen in dem vorgesehenen Mischungsverhältnis nach 28 Tagen in Würfelkörpern von 30 cm Seitenlänge erreichen soll, anzugeben. Die Druckfestigkeit ist auf Erfordern der Baupolizeibehörde vor dem Beginn durch Versuche nachzuweisen.

Die geforderte Sicherheit auf Biegungsdruck ist demnach

$$1{,}6 \times 6 = 9{,}6,$$

also oft eine nahezu 10fache!! Ein solcher Balken müßte nach 4 Wochen eine Betonfestigkeit von $9{,}6 \times 40 = 384$ kg/qcm besitzen, was offenbar unmöglich ist.

Die schweizerischen Vorschriften vom Juni 1909 verlangen nach 4 Wochen 150 oder 200 kg/qcm Würfelfestigkeit, je nachdem der Beton plastisch oder erdfeucht (gestampft) hergestellt wird. Bei Eisenbeton kommt nur plastischer Beton in Frage. Die geforderte Biegungsdruckfestigkeit beträgt daher

$$1{,}6 \times 150 = 240 \text{ kg/qcm}.$$

ein leichter erreichbarer Wert.

Die österreichischen Regierungsvorschriften vom November 1907 bestimmen:

§ 9 Abs. 8. Der Beton muß nach sechswöchiger Erhärtung an der Luft mindestens folgende Werte der Druckfestigkeit und zwar senkrecht zur Stampfrichtung aufweisen.

Bei einem Mischungsverhältnis auf 1 ccm von Sand und Schotter

			Würfelfestigkeit
470 kg	Portlandzement	(1 : 3) . . .	170 kg/qcm
350 „	„	(1 : 4) . . .	150 „
280 „	„	(1 : 5) . . .	130 „
230 „	„	(1 : 6) . . .	110 „

Der Österr. Beton-Verein Wien, der seine Angaben auf Zement in kg/m³ fertigen Beton bezieht, schreibt vor:

	Mindestwürfelfestigkeit nach 6 Wochen	äquivalent (1,6) auf Biegung
mit 300 kg Zement	115 kg/qcm	184 kg/qcm
„ 400 „ „	140 „	224 „
„ 500 „ „	157 „	261 „
und mehr „	210 „	336 „

Um die Mischungsverhältnisse in obigen beiden österr. Vorschriften zu vergleichen, muß man bei den ersteren etwa 20 % zuschlagen, da etwa 1,2 m³ Gemenge 1 m³ Beton geben. Es weichen also beide Vorschriften nicht wesentlich voneinander ab. In allen Umrechnungen ist die Biegungsdruckfestigkeit = 1,6 Würfelfestigkeit gesetzt, und man gelangt so zu Ziffern, die ohne Bedenken anwendbar erscheinen. Beim Vergleich mit den vorangehenden deutschen und schweizerischen Vorschriften darf man nicht vergessen, daß sich diese Zahlen auf 6 Wochen beziehen. Die geforderten Bruchfestigkeiten stimmen mit unseren Versuchen soweit überein, daß man wohl annehmen darf, daß bei den deutschen Vorschriften der Unterschied zwischen reinem Druck und Biegung nicht berücksichtigt wurde, denn die geforderten Druckfestigkeiten sind nahezu 1,6 mal größer als anderswo; dabei darf nicht übersehen werden, daß alle diese Vorschriften über das Mischungsverhältnis und die dem zugeordneten Festigkeiten Faustregeln sind. Man versucht mit dem Mischungsverhältnis eine gewisse Güte festzulegen, trotzdem man weiß, daß diese davon nicht allein abhängt, ja sogar — wie dies durch Vergleich der Ziffern mit den Ergebnissen von C. v. Bach ersichtlich ist — mit den vorgeschriebenen Mischungen gewisser Materiale gar nicht erreichbar ist.

Läßt sich die Festigkeit des Betons in so einfacher Weise wie durch die vorstehend beschriebenen Versuche nachweisen, dann braucht man überhaupt nichts, als die Druckfestigkeit vorzuschreiben, und es ist Sache des Unternehmers, wie er sich die vorgeschriebene Güte des Betons sichert. Dann wäre die in den Schweizer Vorschriften gewählte Form nachzuahmen, jedoch nicht in so allgemeiner Form, sondern mit Berücksichtigung der örtlichen Verhältnisse. Bei Eisenbetonbauten mit dem in Wien zur Verfügung stehenden Material kann der Beton eine Druckfestigkeit auf Biegung von 250 kg/qcm in 6 Wochen leicht erreichen. In diesem Falle bricht die Balkentype I bei der Eisengrenze. Es ist dies eine Forderung, der in dem gewählten Beispiel auch die mindere Sorte Schotter bei 6 Wochen Alter entsprochen haben würde.

Daß man sie aber nicht allgemein, ohne Rücksicht auf das Zuschlagmaterial fordern darf, wie das bisher üblich war, indem man einfach nach dem Mischungsverhältnis urteilte, beweisen die angeführten Versuche von C. v. Bach zur Genüge.

Mit dem Balken Type I lassen sich Betondruckfestigkeiten bis 265 kg/qcm und Type II bis 440 kg/qcm nachweisen. Für eine höchste zulässige Spannung von 40 kg/qcm käme selbst bei 4facher Sicherheit im Eisen nur eine Druckfestigkeit von 160 kg/qcm in Frage. Höhere Ziffern haben nur den Wert von Qualitätszahlen. Bei den heute üblichen und vorgeschriebenen, d. h. aus anderen Gründen auch nötigen Mischungen läßt sich ganz allgemein fordern, daß bis zum Ausschalen der Haupttragwerke die 4fache Ziffer der für zulässig erklärten Druckfestigkeit auf Biegung sich ergibt. Die gleiche Forderung wäre entsprechend ermäßigt auch bei der Ausschalung der Zwischenträger zu stellen, oder es wäre letztere so lange zu verschieben, bis die 3fache Sicherheit da ist.

In sinngemäßer Abänderung der Vorschriften des Österreichischen Beton-Vereins über Würfelproben müßte es dort in § 9 Abs. 12 heißen:

„Bei regelmäßigem Verlauf der Bauarbeit sind von je 100 m³ Beton mindestens 4 Probebalken zu entnehmen und vor der Ausschalung von Decken, sonst in Abständen von 3 und 6 Wochen zu untersuchen. Diese Untersuchung ist bei jeder in der Betonherstellung nachgewiesenen Unregelmäßigkeit, sowie ganz besonders bei eintretendem Frost angefangen von Temperaturen unter + 5° C zu wiederholen, oder genügend häufig zu machen, daß man für bei niedrigeren Temperaturen abbindenden Deckenteile Proben zur Beurteilung der Güte des dort verwendeten Betons vor seiner Ausschalung besitzt. Diese Proben sind durch Zettel an den Balkengriffen deutlich zu bezeichnen."

Bei Beton aus den in Wien zur Verfügung stehenden Zuschlagstoffen (Donauschotter) ist nach 4 Wochen die im Graphikon besonders gekennzeichnete Grenze von 200 kg/qcm erreichbar und selbst die schlechtesten Werte sollten nicht mehr als 20 % darunter liegen.

Außerdem wären die Vorschriften über das Ausschalen sinngemäß zu ändern:

„Jedes Tragwerk kann nach dem Erreichen der erwähnten Minimalfestigkeit ausgeschalt werden, als welche 160 kg/qcm in Frage kommen, wenn mit 40 kg/qcm als Maximalbeanspruchung gerechnet wurde, sonst aber der **4fache Wert jener Spannung** in Betracht kommt, die sich **bei voller Last** rechnungsmäßig ergibt."

Auf diese Weise kommt man bei gutem Bauwetter, als welches Temperaturen über 5°C anzusehen sind, von 4—6 Wochen der jetzt vorgeschriebenen Ausschalungszeit auf Werte von etwa 1 Woche. Was das für Ersparnisse für jeden Eisenbetonbau bedeutet, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung.

Zeitkurve der Druckfestigkeit.

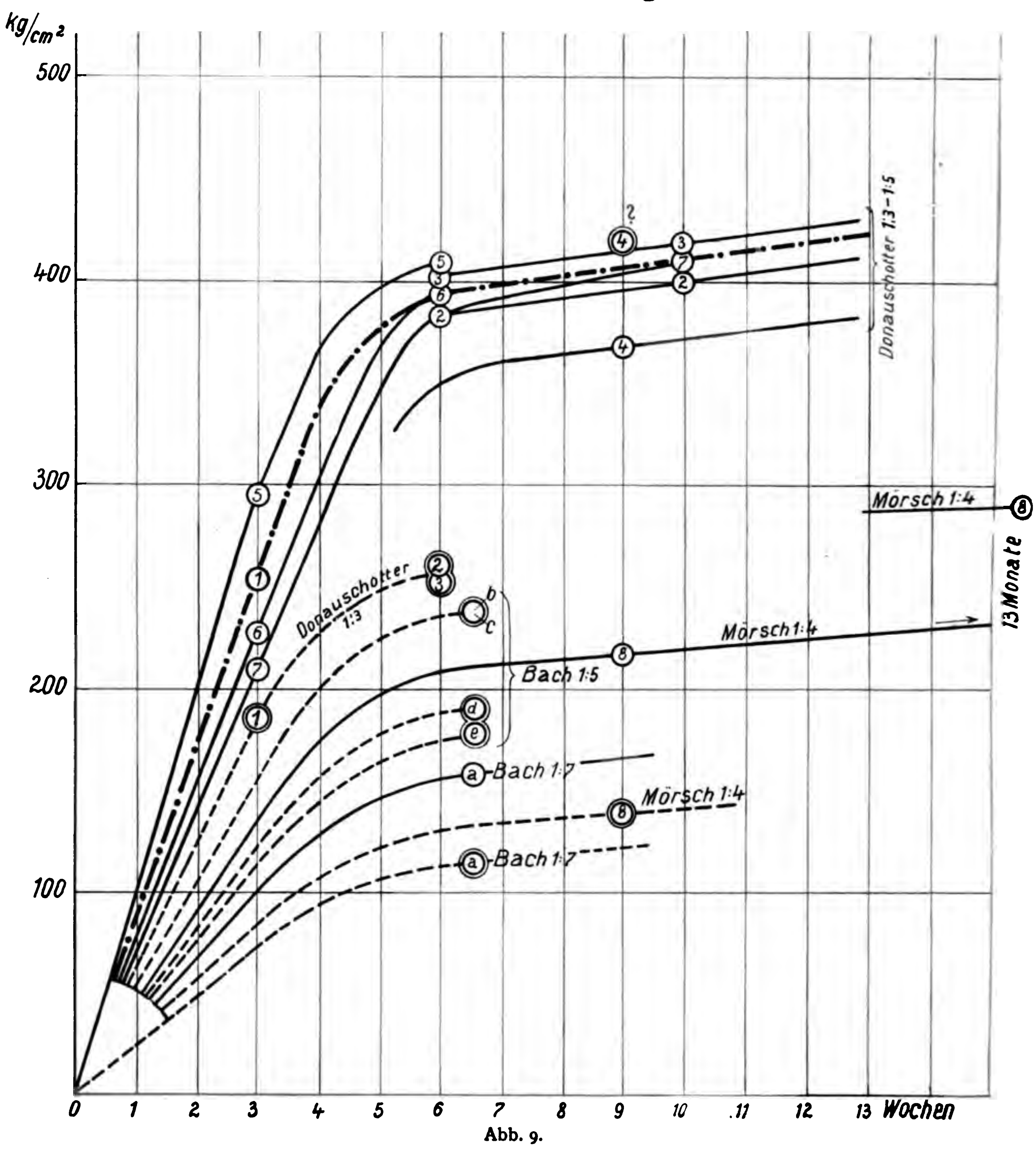


Abb. 9.

Zeiche

———○——— Biegungsdruckfestigkei

---◎--- Würfelfestigkeit (s).

—·—·—·— Mittlere Biegungsd
schotter.

1. Wie

① ① bet. am 8. Juni
② ② „ „ 13. Juni
③ ③ „ „ 17. Juni
④ ④ „ „ 1. Okt.
} 1 : 4, Donauki

⑤ ⑥ ⑦ } Mittelwerte einzelner Versuchsreihe
I

2. Versuche v

⑧ ⑧ Mittelwert der 3,4% Reihe, 1 : 4

3. Versuch

α) nach Heft 91 Z

ⓐ ⓐ 1 Zement : 3 Rheinsand : 4 Rheinl

β) nach Heft

ⓑ 1 Zement : 2 Dresdener Grubensand

ⓒ 1 Zement : 2 Rheinsand : 3 Basaltmas

ⓓ 1 Zement : 2 Kalksteinquetschsand :

ⓔ 1 Zement : 2 Basaltquetschsand : 3 B

7. Auswertung von Versuchsergebnissen.

(Abb. 9.)

In dem beigefügten Graphikon sind die mit der Zeit erreichbaren Druckfestigkeiten verschiedener Betonarten dargestellt; eingetragen sind sowohl die Ergebnisse des Biegungsdruckes wie der Würfelfestigkeit. Es ist versucht worden, aus den Versuchen über Biegungsdruck mit den Wiener Materialien an verschiedenen Baustellen eine zusammenhängende Kurve zu konstruieren. Es zeigen die Ergebnisse trotz der nicht unbedeutenden Abweichungen in der Zusammensetzung des Donauschotters eine schöne Übereinstimmung. Jedenfalls sind die Abweichungen, welche man mit genau derselben Qualität, jedoch mit anderen Außentemperaturen erzielen kann, viel größer als bei einer Änderung im Mischungsverhältnis selbst, wenn diese Außentemperaturen nach landläufigen Begriffen nur um ein Geringes abweichen. Wie bereits eingangs erwähnt, ist es nicht angängig, die Druckfestigkeit des Betons in der bisher üblichen Weise als einzig und allein vom Mischungsverhältnis abhängig hinzustellen. Es ist vielmehr nötig, jeweilig die Ziffer zu bestimmen, welche mit den vorhandenen oder mit den vorgeschriebenen Zuschlagstoffen und normalen Außentemperaturen erreichbar ist, sofern dies nicht, wie schließlich bei jeder Hauptstadt mit ihrer ausgebreiteten Bautätigkeit allgemein bekannt ist und ein für allemal bestimmt wurde.

Um die Unterschiede zu kennzeichnen, welche in bezug hierauf bestehen, wenn zur Bereitung des Betons unter sonst gleichen Verhältnissen verschiedene Zuschlagstoffe genommen werden, dient die Abb. 9.

Hier findet man eine Reihe anderer Versuche mit verschiedenen Materialien dargestellt. Zunächst die älteren Versuche von Prof. Mörsch[1] und die jüngsten Versuche dieser Art von Prof. C. v. Bach[2]. Auch diese sind in der Weise dargestellt, daß die Ergebnisse der Biegungsdruckfestigkeit in einer Kurve zusammengefaßt wurden, während die zugehörigen Würfelfestigkeiten an der ihrem Alter entsprechenden Stelle eingetragen sind. Der Unterschied zwischen dem Verlauf der Kurven, ihre Abstufung, abhängig von Materialien und ihrer Mischung, ist in die Augen springend. Dabei kommt freilich in Betracht, daß die Wiener Versuche im Mischungsverhältnisse 1 : 3 bis 1 : 5 waren, während man in Stuttgart die Mischung 1 : 3 : 4 eingehalten hat. Die Versuche von Mörsch waren dagegen im Verhältnis 1 : 4 hergestellt und weisen dennoch eine bedeutende Differenz auf, die sich auch nach Jahresfrist noch erhält. Hier können wohl nur die Zuschlagstoffe von solchem Einfluß gewesen sein. Zur Bestätigung der Richtigkeit der Wiener Versuche sind noch weitere Würfelversuche von C. v. Bach[3] herangezogen, welche mit verschiedenen Sandarten und Zuschlagstoffen,

---

1) S. Mörsch, Der Eisenbetonbau. 3. Aufl. S. 97.
2) Heft 90, 91 Mitt. über Forschungsarbeiten.
3) Ebenda Heft 72—74.

aber mit der gleichen Mischung 1
vorgenommen worden sind, um d
stimmen. Wir wollen aus den ge
vorheben. Die Würfelfestigkeit be

1 Zement, 2 Dresdener Grubens

1 : 2 : 3 = Zement : Rheinsand : l

Ein neues Versuchspaar dies

1 Zement, 2 Basaltquetschsand, :

1 : 2 : 3 = Zement : Kalksteinq

gibt eine ziemliche Sicherheit zu d
einen großen Teil des Abfalles an F

Wir sehen, daß die genaue Ar
nur für dieselbe Mischung nahezu
mit dem Donaukies erzielt haben,
dem Gebrauch von Quetschsand wie
wir dies gleich direkt am Bau ohne
eine Genauigkeit erzielt, wie sie bei
gart möglich ist. Daß dies andersw
der folgende, durch amtliche Zeug
Kurve der Wiener Biegedruckfestigke
Versuchen. Jedoch war nur bei vier
durch Parallelversuche auch die Wü
Mischungen wurden mit Sorgfalt glei
druckfestigkeiten haben sich kleine
ergeben, welche beim Beton derselbe
gemachten Erfahrungen nie mehr als 5
beim jungen Beton (3—6 Wochen alt)

Vergleichen wir sämtliche b
Wochen-Beton (siehe Graphikon), so
Versuchsreihenmittels mit rd. 7—8
eingetreten. Alle diese Differenzen
ganz unbeachteten Abweichungen i
vielleicht auch Wassermenge zurückzu
die örtlichen Verhältnisse der B
fluß läßt sich mit einiger Übung aus

Ganz analoge Ergebnisse h
erzielt; ein Beweis, daß diese Zahlen
geben dürften.

Ganz anders sieht es mit den
und 3. Reihe gehörenden Würfelprob
Quotient aus Biegungsdruck und Wü

$$\frac{\sigma_b}{s} = 1{,}37$$

Bei der 4. Reihe, die durchweg gleiche, etwas schlechtere Resultate als die übrigen ergab, wurde durchweg eine Würfelfestigkeit größer als die beste Biegungsdruckfestigkeit nachgewiesen, so daß

$$\frac{\sigma_b}{s} = 0{,}875 \text{ wird.}$$

Solche Unregelmäßigkeiten sind aber zur Materialbeurteilung kaum geeignet; ganz abgesehen davon, daß die Würfelproben umständliche Laboratoriumsversuche sind, während der Kontrollbalkenversuch überall und jederzeit leicht und billig mit vollständig genügender Genauigkeit über jede ähnliche praktische Frage Aufschluß gibt und noch den Vorteil hat, daß der betreffende Ingenieur oder Unternehmer persönlich aus dem Verhalten des Materials und dem Bruche selbst seine zur Kalkulation oder sonstigen Entschlüssen nötigen Folgerungen ziehen kann.

Es erübrigt nun noch anzugeben, warum die interessanten Versuche Prof. Suensens[1] nicht in die Graphiken eingetragen wurden. Die Versuche wurden zu dem Zwecke ausgeführt, um den Nachweis zu erbringen, ob die in den dänischen Vorschriften gewählten Kontrollbalken, wie schon eingangs erwähnt wurde, richtig bewehrt und daher in dieser Form brauchbar seien. Suensen führte zunächst eine Versuchsreihe von 1 Woche alten Betonbalken und dann eine aus reinem Zement von 5 Monaten Alter aus. Die Bewehrung war nach den alten Vorschlägen Dr. v. Empergers steigend mit 1,5 bis 14% gewählt. Von dieser Reihe läßt sich kein Ergebnis für obige Betrachtungen verwerten, da der Beton zu jung, der Zement aber zu alt und auch als solcher nicht zum Vergleich mit Beton geeignet erscheint.

Die in Tabelle II angeführte Versuchsreihe, nach den Verordnungen bewehrter Balken verschiedener Mischungen, läßt sich auch nicht gut verwenden, da sie, wie ein Blick auf die Spalte der Eisenzugspannungen zeigt, 3376 kg/qcm als kleinste Eisenspannung anführt und ein Bruch bei dieser Spannung im Eisen schon von dessen Dehnung stark beeinflußt wird. Ziehen wir aber die Würfelfestigkeit zum Vergleich heran, so sehen wir, daß die Möglichkeit besteht, daß

$$\text{Balken IV } (1:5) \text{ mit } \frac{\sigma}{s} = 1{,}79 \text{ und}$$

$$\text{Balken XII } (1:8) \text{ mit } \frac{\sigma_b}{s} = 1{,}44$$

auf Betondruck gebrochen sein könnten, 225 und 215 kg/qcm die Festigkeiten für 4 Wochen-Beton sind. Wir ersehen daraus, daß die dänischen Kontrollbalken sich für einen besseren Beton als mit 200 kg/qcm Biegungsdruckfestigkeit nicht eignen.

Überblickt man an der Hand des Graphikons die Ergebnisse, so verleugnen die Versuche im großen Ganzen nicht die Gleichmäßigkeit des Materials, und was das Wichtigste ist, das Verhältnis aller der eingezeichneten Kurven zu der zugehörigen richtigen Würfelfestig-

1) Beton u. Eisen 1910, S. 199 f.

keit steht wie **1,3 bis 1,6 zu 1.** l
wobei nicht übersehen werden c
Mittelwert aus drei Versuchen sin
Versuchsreihen hat sich eine Würf
größer war als der Durchschnitt
war als die größte erzielte Bieg
und gar unwahrscheinliche Größe.
Wert und welche Verläßlichkeit sol
es möglich ist, mit einem Güte
65% zeigt, Feinheiten zu unter
als **20%** beträgt.

Bei den Bauten, die diese Ko
schalungszeit verwenden, haben si
das Wetter günstig war, konnten
nach 8 bis 10 Tagen ausgeschalt w
zwang zur Verlängerung dieser Z
Mindestfestigkeit. Es wurde dann
arbeitet, da diese Kontrolle ganz zu
gebnisse des letzten Winters werden
licht werden. Im allgemeinen sei n
unter 5° C schon einen wesentlichen
gleicher Güte in gleicher Zeit ergab.
nach 23 Tagen den Minimalwert er
wurde der Bau nicht aufgehalten. A
ganz genau kontrolliert und die
getroffen werden. Insbesondere d
essante Ergebnisse.

Aus diesen Gründen empfiehlt
zu kontrollieren und sowohl die Min
zeichnen; um das ganze Material han
der Protokollrückseite für eine übersic
vorgesehen. Bei achtsamer und rich
ganz wertvolle Daten auf diese einfac
jeder ohne viel Mühe durch Lieferun
lange nicht gänzlich gelösten „Frostf

Es ist eine bekannte Tatsache,
auch abweichende Würfelfestigkeiten
zur Einführung der Normalwürfel vo
einem gewissen Maße dürfte auch d
Gesetze unterworfen sein, und von
statischen Höhe abhängen.

Als Kriterium für diese Fra
einwandfrei das Verhältnis $\frac{\sigma_b}{s}$ gut a
Die normalen Grenzen dieses Wertes

$$\frac{\sigma_b}{s} = 1{,}3 - 1{,}6$$

an anderer Stelle ermittelt worden und allgemein bekannt.

Soweit die bis jetzt gemachten Erfahrungen reichen, bleibt der Wert $\frac{\sigma_b}{s}$ normalerweise innerhalb der angegebenen Grenzen, ohne nachweislich von der Abmessung der Höhe beeinflußt zu werden, und ist somit ein praktischer Wert eventueller derartiger Schwankungen nicht zu ersehen.

Aus den (Seite 25) angeführten Versuchen von C. v. Bach ergibt sich

$$\frac{\sigma_b}{s} = 1{,}40.$$

Aus der Versuchsreihe von Prof. Mörsch gilt:

$$\frac{\sigma_b}{s} = 1{,}57,$$

obwohl diese Balken ganz andere Abmessungen hatten.

Noch bedeutungsvoller dürften die von der „Amsterdamsche cementijzer fabriek“[1] mit Balken größerer Abmessungen gemachten Versuche sein. Die Versuchskörper hatten eine Spannweite von $l = 6{,}825$ m, eine Höhe $h = 0{,}6$ m und eine Breite $b = 1{,}0$ m, und wurden seinerzeit von Dr. v. Emperger eingehend besprochen.[2]

Für diese Versuche gilt:

$$\frac{\sigma_b}{s} = \frac{241}{142} = 1{,}7.$$

Dieser etwas ungewöhnlich hohe Wert des Quotienten dürfte durch die eigentümliche Bewehrungsweise des Druckgurtes mit zahlreichen dünnen Längseisen und Bügeln, die man an und für sich nicht als Druckbewehrung ansprechen kann, dennoch günstig beeinflußt worden sein oder aber die Würfelfestigkeiten sind zu klein gewesen.

Ein Abfall der Biegungsdruckfestigkeit läßt sich beim Übergang vom Rechteck zum T-Querschnitt beobachten. Es sei hier nur auf das umfangreiche Versuchsmaterial von C. v. Bach[3] und die Versuche des Österr. Betonvereins in Prag durch Prof. Melan 1909 mit ⊓-förmigen Profilen hingewiesen. Die Versuche ergaben einen Abfall bei unbewehrter Platte. Eine den Verhältnissen der Praxis entsprechende Plattenbewehrung ergab wieder normale Festigkeiten.

Die von Dr. v. Emperger angestellten Vorversuche erstreckten sich auf die vom praktischen Standpunkte aus in Betracht kommenden Höhenabmessungen der Kontrollbalken. Die statische Höhe betrug $h_1 = 5$ cm, $h_2 = 10$ cm und $h_3 = 8$ cm. Die letztere Abmessung hat sich als besonders zweckentsprechend bewährt und wurde daher beibehalten. Eine weitere Reihe von Versuchen, in welcher Haftspannung, Bügelanordnung,

1) Beton u. Eisen 1906 S. 287 bis 308 und 1907 S. 14.
2) Ebenda 1907 S. 210.
3) Mitt. über Forschungsarbeiten. Heft 90 und 91. 1910.

Abbiegungsart der Einlagen, Eise
wurden, ergaben die vorliegenc
entsprechende Lösung.

Es sei schließlich mit Befri
welches Dr. v. Emperger in sein
solcher Versuche als Bestandteil d
fach Nachahmung findet, indem
zwecken solche Apparate angeschaf

Die Einfachheit und Billigkeit
minderbemittelten Anstalten ermög
führung von charakteristischen
dem Hörer Vorzüge und Nachteile
Abbiegung der Eisen und Bügelbe
Alters, des Frostes usw. augenfäl
geben, was er sonst erst in langj
vielleicht teuer erkauft hat: das r
Vertrauen zu seinem Baustoff
Fähigkeiten seines Materials — Vc
herrscht, wird als Konstrukteur wirl

Es ist mit diesen Balken die C
maßgebenden Eigenschaften des E
Anschauungsunterricht, der, auch
Erprobung von Kontrollbalken ur
für weiteste Kreise beitragen unc
fördern wird.

Anhang.

Preisliste der vom Spezialbureau für Eisenbeton in Wien I Dominikanerbastei 4 geprüften Teile des **Normalapparates.**

(1 K = 0,85 M.)

Bestell-Marke	Gegenstand	K	h	M	Pf.
a	ein Reiter aus Hartholz	3	—	2	55
b	eine Unterlage aus Hartholz mit Blechbeschlag	1	30	1	10
c	eine Belastungsbühne komplett	34	—	29	—
d	eine Kette samt Ring und Haken	6	—	5	10
e	eine Doppelform, mit Blech beschlagen, komplett	86	—	73	—
f	eine Kontrollehre	3	—	2	55
g	zwölf Distanzeisen mit einer Kerbe	6	30	5	36
h	„ „ „ zwei Kerben	9	—	7	65
i	eine lange Kiste, versperrbar, für zwei Doppelformen . . .	30	—	25	50
k	eine kleinere Kiste, versperrbar, für alle andern Bestandteile	25	—	21	30
l	ein kompletter Apparat, bestehend aus zwei Doppelformen, vollständiger Belastungsvorrichtung und allem Zubehör samt gebogenen Mustereinlageisen	294	—	250	—

Lieferzeit eines kompletten Apparates 14 Tage.

Protokollformulare in Reichsformat sind vom Verlage Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin, W 66 zum Preise von 1 M zuzügl. Postgeld für je 12 Stück zu beziehen.

Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. d. S.

FORSCHERARBEITEN AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

DIE BEMESSUNG DER EISENBETON-KONSTRUKTIONEN

HEFT XV

PREIS 4 MARK

VON

RICH. WUCZKOWSKI
CHEFINGENIEUR IM SPEZIALBUREAU VON DR. ING. F. v. EMPERGER

MIT 21 ABBILDUNGEN, 24 BEISPIELEN UND 12 TAFELN

VERLAG von WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

Eisenbetonkonstruktionen bei Biegung und bei exzentrisch wirkenden Druck- oder Zugkräften

Einheitliche Verfahren zur Bemessung derselben

Für die Praxis bearbeitet

von

RICH. WUCZKOWSKI
Chefingenieur im Spezialbureau von Dr. Ing. Fritz von Emperger

Mit 21 Abbildungen, 24 Beispielen und 12 Tafeln



BERLIN 1911
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

VORWORT.

In vorliegender Schrift hat der Verfasser seine, während langjähriger beruflicher Tätigkeit entworfenen Verfahren zur Bemessung der Eisenbetonkonstruktionen gesammelt und in einheitlicher Form zum Abdruck gebracht. Die Verfahren, mitten im Getriebe der Praxis entstanden, tragen ausschließlich den Bedürfnissen derselben Rechnung.

Die theoretischen Erwägungen beschränken sich auf jenes bescheidene Maß, welches zur Begründung der Ausführungen unumgänglich nötig erschien. Ein Hauptaugenmerk wurde jedoch der Anwendung auf praktische Fälle gewidmet, was schon die hohe Zahl der Beispiele erkennen läßt.

Um das gesteckte Ziel zu erreichen, durften auch die so wichtigen wirtschaftlichen Momente, welche in theoretischen Schriften unbeachtet bleiben, nicht aus dem Auge gelassen werden. Die gebrachten Vorschläge zur Vermeidung der heute allerorts herrschenden Vielrechnerei bei den einfachsten Ausführungsformen, erachte ich als ausreichenden Grund um die Arbeit in den Zyklus der herausgegebenen Forscherarbeiten aus dem Gebiete des Eisenbeton aufzunehmen, und bin überzeugt, daß die Schrift nicht nur in Konstruktionsbureaus, wo man heute noch gezwungen ist, auf die Heranbildung des Nachwuchses wertvolle Zeit aufzuwenden, sondern auch in den einschlägigen Schulen Eingang finden wird.

WIEN, im Juni 1911.

Dr. F. von EMPERGER.

INHALTSVERZEICHNIS.

Auf Biegung in Anspruch genommene Querschnitte mit einfacher Bewehrung.

I. Spannungsnachweis bezw. Nachweis des Sicherheitsgrades.

1. Platten- oder Rechteckquerschnitte.

Zur Berechnung der Biegungsspannungen in Platten- oder Rechteckquerschnitten sei hier ein Verfahren angeführt, welches die umständliche Zwischenberechnung der Lage der Neutralen ausscheidet.*)

Jedem Querschnitt kommt ein bestimmtes, berechenbares kleinstes Trägheitsmoment J zu. Ist dieses unter Beachtung der durch die Vorschriften festgelegten Spannungsverteilung auf die Verbundmaterialien bestimmt, so lassen sich die Spannungen: Beton an der Kante

$$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot x$$

und Zug im Eisen

$$\sigma_e = \frac{M}{J} \cdot (h - x) \cdot n$$

berechnen. Aus dieser allgemeinen Anschrift läßt sich eine wichtige Beziehung des Randspannungsverhältnisses zu den Querschnittsabmessungen ableiten, nämlich

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{(h - x) \cdot n}{x},$$

woraus allgemein

$$x = \frac{n}{n + v} \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

gefunden wird. Diese Anschrift besagt, daß für jedes gegebene Randspannungsverhältnis der Abstand der Nullachse von der Druckkante ein abhängiger konstanter Anteil der Nutzhöhe h ist.

---

*) Vgl. den Aufsatz des Verfassers in Beton u. Eisen 1909, Heft XI, S. 268.

Aus dem Gleichgewicht der Innenkräfte

$$Z = D \quad \text{oder} \quad f_e \cdot \sigma_e = \frac{b \cdot x \cdot \sigma_b}{2} \quad \text{bezw.} \quad f_e \cdot v = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{n}{n+v}$$

erhalten wir eine Beziehung zwischen Bewehrung und Randspannungsverhältnis. In Prozenten ausgedrückt, ist

$$f_e = \frac{p \cdot b \cdot h}{100}.$$

Die angeschriebene Beziehung zwischen f_e und v führt einerseits bei gegebenem Bewehrungsprozentsatz p zum zugeordneten Randspannungsverhältnis

$$v = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{50 \cdot n}{p}} \quad . \; . \; . \quad 2)$$

anderseits bei gegebenem Randspannungsverhältnis v zu den zugeordneten Bewehrungsprozenten

$$p = \frac{50 \cdot n}{v \cdot (n+v)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3)$$

Besonders für $n = 15$ lauten diese Gleichungen:

$$v = -7{,}5 + \sqrt{56{,}25 + \frac{750}{p}} \quad . \; . \; . \quad 2a)$$

und

$$p = \frac{750}{v \cdot (15+v)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3a).$$

Der Hebelarm des inneren Kräftepaares, dessen Größe

$$m = h - \frac{x}{3}$$

ist, läßt sich nach Berücksichtigung der Gl. 1 auch

$$m = h \cdot \frac{v + \frac{2}{3} \cdot n}{v + n}$$

schreiben und zur Berechnung der Eisenzugspannung aus

$$\sigma_e = \frac{Z}{f_e} = \frac{M}{m \cdot f_e}$$

verwenden. Man erhält so den Ausdruck

$$\sigma_e = \frac{M \cdot (v+n)}{\left(v + \frac{2}{3} \cdot n\right) \cdot h \cdot f_e} \quad . \; . \; . \; . \quad 4),$$

welcher für $n = 15$

$$\sigma_e = \frac{M \cdot (v + 15)}{(v + 10) \cdot h \cdot f_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4a)$$

lautet. Die Kantenpressung im Beton wird sodann zu

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

berechnet.

Der Vorgang bei der Berechnung sei durch folgende Beispiele erläutert:

1. Beispiel: Eine Platte mit $h = 10,5$ cm Nutzhöhe ist für 1 m Breite mit 8 R.-E. 10 mm = 6,28 cm² bewehrt und hat das Moment von 55 000 kgcm aufzunehmen. Welche Spannungen kommen dem Querschnitt zu?

Wir berechnen die Bewehrungsprozente

$$p = \frac{6,28}{10,5} = 0,6 \text{ vH.};$$

nach Gl. 2a das Randspannungsverhältnis:

$$v = -7,5 + \sqrt{56,25 + \frac{750}{0,6}} = 28,6$$

und somit die Spannungen nach Gl. 4a:

$$\sigma_e = \frac{55\,000 \cdot 43,6}{38,6 \cdot 6,28 \cdot 10,5} = 940 \text{ kg/cm}^2$$

und nach Gl. 5:

$$\sigma_b = \frac{940}{28,6} = 33 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Beispiel: Ein Rechteckbalken von der Breite $b = 20$ cm, der Nutzhöhe $h = 30$ cm ist mit 3 R.-E. 18 mm = 7,63 cm² bewehrt und hat das Moment $M = 138\,000$ kgcm aufzunehmen.

Zum Spannungsnachweis ermitteln wir

$$p = \frac{7,63}{0,2 \cdot 30} = 1,27 \text{ vH.};$$

nach Gl. 2a:

$$v = -7,5 + \sqrt{56,25 + \frac{750}{1,27}} = 17,9,$$

somit sind die Spannungen nach Gl. 4a:

$$\sigma_e = \frac{138\,000 \cdot 32,9}{27,9 \cdot 7,63 \cdot 30} = 711 \text{ kg/cm}^2$$

und nach Gl. 5:

$$\sigma_b = \frac{711}{17,9} = 39,8 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit Hilfe der vorstehenden Ausführungen lassen sich auch Tabellen aufstellen, welche die zur Berechnung der Spannungen erforderlichen Beiwerte enthalten. Vorteilhaft ist es, die Tabellenwerte für die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² und die Plattenbreite $b = 100$ cm aufzustellen.

Aus Gl. 4 folgt nämlich

$$M = \frac{v + \frac{2}{3} \cdot n}{v + n} \cdot h \cdot f_e \cdot 1000,$$

und mit $f_e = p h$ erhalten wir

$$M = \frac{v + \frac{2}{3} \cdot n}{v + n} \cdot 1000 \cdot p \cdot h^2$$

bezw. mit Berücksichtigung von Gl. 3 auch

$$M = \frac{v + \frac{2}{3} \cdot n}{(v + n)^2} \cdot \frac{50 \cdot n}{v} \cdot 1000 \cdot h^2 = \beta \cdot h^2 \quad . \quad 6).$$

Für $n = 15$ haben wir

$$M = \frac{v + 10}{(v + 15)^2} \cdot \frac{750\,000}{v} \cdot h^2 = \beta \cdot h^2 \quad . \quad . \quad 6a),$$

welche Werte in Tabelle I eingetragen wurden.

3. Beispiel: Für die Platte des 1. Beispiels wäre mit Hilfe der Tabelle I der Spannungsnachweis zu erbringen.

Die Bewehrungsprozente sind 0,6 vH., das aufzunehmende Moment ist $M = 55\,000$ kgcm. Die Tabelle I zeigt den Wert $p = 0{,}61$ vH., so daß wir von einer geradlinigen Einschaltung absehen können. Dieser Bewehrung entsprechen $\beta = 533$ und $v = 28{,}5$, die Spannungen sind somit

$$\sigma_e = 1000 \cdot \frac{M}{\beta \cdot h^2} = 1000 \cdot \frac{55\,000}{533 \cdot 10{,}5^2} \doteq 940 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{v} = \frac{940}{28{,}5} = 33 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Plattenbalkenquerschnitte.

Sind die Spannungen für einen in Abmessung und Bewehrung gegebenen Plattenbalkenquerschnitt (Abb. 1) zu ermitteln, so denken wir uns vorerst den Querschnitt als

Tabelle I. Plattenquerschnitte mit einfacher Bewehrung.

$\sigma_e =$	1000 kg/cm²																$= \sigma_e$
$\sigma_b' =$	**45**	44	43	42	41	**40**	39	38	37	36	**35**	34	33	32	31	**30**	$= \sigma_b'$
$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} =$	22,2	22,7	23,2	23,75	24,3	25	25,6	26,3	27	27,7	28,5	29,4	30,2	31,2	32,2	33,3	$= v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$
$\beta =$	787	760	735	710	682	658	632	605	582	560	533	510	486	463	440	418	$= \beta$
p vH. =	0,93	0,90	0,87	0,825	0,79	0,75	0,73	0,695	0,67	0,64	0,61	0,57	0,545	0,52	0,50	0,47	$= p$ vH.

Rechteck von der Breite B und der Nutzhöhe h. Drücken wir die Bewehrung in Prozenten dieser Fläche nach

$$p = \frac{100 \cdot f_e}{B \cdot h}$$

aus, so erhalten wir mit Gl. 2 bezw. 2a das zukommende Randspannungsverhältnis und erhalten mit Hilfe der Gl. 1 Aufschluß, ob x gleich, kleiner oder größer als die Druckgurtdicke d ist. In den ersteren beiden Fällen gelten für die Berechnung der Spannungen dieselben Regeln, wie sie zu 1 gegeben wurden.

Fällt jedoch die Nullinie in den Steg des Plattenbalkens, ist also $x > d$, so wird für die Annahme, daß im Druckgurt nur die schraffierte Fläche der Abb. 1 mitwirke, die Spannungsberechnung vorteilhafter als nach den bekannten Formeln der preußischen ministeriellen Vorschriften nach folgender Methode*) durchgeführt, deren theoretische Begründung hier vorangeschickt wird.

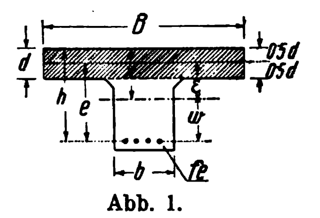


Abb. 1.

Aus der Gleichheit der statischen Momente beiderseits der Nullinie (Abb. 1) folgt: $n \cdot f_e \cdot w = B \cdot d \cdot \varepsilon$ und, da $w = e - \varepsilon$ ist, auch $n \cdot f_e \cdot (e - \varepsilon) = B \cdot d \cdot \varepsilon$. Drücken wir die Bewehrung in Prozenten φ der schraffierten Fläche der Abb. 1 aus, so wird mit

$$f_e = \frac{\varphi \cdot B \cdot d}{100}$$

der Abstand ε zu

$$\varepsilon = \frac{n \cdot \varphi \cdot e}{100 + n\varphi}$$

gefunden. Der Abstand der Nullinie vom gedrückten Plattenrande ist somit

$$x = \varepsilon + \frac{d}{2} = \frac{n \cdot \varphi}{100 + n\varphi} \cdot e + \frac{d}{2} \quad . \quad . \quad 7).$$

Der Druckmittelpunkt des Spannungstrapezes liegt von der Druckkante, wie leicht zu ermitteln, im Abstande

$$z = \frac{3x - 2d}{2x - d} \cdot \frac{d}{3},$$

*) Vgl. den Aufsatz des Verfassers in Beton u. Eisen 1909, Heft XI, S. 268.

der Hebelarm des inneren Kräftepaares ist somit durch

$$m = h - z = h - \frac{3x - 2d}{2x - d} \cdot \frac{d}{3} \quad . \quad . \quad 8)$$

ausgedrückt. Die Eisenzugspannung wird nun aus

$$\sigma_e = \frac{M}{m \cdot f_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

und mit Hilfe des Randspannungsverhältnisses

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{15 \cdot w}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

die Kantenpressung

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

ermittelt.

4. Beispiel: Mit bezug auf Abb. 1 sei für einen Querschnitt mit $B = 1{,}50$ m, $d = 8$ cm, $h = 35$ cm und $f_e = 4$ R.-E. 20 mm $= 12{,}57$ cm² der Spannungsnachweis für das Biegungsmoment $M = 390\,000$ kgcm erbracht.

Wir ermitteln nach der Feststellung, daß die Nullinie in den Steg fällt, den Prozentsatz

$$\varphi = \frac{12{,}57 \cdot 100}{150 \cdot 8} = 1{,}05 \text{ vH.},$$

ferner mit Hilfe der Gl. 7 bis 11:

$$x = \frac{15 \cdot 1{,}05}{100 + 15 \cdot 1{,}05} \cdot 35 + 4 = 8{,}22 \text{ cm},$$

$$m = 35 - \frac{3 \cdot 8{,}22 - 2 \cdot 8}{2 \cdot 8{,}22 - 8} \cdot \frac{8}{3} = 32{,}26 \text{ cm},$$

$$\sigma_e = \frac{390\,000}{32{,}26 \cdot 12{,}57} = 960 \text{ kg/cm}^2$$

und mit

$$v = \frac{15 \cdot 26{,}78}{8{,}22} = 48{,}8$$

schließlich die Druckspannung

$$\sigma_b = \frac{960}{48{,}8} = 19{,}65 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Brückenbau pflegt man das Stegrechteck oberhalb der Nullinie (Abb. 1) nicht zu vernachlässigen. Der Spannungsnachweis wird hier vorteilhafter mit Hilfe des

Trägheitsmomentes des Querschnittes durchgeführt, da man auf anderem Wege zu endlosen Formeln gelangt.

Der Vollständigkeit halber sei diese an sich bekannte und in der Praxis geübte Methode an der Hand eines Beispiels durchgeführt.

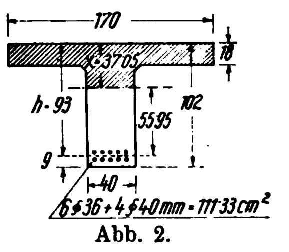


Abb. 2.

5. Beispiel: Der in Abb. 2 skizzierte Querschnitt hat ein Moment von $M = 7\,227\,500$ kgcm aufzunehmen.

Zur Spannungsermittlung berechnen wir zunächst aus der Gleichheit der statischen Momente beiderseits der Nullinie

$$170 \cdot 18 \cdot (x - 9) + 40 \cdot \frac{(x-18)^2}{2} - 15 \cdot 111{,}33 \cdot (93 - x) = 0$$

oder

$$x^2 + 200{,}5\,x - 8818 = 0$$

den Abstand derselben zu

$$x = -100{,}25 + \sqrt{100{,}25^2 + 8818} = 37{,}05 \text{ cm}.$$

Das Trägheitsmoment in bezug auf die Nullinie ist nun

$$J = \frac{170 \cdot \overline{37{,}05}^3}{3} - \frac{130 \cdot \overline{18{,}95}^3}{3} + 15 \cdot 111{,}33 \cdot \overline{55{,}95}^2$$
$$= 7\,810\,500 \text{ cm}^4.$$

Die Spannungen sind also

$$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot x = \frac{7\,227\,500}{7\,810\,500} \cdot 37{,}05 = 34{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$\sigma_e = \frac{M}{J} \cdot (h - x) \cdot 15 = \frac{7\,227\,500}{7\,810\,500} \cdot 55{,}95 \cdot 15 = 775 \text{ kg/cm}^2.$$

Von dem Bestreben geleitet, die Spannungsberechnung im Plattenbalken so einfach als möglich zu gestalten, hat der Verfasser im Jahre 1905 Diagramme aufgestellt, welche sich im praktischen Gebrauch bewährt haben.

Unter der Annahme, daß im Druckgurt nur die nach Abb. 1 gekennzeichnete Fläche mitwirke, wurden unter Verwendung der Formeln 7 bis 11 für die verschiedenen Höhenverhältnisse $k_1 = \frac{h}{d}$ des Plattenbalkens und für die Kantenpressungen $\sigma_b = 15$ bis 45 kg/cm² die entsprechenden Momente für eine Druckgurtbreite $B = 100$ cm (Abb. 1) in der Form

$M_{100} = k_2 \cdot d^2$ zum Ausdruck gebracht. Das Diagramm ist für die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² aufgetragen und gibt die genau entsprechenden Bewehrungen in Prozenten φ der Fläche $B \cdot d$ an, gleichgültig, ob die Nullinie in den Steg oder in die Platte fällt.*) Die Auftragung erfolgte in der Weise, daß die Höhenverhältnisse der Plattenbalken $k_1 = \frac{h}{d}$ als Ordinaten und die Werte $k_2 = \frac{M_{100}}{d^2}$ als Abszissen erscheinen. In dieses Achsensystem sind die mit der zugehörigen Kantenpressung bezifferten Kurven eingetragen. Eine zweite ebenso beschriebene Kurvenschar hat die k_1-Werte als Ordinaten und die Bewehrungsprozente φ als Abszissen.

Die Tabelle II stellt einen Auszug des Diagramms dar, welche jedoch gegenüber der schaubildlichen Darstellung den Nachteil hat, daß zwischenliegende Werte geradlinig eingeschaltet werden müssen. Der Vorgang ist aus Beispiel 6 ersichtlich.

6. Beispiel: Ein Plattenbalken der Abb. 1 mit $B = 1,8$ m, $h = 44$ cm, $d = 8$ cm und $f_e = 24$ cm² hat ein Biegungsmoment von $M = 920\,000$ kgcm aufzunehmen. Es sind die Spannungen zu ermitteln.

Dem Plattenbalken kommen das Höhenverhältnis

$$k_1 = \frac{44}{8} = 5,5$$

und der Bewehrungssatz

$$\varphi = \frac{f_e}{B \cdot d} = \frac{24}{1,8 \cdot 8} = 1,67 \text{ vH.}$$

zu. Aus Tabelle II entsprechen hierfür $\sigma_b' = 25$ kg/cm² bei 1000 kg/cm² und $k_2 = 8500$.

Die Eisenzugspannung ist daher

$$\sigma_e = \frac{M \cdot 1000}{B \cdot k_2 \cdot d^2} = \frac{920\,000}{1,8 \cdot 8500 \cdot 8^2} \cdot 1000 = 940 \text{ kg/cm}^2$$

und die Kantenpressung im Beton

$$\sigma_b = \frac{\sigma_b'}{1000} \cdot \sigma_e = \frac{25 \cdot 940}{1000} = 23,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist bekannt, daß die Eisenzugspannung im Plattenbalkenquerschnitt zutreffend gefunden wird, wenn in der Formel zur Berechnung derselben

*) Die Diagramme nebst Gebrauchsanweisung und durchgeführten Beispielen sind vom Verfasser erhältlich.

Tabelle II. Plattenbalkenquerschnitte mit einfacher Bewehrung.

Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

$\frac{h}{d} = k_1$	$\sigma_b' =$	15	20	25	30	35	40
2,0	$M_{100} = k_2 \cdot d^2 =$	510 d^2	900 d^2	1 250 d^2	1 700 d^2	2 100 d^2	2 600 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,27	0,46	0,68	0,91	1,205	1,485
2,5	$M_{100} =$	800 d^2	1 350 d^2	1 950 d^2	2 575 d^2	3 350 d^2	4 100 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,34	0,58	0,85	1,14	1,51	1,36
3,0	$M_{100} =$	1 150 d^2	1 900 d^2	2 800 d^2	3 750 d^2	4 755 d^2	5 800 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,41	0,69	1,02	1,37	1,81	2,21
3,5	$M_{100} =$	1 550 d^2	2 600 d^2	3 800 d^2	5 000 d^2	6 300 d^2	7 600 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,48	0,81	1,19	1,59	2,05	2,48
4,0	$M_{100} =$	2 050 d^2	3 400 d^2	4 900 d^2	6 350 d^2	8 000 d^2	9 500 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,55	0,92	1,36	1,78	2,23	2,67
4,5	$M_{100} =$	2 600 d^2	4 250 d^2	6 050 d^2	7 800 d^2	9 650 d^2	11 350 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,62	1,04	1,48	1,93	2,47	2,815
5,0	$M_{100} =$	3 200 d^2	5 150 d^2	7 250 d^2	9 250 d^2	11 350 d^2	14 500 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,69	1,13	1,58	2,03	2,475	2,93
5,5	$M_{100} =$	3 850 d^2	6 100 d^2	8 500 d^2	10 700 d^2	13 000 d^2	15 200 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,76	1,20	1,67	2,12	2,57	3,03
6,0	$M_{100} =$	4 600 d^2	7 050 d^2	9 700 d^2	12 175 d^2	14 675 d^2	17 150 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,82	1,26	1,74	2,19	2,65	3,11
6,5	$M_{100} =$	5 300 d^2	8 000 d^2	10 900 d^2	13 625 d^2	16 400 d^2	19 150 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,87	1,32	1,80	2,25	2,71	3,18
7,0	$M_{100} =$	6 050 d^2	9 000 d^2	12 100 d^2	15 125 d^2	18 100 d^2	21 125 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,91	1,37	1,85	2,30	2,77	3,24
7,5	$M_{100} =$	6 800 d^2	10 000 d^2	13 375 d^2	16 600 d^2	19 800 d^2	23 100 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,95	1,41	1,89	2,35	2,82	3,29
8,0	$M_{100} =$	7 500 d^2	10 900 d^2	14 600 d^2	18 050 d^2	21 550 d^2	25 100 d^2
	$\varphi =$ vH.	0,98	1,45	1,925	2,39	2,86	3,33
8,5	$M_{100} =$	8 250 d^2	11 925 d^2	15 825 d^2	19 500 d^2	23 300 d^2	28 100 d^2
	$\varphi =$ vH.	1,01	1,485	1,96	2,42	2,90	3,37
9,0	$M_{100} =$	8 975 d^2	12 875 d^2	17 050 d^2	20 975 d^2	25 075 d^2	29 100 d^2
	$\varphi =$ vH.	1,03	1,51	1,985	2,455	2,94	3,41
9,5	$M_{100} =$	9 700 d^2	13 850 d^2	18 250 d^2	22 425 d^2	26 800 d^2	31 050 d^2
	$\varphi =$ vH.	1,06	1,535	2,015	2,49	2,97	3,44
10,0	$M_{100} =$	10 450 d^2	14 800 d^2	19 500 d^2	23 900 d^2	28 550 d^2	33 000 d^2
	$\varphi =$ vH.	1,08	1,55	2,04	2,51	2,99	3,46

$$\sigma_e = \frac{M}{m \cdot f_e} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

der Hebelarm m des inneren Kräftepaares zu

$$m = h - \frac{d}{2} \quad \text{oder} \quad m \doteq 0{,}925\, h$$

eingeführt wird.

Bezüglich der Betonkantenpressung σ_b führt der gleiche Weg zu keinem Ergebnis, indem dieser Wert als das 1,2- bis 2fache der mittleren Pressung σ_m, welche aus

$$\sigma_m = \frac{M}{m \cdot B \cdot d} \quad \text{(Abb. 1)}$$

gefunden wird, erhalten werden kann. Ein eingehendes Studium meines früher beschriebenen Diagramms belehrte mich, daß die mit den Kantenpressungen σ_b bezifferten Strahlen dem Gesetz

$$k_2 = 98 \cdot \sigma_b \cdot k_1 - 6140 \quad \ldots . \quad 13)$$

mit jener belanglosen Abweichung folgen, daß die nach dieser Gleichung ermittelten Geraden sich um so schärfer mit den Diagrammstrahlen decken, je größer σ_b gewählt wird, und daß für den Bereich der zulässigen Spannungen, d. i. um $\sigma_b = 40$ kg/cm², die vollständige Deckung eintritt. Dieser Umstand begünstigt die Anwendung dieses Gesetzes, da wir gerade für jene Fälle, wo wir hart an der Grenze der zulässigen Spannung sind, die volle Genauigkeit der Rechnung brauchen, während es bei den zumeist vorkommenden unterbeanspruchten Balkenquerschnitten gleichgültig ist, wenn diese Rechnung etwas größere Werte σ_b liefert, als solche bei Gebrauch einer umständlicheren Berechnungsmethode erhalten werden.

Aus obigem durch Gl. 13 ausgedrückten Gesetz erhält man die Kantenpressung

$$\sigma_b = \frac{k_2 + 6140}{98\, k_1} = \frac{\frac{M}{B \cdot d^2} + 6140}{98\, k_1} \quad \ldots \quad 14)$$

oder als Merkformel

$$\sigma_b = \frac{\frac{M}{B \cdot d^2} + 6000}{100\, k_1} \quad \ldots . \quad 14a)$$

bezw.

$$\sigma_b = \frac{\frac{M}{B \cdot d} + 6000\, d}{100\, h} \quad \ldots . \quad 14b).$$

Die Formeln 14 und 14a gelten dann, wenn nach Gl. 12 die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² erhalten wurde.

Weicht das Ergebnis aus Gl. 12 von 1000 kg/cm² ab, so berechnen wir die Kantenpressung schärfer nach

$$\sigma_b = \frac{\frac{M}{B \cdot d^2} + 6140}{98\, k_1} \cdot \frac{\sigma_e}{1000} \quad . \; . \; . \quad 15)$$

oder nach der Merkformel

$$\sigma_b = \frac{\frac{M}{B \cdot d^2} + 6000}{100\,000\, k_1} \cdot \sigma_e \quad . \; . \; . \; . \quad 15a)$$

bezw.

$$\sigma_b = \frac{\frac{M}{B \cdot d} + 6000\, d}{100\,000\, h} \cdot \sigma_e \quad . \; . \; . \; . \quad 15b).$$

7. Beispiel: Es wären die Ergebnisse des im 6. Beispiel behandelten Plattenbalkens zu überprüfen.

Es sind

$$k_1 = \frac{44}{8} = 5{,}5, \quad m = 0{,}925 \cdot 44 = 40{,}7 \text{ cm},$$

somit nach Gl. 12

$$\sigma_e = \frac{920\,000}{40{,}7 \cdot 24} = 940 \text{ kg/cm}^2$$

und nach Gl. 15a

$$\sigma_b = \frac{\frac{920\,000}{1{,}8 \cdot 64} + 6000}{100\,000 \cdot 5{,}5} \cdot 940 = 23{,}9 \text{ kg/cm}^2.$$

Wir ersehen, daß bei Anwendung der vereinfachten Formeln 12 bis 15b mit ausreichender Genauigkeit der Nachweis bezüglich des Sicherheitsgrades der Konstruktion erbracht werden kann. Die auf einen umständlicheren Nachweis aufgewendete Arbeit könnte viel ersprießlicher zur Durchbildung der Konstruktion in ihren sonstigen Belangen sowie zur Herstellung von Detail- und Biegeplänen verwendet werden, welche heute kaum in den statischen Berechnungen, noch weniger aber auf den Baustellen zu finden sind.

II. Die Bemessung der Querschnitte.

Als Grundsatz zur Bemessung der Eisenbetonkonstruktionen gilt dem in der Praxis arbeitenden Ingenieur die Erreichung des Kostenkleinstwertes

innerhalb der aus Sicherheitsgründen gebotenen Grenzen der Inanspruchnahme der Verbundstoffe. Im folgenden werden wegen der Wichtigkeit dieser Frage die Bedingungen für die am häufigsten vorkommende Ausführungsform, den Plattenbalken, abgeleitet werden.

Den wesentlichsten Teil der Belastung des Plattenbalkens bildet das Plattengewicht. Man wird daher in erster Linie zu trachten haben, die Platte so leicht als möglich, d. h. bei Vollausnutzung der zulässigen Spannungen zu bemessen. Bei den stets kontinuierlich verlaufenden Platten der Plattenbalken wird man die Bemessung derselben für die größten Momente, d. i. in den Randfeldern, in der eben beschriebenen Art vornehmen, für die Plattenzwischenfelder jedoch die im Randfelde ermittelte Plattenstärke beibehalten und die Bewehrung entsprechend den kleineren Momentenwerten, wie später im 10. Beispiel gezeigt werden soll, verändern.

Die Vollausnutzung beider Materialspannungen in den Randfeldern ergibt, wenn wir die Kosten der Platte allein betrachten, für diese nicht in allen Fällen auch einen Kleinstwert; der Mehraufwand an Kosten für die so bemessene Platte wird aber durch die Ersparnisse, welche in der Gesamtkonstruktion, also im Plattenbalken, durch die Erleichterung des Eigengewichts erzielt werden, reichlich aufgewogen.

1. Platten- oder Rechteckquerschnitte.

Aus dem Vorangeführten ist zu entnehmen, daß eine rasche und einwandfreie Ermittlung der Plattenstärke und ihrer Bewehrung in den Randfeldern derart, daß gerade die zulässigen Spannungen erreicht werden, von besonderer Wichtigkeit ist. Diese Ermittlung soll nun hier so durchgeführt werden, daß wir mit der gegebenen Fremdlast f, d. i. Nutzlast und Belaggewicht, ohne vorherige Schätzung des Eigengewichts g der Platte, sofort zu den gesuchten Abmessungen gelangen.

Die statische Höhe h einer Platte von 100 cm Breite, der das Moment M zukommt, finden wir in dem Falle, als die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² gegeben wäre, mit Hilfe der Tabelle I zu

$$h = \sqrt{\frac{M}{\beta}} \quad \ldots\ldots \quad 16).$$

Weicht die gegebene Eisenzugspannung σ_e von 1000 kg/cm² ab, so liest man für das vorliegende Randspannungsverhältnis v

aus Tabelle I den zugehörigen β-Wert sowie den Prozentsatz p ab und ermittelt

$$\beta' = \frac{\sigma_e}{1000} \cdot \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17).$$

Die statische Höhe für Eisenzugspannungen σ_e, welche von 1000 kg/cm² abweichen, ergäbe sich daher zu

$$h = \sqrt{\frac{M}{\beta'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18).$$

Um nun die Bemessung der Platte, ohne vorheriges Einschätzen des Eigengewichts derselben, nur mit Hilfe der gegebenen Fremdlast f durchführen zu können, drücken wir das Eigengewicht g der Platte für 1 m² durch $g = 24\,h + 24\,a$ aus. Hierin sind die statische Höhe h und die Deckschicht a in cm ausgedrückt, so daß g in kg erhalten wird. Für die Deckhöhen $a = 1$ cm, 1,5 cm und 2 cm ergeben sich die Eigengewichte zu

$$\left.\begin{aligned} g &= 24\,h + 24 \\ g &= 24\,h + 36 \\ g &= 24\,h + 48 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19).$$

Die folgende Berechnung ist besonders für $a = 1{,}5$ cm durchgeführt, so daß sich die Gesamtbelastung für 1 m² der Platte zu

$$q = g + f = (f + 36) + 24\,h \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

ergibt.

Für die Stützweite von l m ergibt sich das Moment, das nach der Formel $\frac{q\,l^2}{k}$ ermittelt sei, zu

$$M = \beta' \cdot h^2 = \frac{100}{k}\,[(f + 36) + 24\,h] \cdot l^2 \quad . \quad 21).$$

Nach entsprechender Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$h^2 - \frac{2400\,h \cdot l^2}{k \cdot \beta'} - \frac{100}{k \cdot \beta'} \cdot (f + 36) \cdot l^2 = 0 \quad 22),$$

aus welcher die entsprechende statische Höhe zu

$$h = \frac{10 \cdot l}{k \cdot \beta'} \cdot \left[120\,l + \sqrt{14\,400 \cdot l^2 + k \cdot \beta' \cdot (f + 36)}\right] \quad 23)$$

erhalten wird. Die anzuordnende Bewehrung ist nun für 1 m Breite

$$f_e = p \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24).$$

8. Beispiel: Es ist die Platte im Randfelde einer Plattenbalkendecke in Stärke und Bewehrung zu ermitteln.

Die Verlagsweite der Balken beträgt 2,5 m, die aufliegende Fremdlast beträgt für 1 m² $f = 336$ kg, und die zulässigen Spannungen sind 950/40 kg/cm².

Für das gegebene Randspannungsverhältnis

$$v = \frac{950}{40} = 23{,}75$$

ergibt die Tabelle I

$$\beta = 710 \quad \text{und} \quad p = 0{,}825 \text{ vH.}$$

Gemäß der Gl. 17 ist zunächst

$$\beta' = \frac{950}{1000} \cdot \beta = 0{,}95 \cdot 710 = 675.$$

Mit $a = 1$ cm ist in Gl. 23 statt 36 (Gl. 19) der Zuschlag 24 zu machen, die Gl. 23 ergibt dann, wenn wir das Moment im Randfelde zu $\frac{q\,l^2}{10}$ ermitteln, d. h. den Wert $k = 10$ gebrauchen,

$$h = \frac{2{,}5}{675} \cdot \left[120 \cdot 2{,}5 + \sqrt{14\,400 \cdot 2{,}5^2 + 10 \cdot 675 \cdot (336+24)}\right]$$

$$= \frac{2{,}5 \cdot 1888}{675} = 7 \text{ cm.}$$

Es genügt somit eine äußerliche Plattenstärke von $h + a = 8$ cm, und nach Gl. 24 sind $f_e = 0{,}825 \cdot 7 = 5{,}72$ cm², d. s. 9 R.-E. 9 mm, anzuordnen.

In Fällen, wo nach der eben angeführten Methode eine geringere Plattenstärke erhalten wird, als dies die geltenden Vorschriften oder das eigene praktische Ermessen billigen, greift man zu der entsprechenden Plattenstärke und ermittelt lediglich die Bewehrung hierzu. In diesen Fällen ist das Eigengewicht der Platte von vornherein gegeben, und die Berechnung gestaltet sich in der Weise, wie es die folgenden Beispiele erläutern.

9. Beispiel: Eine beiderseits freiaufliegende Platte von $l = 2{,}10$ m Stützweite hat eine Fremdlast von 250 kg/m² aufzunehmen. Es gelten beispielsweise die preußischen ministeriellen Vorschriften, also die Spannungen 1000/40 kg/cm² und die statthafte Mindeststärke der Platte 8 cm.

Die Gesamtlast der Platte beträgt für 1 m²

$$q = 250 + 0{,}08 \cdot 2400 = 442 \text{ kg.}$$

Das Moment ist

$$M = \frac{442 \cdot 2{,}1 \cdot 210}{8} = 24\,400 \text{ kgcm.}$$

Da die statische Höhe mit $a = 1{,}5$ cm

$$h = 8 - 1{,}5 = 6{,}5 \text{ cm}$$

beträgt, so ermitteln wir nach Gl. 6 oder 6a

$$\beta = \frac{M}{h^2} = \frac{24\,400}{6{,}5^2} = 577{,}5$$

und suchen diesen Wert in Tabelle I auf bezw. schalten geradlinig ein.

Für die Zwecke der Praxis machen wir die Ablesung in jener Spalte der Tabelle I, welche die größere Kantenpressung und den größeren Bewehrungssatz liefert. Es entsprechen hiernach für $\beta = 582$ die Werte

$$\sigma_b = 37 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad p = 0{,}67 \text{ vH.}$$

Die geradlinige Einschaltung hätte nur geringfügig abweichende Ergebnisse, nämlich

$$\sigma_b = 36{,}8 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad p = 0{,}664 \text{ vH.}$$

ergeben.

Man ordnet in vorliegendem Falle auf 1 m Breite die Bewehrung

$$f_e = p \cdot h = 0{,}67 \cdot 6{,}5 = 4{,}35 \text{ cm}^2,$$

d. s. rund 7 R.-E. 9 mm, an.

10. Beispiel: Im 8. Beispiel wurde für das Randfeld einer kontinuierlichen Platte die Stärke und Bewehrung derselben ermittelt. Unter den gleichen Voraussetzungen wie dort ist nun die Bemessung der Platte für die Zwischenfelder durchzuführen, wobei zu beachten sei, daß von der Fremdlast $f = 336$ kg/m² der Anteil $b = 250$ kg/m² auf bewegliche Last entfalle.

Aus praktischen Gründen wird man jene Plattenstärke beibehalten, wie diese im 8. Beispiel für das Randfeld ermittelt wurde, und sich darauf beschränken, eine entsprechende Bewehrung zu ermitteln. Dies geschieht am zweckmäßigsten mit Hilfe der Tabelle I.

Unter Benutzung der im Anhange gegebenen Zusammenstellung A ergibt sich unter der Annahme eines nur dreifeldrigen Zusammenhanges der Platte das größte Feldmoment zu

$$M_2 = + 0{,}025 \frac{1 + 3\alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2.$$

Die bewegliche Last für 1 m² beträgt $b = 250$ kg, die ständige Last $s = 336 - 250 + 0{,}08 \cdot 2400 = 278$ kg.

Das Verhältnis α ist demnach

$$\alpha = \frac{b}{s} = \frac{250}{278} = 0{,}9,$$

so daß sich mit $q = b + s = 528$ kg das größte positive Feldmoment zu

$$M_2 = +0{,}025 \cdot \frac{3{,}7}{1{,}9} \cdot 528 \cdot 2{,}5 \cdot 250 = +16\,100 \text{ kgcm}$$

berechnet. Wäre die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² zulässig, so würden wir weiter genau wie im 9. Beispiel verfahren. Da die zulässige Eisenzugspannung σ_e von dieser Tabellengrundlage abweicht, so ermitteln wir unter Beachtung der Gl. 17 und 18 den in Tabelle I aufzusuchenden β-Wert nach

$$\beta = \frac{M}{h^2} \cdot \frac{1000}{\sigma_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25)$$

also zu

$$\beta = \frac{16\,100}{7^2} \cdot \frac{1000}{950} = 345,$$

welchem mit hinreichender Genauigkeit die Tabellenwerte $\sigma_b' = 27$ und $p = 0{,}39$ entsprechen. Die tatsächliche Kantenpressung wird nach

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{1000} \cdot \sigma_b' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

zu

$$\sigma_b = 0{,}95 \cdot 27 = 25{,}6 \text{ kg/cm}^2$$

berechnet, und die anzuordnende Bewehrung ist für 1 m Breite

$$f_e = 0{,}39 \cdot 7 = 2{,}73 \text{ cm}^2.$$

Wie ersichtlich, wäre es zwecklos, sich der Mühe einer geradlinigen Einschaltung zu unterziehen, welche geringfügig abweichende Werte, nämlich

$$\sigma_b = \frac{950}{1000} \cdot \left(26 + \frac{15}{23} \cdot 1{,}0\right) = 25{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$p = 0{,}37 + \frac{15}{23} \cdot 0{,}02 = 0{,}389 \text{ vH.}$$

ergeben hätte.

Ein wünschenswertes Hilfsmittel für den Praktiker sind Tabellen, welche Angaben über die Stärken, über die Anordnung und Menge der Bewehrung für oft wiederkehrende Randspannungen enthalten und die Ablesung dieser Bestimmungsstücke für das ermittelte Größtmoment gestatten. Vorteilhaft ist die Anwendung solcher Tabellen insbesondere im Brückenbau, wo das Auftreten großer Einzellasten eine Momentenwirkung hervorruft, die sich nicht in so einfacher

Tabelle III. Fahrbahnplatten.

Anordnung der Bewehrung	Skizze	Moment in kgcm, erforderl. Eisenquerschnitt in cm² für 100 cm breiten Plattenstreifen bei den zulässigen Spannungen								
		800/33 kg/cm²			750/33 kg/cm²			1000/40 kg/cm²		
		M_{100}	f_e^z	f_e^d	M_{100}	f_e^z	f_e^d	M_{100}	f_e^z	f_e^d
Einfach bewehrt	8,5 / 8	23 200	5,12	—	24 050	5,70	—	27 700	4,875	—
	7,5 / 9	31 000	5,91	—	32 000	6,58	—	37 000	5,63	—
	8,5 / 10	39 800	6,70	—	41 200	7,46	—	47 500	6,38	—
	9,5 / 11	49 700	7,48	—	51 500	8,32	—	59 300	7,12	—
	10,4 / 12	59 400	8,20	—	61 600	9,12	—	71 000	7,80	—
	11,4 / 13	71 500	8,98	—	74 000	10,00	—	85 300	8,55	—
	12,4 / 14	84 500	9,77	—	87 700	10,87	—	101 000	9,30	—
	13,4 / 15	98 600	10,56	—	102 200	11,75	—	118 000	10,05	—
	14,3 / 16	112 300	11,27	—	116 500	12,55	—	134 000	10,74	—
	15,3 / 17	128 700	12,05	—	133 300	13,42	—	153 500	11,48	—
	16,3 / 18	146 000	12,85	—	151 500	14,30	—	174 200	12,23	—
	17,2 / 19	162 500	13,55	—	168 700	15,10	—	194 000	12,90	—
	18,2 / 20	182 000	14,35	—	189 000	15,95	—	217 000	13,65	—
	19,2 / 21	202 500	15,14	—	210 000	16,85	—	242 000	14,40	—
	20,2 / 22	224 000	15,93	—	232 500	17,70	—	268 000	15,15	—

Anordnung der Bewehrung	Skizze	Moment in kgcm, erforderl. Eisenquerschnitt in cm² für 100 cm breiten Plattenstreifen bei den zulässigen Spannungen								
		800/33 kg/cm²			750/33 kg/cm²			1000/40 kg/cm²		
		M_{100}	f_e^z	f_e^d	M_{100}	f_e^z	f_e^d	M_{100}	f_e^z	f_e^d
Zug- und Druckgurt im Verhältnis $\frac{f_e^z}{f_e^d} = 3$ bewehrt, $\delta = \delta'$	10,4 — 12	67 500	9,30	3,10	71 000	10,55	3,52	80 100	8,83	2,95
	11,4 — 13	81 000	10,20	3,40	85 300	11,57	3,86	96 300	9,70	3,23
	12,4 — 14	96 000	11,10	3,70	101 000	12,60	4,20	114 000	10,53	3,52
	13,4 — 15	112 000	12,00	4,00	118 000	13,60	4,53	133 000	11,40	3,80
	14,3 — 16	131 200	13,12	4,37	137 800	14,82	4,94	155 000	12,41	4,14
	15,3 — 17	150 200	14,05	4,68	157 800	15,85	5,28	178 000	13,30	4,43
	16,3 — 18	170 800	14,95	4,98	179 000	16,90	5,64	202 000	14,15	4,72
	17,2 — 19	192 000	15,90	5,30	202 000	18,00	6,00	227 500	15,06	5,02
	18,2 — 20	215 000	16,80	5,60	226 000	19,05	6,35	254 000	15,95	5,32
	19,2 — 21	239 500	17,73	5,91	251 600	20,10	6,70	283 000	16,81	5,60
	20,2 — 22	264 500	18,70	6,22	278 000	21,13	7,04	313 500	17,70	5,90

Gestalt ausdrücken läßt, als dies für die gleichförmigen Lasten des Hochbaues vorwiegend der Fall ist. In dieser Erkenntnis wurde vom Verfasser die Tabelle III aufgestellt, deren Gebrauch sich ohne weiteres erklärt.

2. Plattenbalkenquerschnitte.

Wie eingangs erwähnt, wird sich der Konstrukteur bei der Bestimmung der Abmessungen innerhalb der aus Sicherheitsgründen gebotenen Grenzen von wirtschaftlichen Grundsätzen leiten lassen. Die wirtschaftlich günstigste statische Höhe h ergibt sich aus dem Kostenminimum des Balkens.

Bei der Ausführung von Plattenbalken stellt sich der Fall zumeist so, daß die Verlagsweite der Balken von vornherein gegeben ist, indem sich die Balkenteilung der Fensterachsenentfernung u. dgl. m. anzupassen hat. Eine Untersuchung, welche bestrebt ist, die zur Erreichung des Kostenminimums erforderliche Balkenhöhe und überdies die hierzu günstigste Verlagsweite der Balken zu ermitteln, hat für den Praktiker geringen Wert. Die nach solcher Rechnung ermittelte veränderliche Balkenteilung berücksichtigt die Nebenumstände nicht und stellt somit tatsächlich nicht das Kostenminimum dar; es stellt sich bei derselben z. B. die Notwendigkeit der Anordnung von Fenster- und Türüberlagen heraus, welche bei einer nach praktischen Gesichtspunkten frei gewählten, den Bauverhältnissen angepaßten Verlagsweite der Balken vermieden werden können und die Decke in dieser Form zu einem wirklichen Kostenminimum herzustellen gestatten. Die Wahl gleicher Balkenverlagsweiten für mehrere Deckenspannweiten gibt die Möglichkeit zur Wiederverwendung der Schalungen am selben Bau, unter Umständen auch für mehrere Gebäude, wodurch die Herstellungskosten in ausschlaggebenderer Weise ermäßigt werden, als dies durch stetigen Wechsel der Verlagsweiten zu erreichen ist. Nach dem Angeführten ergibt sich, daß die Verlagsweite nicht nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten berechnet werden soll, sondern deren freie Wahl dem praktischen Ermessen anheimgestellt bleiben muß.

Da die Kosten der Platte bei gegebener Belastung und schließlich festgelegter Verlagsweite keiner Aenderung mehr unterworfen sind, so kommen dieselben bei der Ermittlung der günstigsten statischen Höhe h des Balkens nicht mehr in Betracht. Dasselbe gilt für die Kosten der Schalung des Balkenrechtecks. Die Schalungen sind, um unnützen Holzverschnitt zu vermeiden, so eingerichtet, daß durch bloßes Höher- oder Tiefersetzen des Schalungsbodens die Trägerhöhe ohne Kostenmehraufwand in weiten Grenzen geregelt werden kann. So veranschaulicht Abb. 3, daß der Schalungsaufwand derselbe bleibt, ob man den Trägerboden in der Lage L oder L' verschraubt.

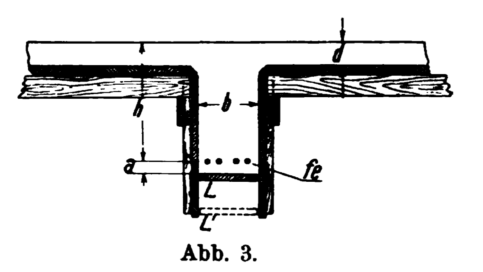


Abb. 3.

Unsere Aufgabe beschränkt sich somit auf die Ermittlung des Kostenkleinstwertes für den Materialaufwand im Balkenrechteck, welches unterhalb der Platte liegt.

Bezeichnen wir mit P_E den Preis für 100 kg Eisen und mit P_B den Preis für 1 m³ Beton, so entfallen auf 1 cm² Bewehrungsquerschnitt die Kosten $P_e = 0{,}0078 \cdot P_E$ und auf 1 cm² Betonquerschnitt des Balkens $P_b = 0{,}0001 \cdot P_B$. Die Querschnittsfläche der Bewehrung beträgt f_e cm², jene des Balkenbetons $b\,(h + a - d)$. Es sind also die zum Vergleich verschiedener Trägerhöhen maßgebenden Kosten

$$K = f_e \cdot P_e + b\,(h + a - d) \cdot P_b \quad . \quad . \quad 27).$$

Auf den Balken wirkt das von der Gesamtbelastung herrührende Moment M in kgcm ein. Setzen wir mit gut zutreffender Annäherung wie früher den Hebelarm des inneren Kräftepaares im Balken mit $m = 0{,}925\,h$ ein, so wird für die zulässige Eisenzugspannung der erforderliche Bewehrungsquerschnitt nach Gl. 12 zu

$$f_e = \frac{M}{0{,}925\,h \cdot \sigma_e}$$

erhalten. Führen wir diesen Wert in Gl. 27 ein, so ergibt sich:

$$K = \frac{M \cdot P_e}{0{,}925 \cdot \sigma_e} + b \cdot (h + a - d) \cdot P_b \quad . \quad . \quad 28).$$

Die Kosten werden ein Kleinstwert für

$$\frac{dK}{dh} = -\frac{M \cdot P_e}{0{,}925\,h^2 \cdot \sigma_e} + b \cdot P_b = 0 \quad . \quad . \quad 29).$$

Die Bedingung 29 ergibt die dem Kostenkleinstwert entsprechende statische Höhe h des Balkens zu

$$h = \sqrt{\frac{M \cdot P_e}{0{,}925 \cdot \sigma_e \cdot b \cdot P_b}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30).$$

Das Moment M des Balkens von der Stützweite l m und der Gesamtbelastung q kg für 1 lfd. m ergibt sich in kgcm aus

$$M = 100 \cdot \frac{q l^2}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

sofern nicht der Ermittlung des Momentes nach der Zusammenstellung A des Anhanges der Vorzug gegeben wird. Die Belastung q setzt sich aus der Gesamtbelastung des auf den Balken entfallenden Plattenstreifens, welche aus der vorangegangenen Plattenberechnung bekannt ist, und aus dem Eigengewicht des Balkens zusammen. Dieses letztere muß eingeschätzt werden; am zutreffendsten geschieht dies mit der Formel $3{,}5 \cdot l^2$, welche das Balkengewicht für 1 lfd. m in kg gibt, wenn l in m eingesetzt wird.

Führen wir den Ausdruck des Momentes M nach Gl. 31 in die Gl. 30 ein, so haben wir

$$h = 10 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{q \cdot P_e}{0{,}925 \cdot k \cdot \sigma_e \cdot b \cdot P_b}} \quad . \; . \quad 32).$$

Für die besonderen Werte $k = 8$, $\sigma_e = 1000$ kg/cm² und der Balkenbreite b cm $= 3 \cdot l$ m wird daraus

$$h = \sqrt{\frac{q \cdot l \cdot P_e}{222 \cdot P_b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 33).$$

11. Beispiel: Es wäre die wirtschaftlichste statische Höhe des im Beispiel 6 der preußischen ministeriellen Bestimmungen vom 24. Mai 1907 gegebenen Plattenbalkens unter der Annahme eines Eisenpreises von 16 Mark für 100 kg und eines Betonpreises von 30 Mark für 1 m³ zu ermitteln.

Die Belastung q für 1 lfd. m des 7,5 m weiten Balkens beträgt:

Fußbodengewicht 1,5 · 90	=	135 kg
Nutzlast für 1 m Balken	=	500 „
Plattengewicht 0,1 · 2400 · 1,5	=	360 „
geschätztes Balkengewicht 3,5 · 7,5² . .	=	197 „
	q =	1192 kg.

Man ermittelt

$$P_e = 0{,}0078 \cdot 16 = 0{,}125,$$
$$P_b = 0{,}0001 \cdot 30 = 0{,}003,$$

daher

$$\frac{P_e}{P_b} = \frac{125}{3} = 41{,}6,$$

und nach Gl. 33:

$$h = \sqrt{\frac{1192 \cdot 7{,}8 \cdot 41{,}6}{222}} = 41{,}75 \text{ cm}.$$

Die im dortigen Beispiel gewählte statische Höhe von $h = 36$ cm würde einem Kostenkleinstwert dann entsprechen, wenn für die zuständige Baustelle das Verhältnis der Baustoffpreise $\frac{P_e}{P_b} = 31$, also z. B. die Grundpreise $P_E = 16$ Mark und $P_B = 40{,}2$ Mark zutreffen würden.

Die Erfahrung belehrt uns, daß für die in Betracht kommenden Kostenverhältnisse dem Kleinstwert der Balkenkosten eine Druckinanspruchnahme des Betons entspricht, welche tief unter dem zulässigen Wert liegt. So kommt

beispielsweise der im 11. Beispiel berechneten wirtschaftlichen Höhe nach Gl. 14a eine Kantenpressung von

$$\sigma_b = \frac{\frac{908\,000}{1{,}5 \cdot 10^2} + 6000}{100 \cdot 4{,}175} = 28{,}9 \text{ kg/cm}^2$$

zu. Es darf also im allgemeinen nicht befürchtet werden, daß bei Verwendung der Formel 32 eine Ueberschreitung der zulässigen Inanspruchnahme des Betons auf Druck eintritt. Anderseits führt diese Tatsache zu einer Methode der Bemessung von Plattenbalken, welche, ohne in die Detailpreise jeder Baustelle einzugehen, dem wirtschaftlichen Standpunkt dadurch Rechnung trägt, daß die Bemessung für die diesem Zweck am günstigsten gelegene Kantenpressung $\sigma_b = 30$ kg/cm² durchgeführt wird.

Hat ein Plattenbalken nach Abb. 1 das Moment M kgcm für die Druckgurtbreite $B \leqq \frac{l}{3}$*) aufzunehmen, so entfällt auf 100 cm der Druckgurtbreite das Moment $M_{100} = \frac{M}{B}$, wobei B in m gemessen ist. Für die Zwecke der Bemessung läßt sich auch beim Plattenbalken die statische Höhe vorteilhafter nach der Formel

$$h = \sqrt{\frac{M_{100}}{r}} \quad \ldots\ldots \quad 34),$$

welche einen ähnlichen Aufbau wie die Gl. 16 und 18 zeigt, ermitteln. Während aber der für Platten und Rechteckquerschnitte gültige β-Wert der Gl. 16 und 18 einzig nur vom Randspannungsverhältnis

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

abhängig ist, steht der in Gl. 34 vorkommende Wert r auch zum Höhenverhältnis des Plattenbalkens

$$k_1 = \frac{h}{d}$$

in Beziehung (Abb. 1), wie dies in den bekannten Plattenbalkendiagrammen des Verfassers, von welchen Tabelle II einen Auszug bringt, zum Ausdruck gelangt. Wie aus jener Tabelle ersichtlich, läßt sich das für 1 m Druckgurt-

*) Nach der neuen österreichischen Regierungsvorschrift vom 15. Juni 1911 ist für staatliche Bauten die zu berücksichtigende Druckgurtbreite durch § 5, Punkt 12 festgelegt.

breite entsprechende Moment nach $M_{100} = k_2 \cdot d^2$ und nach Gl. 34 $M_{100} = r h^2$ ermitteln, welche identische Werte ergeben müssen. Berücksichtigen wir, wie in Tabelle II, das Höhenverhältnis

$$k_1 = \frac{h}{d},$$

so läßt sich unschwer mit Hilfe der Tabellenwerte der Beiwert r zu

$$r = \frac{k_2}{k_1^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35)$$

ermitteln.

Wenn wir also eine allgemein brauchbare Formel nach Gl. 34 erhalten wollen, welche auch in wirtschaftlicher Hinsicht im allgemeinen zutreffende Ergebnisse zu liefern befähigt sein soll, so ermitteln wir für $\sigma_b = 30$ kg/cm² für die gebräuchlichsten Höhenverhältnisse im Hochbau: $k_1 = 3$ bis 7 die zugehörigen k_2-Werte und berechnen nach Gl. 35 den Beiwert r.

Die Tabelle II ergibt:

bei $k_1 = 3$, $k_2 = 3\,750$, daher $r = \frac{k_2}{k_1^2} = \frac{3750}{9} = 418$,

„ $k_1 = 4$, $k_2 = 6\,350$, „ $r = \frac{6350}{16} = 396$,

„ $k_1 = 5$, $k_2 = 9\,250$, „ $r = \frac{9250}{25} = 370$,

„ $k_1 = 6$, $k_2 = 12\,175$, „ $r = \frac{12\,175}{36} = 337$,

„ $k_1 = 7$, $k_2 = 15\,125$, „ $r = \frac{15\,125}{49} = 308$.

Wir sehen also, daß beim Plattenbalken infolge verschiedener Höhenverhältnisse k_1 die Beiwerte auch bei ein und demselben Randspannungsverhältnis verschiedene Größe haben.

Die zugehörigen Bewehrungen sind in Tabelle II in Prozenten φ nach der Druckgurtfläche $B \cdot d$ ausgedrückt, für $B = 1{,}00$ m Druckgurtbreite ist die Bewehrung somit $f_{e100} = \varphi \cdot d$, wobei f_e in cm² für d in cm erhalten wird. Da aus dem Höhenverhältnis

$$d = \frac{h}{k_1}$$

gefunden wird, so kann dieselbe Bewehrung auch in der Form wie bei den Platten- und Rechteckquerschnitten zu

$$f_{e\,100} = \frac{\varphi \cdot h}{k_1} = p \cdot h$$

ausgedrückt werden. Der Bewehrungssatz ist also nach der Fläche $B \cdot h$ zu nehmen, was besonders für die Zwecke der Kostenveranschlagung praktischer ist. Auch hier ändern sich trotz desselben Randspannungsverhältnisses die Bewehrungssätze mit dem Höhenverhältnis k_1 des Plattenbalkens.

Der Tabelle II entsprechen:

bei $k_1 = 3$, $\varphi = 1{,}37$ vH., daher $p = \frac{\varphi}{k_1} = \frac{1{,}37}{3} = 0{,}464$ vH.,

„ $k_1 = 4$, $\varphi = 1{,}78$ „ „ $p = \frac{1{,}78}{4} = 0{,}445$ vH.,

„ $k_1 = 5$, $\varphi = 2{,}04$ „ „ $p = \frac{2{,}04}{5} = 0{,}406$ „ ,

„ $k_1 = 6$, $\varphi = 2{,}20$ „ „ $p = \frac{2{,}20}{6} = 0{,}365$ „ ,

„ $k_1 = 7$, $\varphi = 2{,}30$ „ „ $p = \frac{2{,}30}{7} = 0{,}329$ „ .

Um erste Anhaltspunkte für die statische Höhe h des Plattenbalkens zu erhalten oder für die Zwecke der Veranschlagung empfiehlt es sich, aus den r-Werten der Verhältnisse $k_1 = 3$ bis 7 den Mittelwert $r = 366$ und in gleichem Sinne einen Mittelwert der Bewehrungssätze $p = 0{,}4$ vH. zu gebrauchen.

Hat somit ein Plattenbalken mit der Druckgurtbreite B in m das positive Moment M kgcm aufzunehmen, so ermitteln wir für die oben erwähnten Zwecke mit hinreichender Genauigkeit für eine Eisenzugspannung von $\sigma_e = 1000$ kg/cm² die statische Höhe in cm

$$h = \sqrt{\frac{M}{366 \cdot B}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 36)$$

und die Rippenbewehrung in cm² zu

$$f_e = 0{,}4 \cdot B \cdot h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 37),$$

wenn in dieser Formel h in cm eingeführt wird.

Zu einer schärferen Berechnung können die vorangeführten, den k_1-Werten entsprechenden r bezw. p sinngemäße Anwendung finden.

Bei kontinuierlichen Plattenbalken verfährt man in der Regel im gleichen Sinne wie bei den Platten, daß man die für die Randfelder ermittelten statischen Höhen in gleicher Größe für die Zwischenfelder beibehält und lediglich für den hier geringeren Momentenwert die Bewehrung gemäß Gl. 12 zu

$$f_e = \frac{M}{0{,}925\, h \cdot \sigma_e} \quad \ldots\ldots \quad 38)$$

ermittelt.

12. Beispiel: Es sind die durchlaufenden Balken der in den Beispielen 8 und 10 berechneten Platten zu bemessen. Die Stützweite der Balken-Rand- und Zwischenfelder beträgt 6,5 m. Die zulässigen Spannungen sind 950/40 kg/cm².

An der Hand der früheren Beispiele erheben wir die bewegliche Last auf 1 m des Balkens zu

$$b = 2{,}5 \cdot 250 = 625 \text{ kg}$$

und die ständige Last auf 1 m

von Platte und Belag . . $2{,}5 \cdot 278 = 695$ kg,
geschätztes Balkengewicht . $3{,}5 \cdot \overline{6{,}5}^2 = 150$ „
$s = 845$ kg

so daß die Gesamtlast $q = 1470$ kg/m' beträgt.

Nach Anhang, Zusammenstellung A ergibt sich für

$$\alpha = \frac{b}{s} = \frac{625}{845} = 0{,}74$$

für den dreifeldrigen Zusammenhang im Randfelde

$$M_1 = +0{,}08 \cdot \frac{1 + 1{,}25\alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2$$

$$= +0{,}08 \cdot \frac{1{,}925}{1{,}74} \cdot 1470 \cdot 6{,}5 \cdot 650 = +550\,000 \text{ kgcm.}$$

Es ist nun zu beachten, daß dem Moment M in Gl. 36 die Eisenzugspannung 1000 kg/cm² entspricht, während hier der zulässige Wert $\sigma_e = 950$ kg/cm² beträgt. Wir ermitteln also vorerst

$$M' = \frac{1000}{\sigma_e} \cdot M = \frac{1000}{950} \cdot 550\,000 = 579\,000 \text{ kgcm}$$

und dann nach Gl. 36 mit der Druckgurtbreite

$$B = \frac{6{,}5}{3} = 2{,}16 \text{ m}$$

die statische Höhe

$$h = \sqrt{\frac{M'}{366 \cdot B}} = \sqrt{\frac{579\,000}{366 \cdot 2{,}16}} = 27 \text{ cm.}$$

Die Gl. 37 liefert für die Trägerrippe die Bewehrung

$$f_e = 0{,}4 \cdot 2{,}16 \cdot 27 = 23{,}3 \text{ cm}^2.$$

In den Zwischenfeldern ist nach Zusammenstellung A des Anhangs

$$M_2 = +\,0{,}025 \cdot \frac{1+3\alpha}{1+\alpha} \cdot q \cdot l^2 =$$

$$= +\,0{,}025 \cdot \frac{3{,}22}{1{,}74} \cdot 1470 \cdot 6{,}5 \cdot 650 = 287\,000 \text{ kgcm.}$$

Aus praktischen Rücksichten behalten wir in den Zwischenfeldern die für das Randfeld berechnete statische Höhe von 27 cm bei, es ist daher bloß die Bewehrung nach Gl. 38 zu berechnen. Dieselbe ist für die Balkenrippe

$$f_e = \frac{287\,000}{0{,}925 \cdot 27 \cdot 950} = 12{,}1 \text{ cm}^2.$$

Die im 8., 10. und 12. Beispiel durchgeführten Berechnungen, welche sich auf die Feldmomente der durchlaufenden Platten bezw. Balken beschränken, reichen vollkommen aus, um die Veranschlagung der Kosten vornehmen zu können. Das Mehrerfordernis für die ihrem absoluten Wert nach größeren negativen Stützenmomente an statischer Höhe wird leicht durch voutenförmigen Anlauf der Platten und Träger und das etwa nötige Mehrerfordernis an Bewehrung wird durch den Uebergriff der Feldbewehrungen gedeckt. Dieser Mehraufwand wird durch entsprechende Gestaltung der Behelfe für die Veranschlagung berücksichtigt.

Zur endgültigen Ausführung müssen selbstredend auch jene Querschnitte in ihren Abmessungen festgelegt werden, wozu sich eines der hier erörterten Verfahren für einfach oder beiderseits bewehrte Rechteckquerschnitte eignet.

Auf Biegung in Anspruch genommene Querschnitte mit Zug- und Druckbewehrung.

Bemessung zugleich Spannungsnachweis.

Erreicht das von einem Querschnitt aufzunehmende Moment eine solche Größe, daß mit der Anordnung einer einfachen Bewehrung eine Ueberschreitung der zulässigen Kantenpressung im Beton eintreten würde, so ergibt sich in dem Falle, als man an die Querschnittshöhe gebunden ist,

die Notwendigkeit zur Anordnung einer Druckbewehrung. Bei geringer Ueberschreitung der zulässigen Kantenpressung läßt sich die Druckbewehrung noch dadurch vermeiden, daß man für eine geringere Eisenzugspannung als zugelassen ist die Zugbewehrung bemißt. Man schlug in der Praxis bis in die jüngste Zeit den umständlichen Weg ein, daß man in solchen Fällen zu gewählten Bewehrungen die Spannungen ermittelte und diesen Vorgang mehrmals wiederholte, bis man zu einem halbwegs entsprechenden Querschnitt gelangte. Dabei war es einem glücklichen Griffe zu verdanken, wenn zufällig beide Randspannungen gerade die zulässigen Spannungswerte, d. h. die hier gebotene Vollausnutzung aufwiesen. In den meisten Fällen gab sich der Konstrukteur damit zufrieden, wenn die Kantenpressung im Beton nahe dem zulässigen Wert, die Eisenzugspannung jedoch weit unterhalb der zulässigen Grenze gelegen war. Man beschied sich mit diesem Ergebnis nur aus dem Grunde, um einer neuerlichen aufreibenden Rechnungsarbeit enthoben zu sein, trotzdem die wirtschaftlichen Vorteile zumeist bei einer gleichzeitigen Vollausnutzung beider Randspannungen zutage treten.

Es wird daher das Bestreben der Konstrukteure erklärlich, für solche Fälle ein Verfahren anzuwenden, welches mit einer Rechnung die Bewehrungen für Vollausnutzung beider Randspannungen liefert. Dieser Vorgang macht den Spannungsnachweis vollständig überflüssig, da doch die Bemessung auf Grund vorausgesetzter Spannungen durchgeführt wird.

Ein Eingehen auf Berechnungsverfahren, welche für gegebene Querschnitte zur Ermittlung der Spannungen führen, ist somit hier nicht allein für den Konstrukteur, sondern auch für den überprüfenden Ingenieur im praktischen Sinne bedeutungslos.

Im folgenden wird die einfache Methode des Verfassers*) theoretisch begründet und durch Beispiele erläutert.

Hat ein Eisenbetonquerschnitt beliebiger Form und beliebiger Anordnung der Bewehrung ein Moment M aufzunehmen, so berechnen sich mit Hilfe des bekannten Trägheitsmoments J die Randspannungen:

Beton an der Kante auf Druck: $$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot x \quad 39),$$

Eisen auf Zug: $$\sigma_e = \frac{M}{J} \cdot (h - x) \cdot n \quad . \; . \; . \quad 40).$$

*) Beton u. Eisen 1906, Heft VIII, S. 210.

Das Verhältnis v der Randspannungen läßt sich hiernach zu

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{\frac{M}{J} \cdot (h - x) \cdot n}{\frac{M}{J} \cdot x} = \frac{(h - x) \cdot n}{x} \quad . \quad 41)$$

ermitteln.

Aus dieser zuletzt angeschriebenen Beziehung erkennen wir, daß jedem gegebenen Randspannungsverhältnis v ein eindeutig festgelegter Anteil der „Nutzhöhe" h als Druckgurthöhe x entspricht, denn wir erhalten nach Umformung der Gleichung 41:

$$x = \frac{n}{v + n} \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42).$$

Erreicht das von einem Querschnitt aufzunehmende Moment einen so großen Wert, daß die zulässige Betonkantenpressung bei unbewehrtem Druckgurt überschritten ist, so sind wir — im Falle keiner Möglichkeit einer anderen Veränderung des Querschnitts — gezwungen, den Druckgurt durch Einlegen von Bewehrungen derart zu verstärken, daß die zulässige Betonkantenpressung nicht überschritten werde. Die Aufgabe des Konstrukteurs ist also die:

> dem in seinen äußerlichen Umrissen gegebenen Querschnitt solche Bewehrungen im Zug- und Druckgurt beizufügen, daß die durch die betreffende Vorschrift gegebenen zulässigen Randspannungen σ_e und σ_b nicht überschritten werden.*)

Sind die Randspannungen, somit auch deren Verhältnis v gegeben, so läßt sich für die vorliegende Nutzhöhe h die Lage der Neutralen zu

$$x = \frac{n}{v + n} \cdot h$$

berechnen. Aus

$$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot x$$

ist nun für die gegebenen Größen M, σ_b und x das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = \frac{M}{\sigma_b} \cdot x$$

gegeben.

---

*) Unter Umständen wird durch ein freiwilliges Tiefersetzen der Eisenzugspannung σ_e, also durch Vergrößerung des Druckgurtbereiches ein günstigeres wirtschaftliches Ergebnis erzielt.

Für den in seinen äußeren Abmessungen vollständig gegebenen Querschnitt (Abb. 4) sind nur die Bewehrungen f_e^d und f_e^s unbekannt. Um die von vornherein bekannten Größen x und J zu den Abmessungen und Bewehrungen des Querschnitts in Beziehung zu bringen, stellen wir Gl. 43, welche wir bei einem vollständig in Abmessungen und Bewehrung gegebenen Querschnitt zur Ermittlung der x-Lage, und die Gl. 44, welche wir bei ebenso gegebenem Querschnitt zur Ermittlung des Trägheitsmoments bezüglich der Neutralen benutzen würden, auf. Mit Bezug auf die Querschnittsskizze sind dies die Gleichungen:

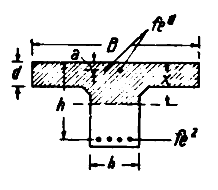


Abb. 4.

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a) - n \cdot f_e^s \cdot (h-x) - \frac{B-b}{2} \cdot (x-d)^2 + \frac{Bx^2}{2} = 0 \quad 43)$$

und

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a)^2 + n \cdot f_e^s \cdot (h-x)^2 + \frac{Bx^3}{3} - \frac{B-b}{3} \cdot (x-d)^3 = J \quad 44).$$

So wie nun diese beiden Gleichungen bei gegebenen Abmessungen und Bewehrungen zur Ermittlung der Größen x und J dienlich sind, so ist es auch in umgekehrter Weise möglich, diese zwei Gleichungen für gegebene Werte x und J zur Ermittlung beliebiger zwei anderer Bestimmungsstücke des statischen Querschnitts, welche in den beiden Gleichungen in der ersten Potenz vorkommen, zu benutzen. Es sind dies die Größen B, b, f_e^d und f_e^s, welche in beliebiger Variation als paarweise Unbekannte vorkommen können, als: B und b, B und f_e^d, B und f_e^s, b und f_e^d, b und f_e^s, f_e^d und f_e^s. Die letzte dieser Kombinationen ist für die Praxis die wichtigste.

Sehen wir aus der Ermittlung

$$x = \frac{n}{v+n} \cdot h,$$

daß $x \leqq d$ ist, so ist klar, daß die Gl. 43 und 44 jene Glieder, welche mit $(B-b)$ multipliziert erscheinen, einbüßen und dann

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a) - n \cdot f_e^s \cdot (h-x) + \frac{Bx^2}{2} = 0 \quad . \quad 45)$$

und

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a)^2 + n \cdot f_e^s \cdot (h-x)^2 + \frac{Bx^3}{3} = J \quad . \quad 46)$$

lauten.

Diese letztangeschriebenen Gleichungen gelten bekanntlich auch dann, wenn es sich um die Berechnung voller Rechteckquerschnitte oder Platten $B \cdot h$ handelt.

Von den oben angeschriebenen Kombinationen hat, wie erwähnt, die letzte für die Praxis die größte Bedeutung, da die äußeren Abmessungen in solchen Fällen immer gegeben, die Bewehrungen f_e^d und f_e^z zu suchen sind.

Die umgeformten Gl. 43 und 44 lauten:

$$\left.\begin{aligned} n \cdot f_e^d \cdot (x-a) - n \cdot f_e^z \cdot (h-x) = \frac{B-b}{2} \cdot (x-d)^2 \\ - \frac{Bx^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad 47)$$

und

$$\left.\begin{aligned} n \cdot f_e^d \cdot (x-a)^2 + n \cdot f_e^z \cdot (h-x)^2 = \frac{B-b}{3} \cdot (x-d)^3 \\ - \frac{Bx^3}{3} + \frac{M}{\sigma_b} \cdot x \end{aligned}\right\} \quad 48).$$

Die gemeinsame Auflösung nach f_e^d und f_e^z ergibt nun für den statischen T-Querschnitt (Lage der Nullinie im Steg):

$$f_e^d = \frac{(B-b) \cdot (x-d)^2 \cdot \frac{3h-x-2d}{6} - \frac{Bx^2}{6} \cdot (3h-x) + \frac{M}{\sigma_b} \cdot x}{n^* \cdot (x-a) \cdot (h-a)} \quad 49)$$

und

$$f_e^z = \frac{(B-b) \cdot (x-d)^2 \cdot \frac{3a-2d-x}{6} + \frac{Bx^2}{6} \cdot (x-3a) + \frac{M}{\sigma_b} \cdot x}{n \cdot (h-x) \cdot (h-a)} \quad 50).$$

Für den statischen Rechteckquerschnitt (voller Querschnitt von der Breite B und T-Querschnitt mit $x \leqq d$) liefern die umgeformten Gleichungen:

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a) - n \cdot f_e^z \cdot (h-x) = - \frac{Bx^2}{2} \quad . \; . \; 51)$$

und

$$n \cdot f_e^d \cdot (x-a)^2 + n \cdot f_e^z \cdot (h-x)^2 = \frac{M}{\sigma_b} \cdot x - \frac{Bx^3}{3} \quad 52)$$

die beiden Unbekannten zu

$$f_e^d = \frac{\frac{M}{\sigma_b} \cdot x - \frac{Bx^2}{6} \cdot (3h-x)}{n^* \cdot (x-a) \cdot (h-a)} \quad . \; . \; 53)$$

und

$$f_e^z = \frac{\frac{M}{\sigma_b} \cdot x + \frac{Bx^2}{6} \cdot (x - 3\,a)}{n \cdot (h - x) \cdot (h - a)} \quad . \quad . \quad 54),$$

welche Werte auch direkt aus den Gl. 49 und 50 erhalten werden, wenn man für den „statischen Rechteckquerschnitt“ in jenen Formeln die Glieder, welche mit $(B - b)$ multipliziert erscheinen, gleich Null setzt.

In manchen Vorschriften ist verlangt, daß die geringe im Druckgurt von den f_e^d-Eisen verdrängte Betonfläche dortselbst in Abzug gebracht werde. Auch diesem Verlangen kann in einfachster Weise entsprochen werden, indem in den Nennern der Gl. 49 bezw. der Gl. 53 statt des Wertes n^* der Wert $(n - 1)$ eingeführt wird. Ist diese Forderung nicht aufgestellt, so wird für n^* der Wert n eingeführt. Die Gl. 50 bezw. 54 bleiben in allen Fällen hiervon unberührt.

Ein Hauptvorzug dieser Berechnungsweise ist der, daß ein nachträglicher Spannungsnachweis vollständig überflüssig ist, weil die Einhaltung bestimmter Spannungswerte die Voraussetzung der Rechnung bildet. Aber auch die dritte in der Rechnung nicht vorkommende Spannung σ_e^d kann nie eine Ueberschreitung liefern, da dieselbe $\sigma_e^d < n \cdot \sigma_b^d$ sein muß, also nach

$$\sigma_e^d < 15 \cdot 45 = 675 \text{ kg/cm}^2$$

den Wert von 675 kg/cm² nie erreichen kann.

Darüber, ob eine Druckbewehrung nötig ist, oder ob die zulässige Kantenpressung σ_b „gerade erreicht“ oder „unterschritten“ wird, gibt der Zähler der Gl. 49 bezw. 53 Auskunft.

Ergibt sich für den Zähler ein positiver Wert, so ist Druckbewehrung erforderlich; ergibt der Zähler Null, so ist die vorausgesetzte Kantenpressung „gerade erreicht“, also keine Druckbewehrung nötig; ergibt sich für den Zähler ein negativer Wert, so deutet dies an, daß ohne Druckbewehrung ein kleinerer Kantendruck erhalten wird, als erlaubt wäre. Die Gleichung (Zähler von Gl. 49):

$$(B-b) \cdot (x-d)^2 \cdot \frac{3h-x-2d}{6} - \frac{Bx^2}{6} \cdot (3h-x) + \frac{M}{\sigma_b} \cdot x = Z \quad 55)$$

bezw. (Zähler von Gl. 53):

$$\frac{M}{\sigma_b} \cdot x - \frac{Bx^2}{6} \cdot (3\,h - x) = Z \quad . \quad . \quad 56)$$

liefert also, in obiger Weise beurteilt, das wichtige Kriterium für die Druckbewehrung. Es läßt sich aus dieser Gleichung auch jenes Moment M berechnen, welches der Querschnitt ohne Beifügung einer Druckbewehrung für die gegebenen zulässigen Spannungen σ_e^z und σ_b^d verträgt, indem wir $Z = 0$ setzen.

Zwischen jenem Querschnitt mit $M = 0$ und mit M_{max} läßt sich die Verteilung der Druckbewehrung wie folgt bewirken. Dem M_{max} entspricht $f^d_{e\,max}$, dem Querschnitt mit dem Moment M entspricht $f_e^d = f^d_{e\,max} - \Delta f_e^d$, wobei nach Gl. 49 oder 53

$$\Delta f_e^d = \frac{(M_{max} - M) \cdot x}{\sigma_b \cdot n^* \cdot (x - a) \cdot (h - a)} \quad . \quad . \quad 57)$$

ist.

13. Beispiel: Ein Hauptbahnobjekt vom skizzierten Querschnitt (Abb. 5) mit 4,5 m Lichtweite bezw. 5 m Stützweite hat von Eigenlast herrührend das Moment

$$M^g = \frac{1}{8} \cdot 8540 \cdot 5 \cdot 500 = 2\,660\,000 \text{ kgcm},$$

von Verkehrslast herrührend das Moment

$$M^V = 42{,}6 \text{ tm} = 4\,260\,000 \text{ kgcm},$$

d. i. zusammen $M = 6\,920\,000$ kgcm, aufzunehmen.

Nach den geltenden Vorschriften wären die Spannungen $\sigma_b = 30$ kg/cm² und $\sigma_e = 750 + 4 \cdot 4 \text{ m} = 766$ kg/cm², ferner das Verhältnis

$$n = \frac{E_e}{E_b} = 15$$

sowie die Verdrängung des Betons durch die Druckbewehrung zu berücksichtigen.

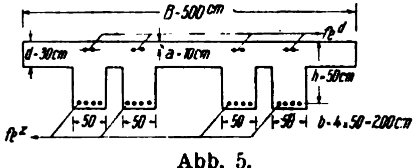


Abb. 5.

Die Berechnung wird für den ganzen Querschnitt durchgeführt. Wir erhalten für

$$v = \frac{766}{30} = 25{,}5 \quad \text{zunächst} \quad x = 50 \cdot \frac{15}{15 + 25{,}5} = 18{,}5 \text{ cm}$$

und

$$J = \frac{M}{\sigma_b} \cdot x = \frac{6\,920\,000}{30} \cdot 18{,}5 = 4\,250\,000 \text{ cm}^4.$$

Da $x < d$, so gelten die Formeln 53 und 54, bezw. ist in den Formeln 49 und 50 $B = b$ zu setzen. Wegen der

Verdrängung des Betons durch die Druckeisen ist im Nenner von 53 bezw. von 49 an Stelle von n^z der Wert $n - 1 = 14$ zu setzen. Man berechnet so:

$$f_e^d = \frac{4\,250\,000 - \frac{500}{6} \cdot \overline{18{,}5}^2 \cdot 131{,}5}{14 \cdot 8{,}5 \cdot 40} = 105 \text{ cm}^2$$

und

$$f_e^z = \frac{4\,250\,000 + \frac{500}{6} \cdot \overline{18{,}5}^2 \cdot (18{,}5 - 3 \cdot 10)}{15 \cdot 31{,}5 \cdot 40} = 208 \text{ cm}^2,$$

welche Querschnittsflächen nun durch entsprechende Rundeisen zu decken sind.

Handelt es sich um die Berechnung der Bewehrungen für kreuzförmige Querschnitte, die zuweilen auch in der Praxis vorkommen, so ist es vorteilhafter, die Bedingungsgleichungen nicht in allgemeiner Form, sondern mit den tatsächlichen Abmessungen aufzustellen.

14. Beispiel: Der Querschnitt im Viertel der Stützweite einer beiderseits eingespannten Balkenbrücke habe ein Moment von der Größe $M = 4\,275\,000$ kgcm aufzunehmen, wobei die Inanspruchnahmen die Werte $\sigma_e = 880$ kg/cm² und $\sigma_b = 38$ kg/cm² nicht überschreiten dürfen. Die äußeren Abmessungen des Querschnitts sind nach Abb. 6 gegeben, die Bewehrungen sind entsprechend zu ermitteln.

Abb. 6.

Dem Verhältnis

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{880}{38} = 23{,}15$$

entspricht

$$x = 89 \cdot \frac{15}{15 + 23{,}15} = 35 \text{ cm},$$

das erforderliche Trägheitsmoment ist

$$J = \frac{4\,275\,000}{38} \cdot 35 = 3\,940\,000 \text{ cm}^4.$$

Die Bedingungsgleichungen lauten demnach:

$$\frac{32 \cdot 35^2}{2} + \frac{78 \cdot \overline{20}^2}{2} + 15 \cdot 29 \cdot f_e^d - 15 \cdot 54 \cdot f_e^z = 0$$

oder

$$435 \cdot f_e^d - 810\, f_e^z = -35\,200 \quad . \; . \; . \quad 58)$$

und

$$940\,000 = \frac{32 \cdot \overline{35}^3}{3} + \frac{78 \cdot \overline{20}^3}{3} + 15 \cdot \overline{29}^2 \cdot f_e^d + 15 \cdot \overline{54}^2 \cdot f_e^z$$

oder

$$12\,600 \cdot f_e^d + 43\,750 \cdot f_e^z = 3\,275\,000 \quad . \quad . \quad 59).$$

Die gemeinsame Auflösung der Gl. 58 und 59 ergibt als entsprechende Werte $f_e^z = 63{,}9$ cm² und $f_e^d = 37{,}7$ cm², dementsprechend wurden

für f_e^z: 3 R.-E. 40 + 2 R.-E. 42 = 65,4 cm²

und

für f_e^d: 3 R.-E. 40 = 37,7 cm²

angeordnet.

Vom Verfasser wurden gelegentlich Diagramme für Plattenbalken (T-förmiger Querschnitt) mit Zug- und Druckbewehrung für die im Hochbau gebräuchlichsten Spannungen $\sigma_e = 1000$ kg/cm² und $\sigma_b = 40$ kg/cm² aufgetragen. Dieses Diagramm weist die im Hochbau übliche Vereinfachung auf, daß vom Betonquerschnitt im Druckgurt nur die Platte als mitwirkend berücksichtigt wurde; ferner wurde die Annahme gemacht, daß die Schwerlage der Druckbewehrung mit jener der Platte zusammenfällt, also daß der Abstand $a = \frac{d}{2}$ sei (Abb. 7).

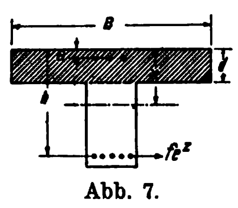


Abb. 7.

Aus dem Verlauf der Diagrammkurven ergibt sich eine analoge Formel, wie solche zur Berechnung der Kantenpressung bei einfach bewehrten Balken aufgestellt wurde.

Mit den Diagrammordinatenwerten

$$k_1 = \frac{h}{d} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{M_B}{B \cdot d^2}$$

ergibt sich der nach der schraffierten Plattenfläche zu nehmende Prozentsatz der Druckbewehrung p^d zu

$$p^d = \frac{k_2 - 3877\,k_1 + 5749}{586{,}6\,k_1 - 927} \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

oder in runden Zahlenwerten:

$$p^d = \frac{k_2 - 3875\,k_1 + 5750}{590\,k_1 - 925} \quad . \quad . \quad . \quad 61).$$

Die Zugbewehrung wird mit zutreffender Genauigkeit nach

$$f_e^s = \frac{M}{\left(h - \frac{d}{2}\right) \cdot \sigma_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

oder nach

$$f_e^s = \frac{M}{0{,}925 \cdot h \cdot \sigma_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62a)$$

ermittelt.

14. Beispiel: Ein **T**-förmiger Balkenquerschnitt (Abb. 7) mit den Abmessungen $B = 1{,}5$ m, $h = 52$ cm, $d = 8$ cm hat ein Moment von $M = 2\,450\,000$ kgcm aufzunehmen. Welche Bewehrungen sind anzuordnen, damit die Spannungen 1000/40 kg/cm² eingehalten werden?

Es sind

$$f_e^s = \frac{2\,450\,000}{(52 - 4) \cdot 1000} = \mathbf{51\ cm^2}$$

und mit

$$k_1 = \frac{52}{8} = 6{,}5 \quad \text{sowie} \quad k_2 = \frac{2\,450\,000}{1{,}5 \cdot 8^2} = 25\,500$$

nach Gl. 61:

$$p^d = \frac{25\,500 - 3875 \cdot 6{,}5 + 5750}{590 \cdot 6{,}5 - 925} = 2{,}08 \text{ vH.},$$

so daß

$$f_e^d = 1{,}50 \cdot 8 \cdot 2{,}08 = \mathbf{25\ cm^2}$$

ermittelt wird. Dementsprechend wird nun die Deckung vorgenommen.

Mit Hilfe der Gl. 61 kann auch die Ermittlung für andere gegebene Spannungswerte vorgenommen werden, wenn deren Randspannungsverhältnis

$$v = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{1000}{40} = \mathbf{25}$$

dasselbe ist, wie dies für die Spannungen

$$\frac{750}{30}, \ \frac{800}{32}, \ \frac{825}{33}; \ \frac{850}{34} \ \text{usw.}$$

der Fall ist. Die einzige Aenderung besteht darin, daß der Ordinatenwert k_2 nach

$$k_2 = \frac{M_B}{B \cdot d^2} \cdot \frac{1000}{\sigma_e}$$

ermittelt werden muß.

15. Beispiel: Der im vorigen Beispiel gegebene Balken hätte das Moment $M = 1\,960\,000$ kgcm unter Einhaltung der Spannungen

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{800}{32}$$

aufzunehmen.

Man ermittelt

$$k_1 = \frac{52}{8} = 6{,}5 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{1\,960\,000}{1{,}5 \cdot 8^2} \cdot \frac{1000}{800} = 25\,500;$$

dies ergibt dieselben Bewehrungen wie in jenem Beispiel, da sich die Momente zufällig wie die gegebenen Inanspruchnahmen verhalten:

$$\frac{2\,450\,000}{1\,960\,000} = \frac{1000}{800} = \frac{40}{32}.$$

Damit ist zugleich eine Bestätigung für die Richtigkeit des Vorganges gegeben.

In ähnlicher Weise, wie wir bei den einfach bewehrten Platten- und Rechteckquerschnitten zur Tabelle I gelangt sind, lassen sich auch für den beiderseits bewehrten Querschnitt solche Tabellen aufstellen, deren Nützlichkeit aus den früheren Beispielen zur Genüge erhellte.

Für die Breite des Platten- oder Rechteckquerschnitts von $B = 100$ cm, die statische Höhe $h = 1$ cm und für eine obere Deckschicht $a = \frac{h}{10} = 0{,}1$ cm erhalten wir aus Gl. 53, wenn wir $f_e^d = p_1 \cdot h = p_1$ und $f_e^z = p \cdot h = p$ ausdrücken:

$$p_1 = \frac{\frac{M}{\sigma_b} \cdot \frac{15}{15+v} - \frac{100}{6} \cdot \frac{15^2}{(15+v)^2} \cdot \left(3 - \frac{15}{15+v}\right)}{15 \cdot \left(\frac{15}{15+v} - 0{,}1\right) \cdot 0{,}9} \qquad 63),$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} M = (15+v) \cdot \Bigg[0{,}9 \cdot \left(\frac{15}{15+v} - 0{,}1\right) \cdot p_1 \\ + \frac{100}{6} \cdot \frac{15}{(15+v)^2} \cdot \left(3 - \frac{15}{15+v}\right)\Bigg] \cdot \sigma_b \end{aligned} \right\} \qquad 64).$$

Ebenso erhält man aus Gl. 54:

$$p = \frac{\frac{M}{\sigma_b} \cdot \frac{15}{15+v} + \frac{100}{6} \cdot \frac{15^2}{(15+v)^2} \cdot \left(\frac{15}{15+v} - 0{,}3\right)}{15 \cdot \left(1 - \frac{15}{15+v}\right) \cdot 0{,}9} \qquad 65).$$

woraus

$$M = (15+v)\cdot\left[0{,}9\cdot\left(1-\frac{15}{15+v}\right)\cdot p - \frac{100}{6}\cdot\frac{15}{(15+v)^2}\cdot\left(\frac{15}{15+v}-0{,}3\right)\right]\cdot\sigma_b \quad 66)$$

erhalten wird.

Aus der Gegenüberstellung der Gl. 64 und 66 erhalten wir schließlich eine allgemein gültige Beziehung zwischen den Bewehrungssätzen p und p_1 des Zug- und Druckgurtes:

$$p_1 = \frac{0{,}9\cdot\left(1-\frac{15}{15+v}\right)\cdot p - \frac{100}{6}\cdot\frac{15}{(15+v)^2}\cdot 2{,}7}{0{,}9\cdot\left(\frac{15}{15+v}-0{,}1\right)} \quad 67)$$

oder

$$p = \frac{0{,}9\cdot\left(\frac{15}{15+v}-0{,}1\right)\cdot p_1 + \frac{100}{6}\cdot\frac{15}{(15+v)^2}\cdot 2{,}7}{0{,}9\cdot\left(1-\frac{15}{15+v}\right)} \quad 68).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen wurde die Tabelle IV ermittelt. Für die Spannungen 950/40 kg/cm² wurde hierbei folgend vorgegangen:

Dem Randspannungsverhältnis

$$v = \frac{950}{40} = 23{,}75$$

entspricht nach Gl. 68

$$p = 0{,}467\cdot p_1 + 0{,}815 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 69),$$

aus welcher leicht zu erkennen ist, daß 0,815 der Bewehrungssatz für einfache Bewehrung bedeutet. Nach Gl. 66 ist nun für $B = 100$ cm und $h = 1$ cm das Moment

$$M_1 = \beta = 855\,p - 22{,}4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70),$$

worin das aus Gl. 69 gewonnene p zu berücksichtigen ist.

Für $p_1 = 0$ erhalten wir $p = 0{,}815$ vH. und $\beta = 674$
„ $p = 3\cdot p_1$ (Verhältnis 1:3) $p = 0{,}966$ „ „ $\beta = 803$
„ $p = 2\cdot p_1$ („ 1:2) $p = 1{,}04$ „ „ $\beta = 874$
„ $p = p_1$ („ 1:1) $p = 1{,}53$ „ „ $\beta = 1288$.

Die Tabelle gestattet, für die gegebenen Größen M in kgcm auf 1 m Breite und h in cm die Bewehrungen zu ermitteln, wie dies im 16. Beispiel erläutert ist.

Für Fahrbahnplatten bei Brücken gibt Tabelle III die nötigen Bestimmungsstücke.

Tabelle IV.
Beiderseitig bewehrte Platten und Rechteckquerschnitte.

950/40 kg/cm²			1000/40 kg/cm²		
Druck p_1 vH.	Zug p vH.	β	Druck p_1 vH.	Zug p vH.	β
0,00	0,815	674	0,00	0,750	658
0,10	0,8617	715	0,10	0,794	696
0,15	0,885	738	0,15	0,816	716
0,20	0,9085	755	0,20	0,838	734
0,25	0,932	775	0,25	0,860	755
0,30	0,955	794	**0,293**	0,880	773
0,322	0,966	803	0,30	0,882	774
0,35	0,9785	816	0,35	0,904	794
0,40	1,002	834	0,40	0,926	815
0,45	1,025	853	0,45	0,948	834
0,50	1,049	874	**0,481**	0,962	846
0,55	1,072	894	0,50	0,970	853
0,60	1,095	914	0,55	0,992	873
0,65	1,119	934	0,60	1,014	895
0,70	1,142	956	0,65	1,036	912
0,75	1,165	974	0,70	1,058	932
0,80	1,189	994	0,75	1,080	952
0,85	1,212	1016	0,80	1,102	972
0,90	1,235	1034	0,85	1,124	992
0,95	1,259	1056	0,90	1,146	1012
1,00	1,282	1076	0,95	1,168	1031
1,05	1,305	1094	1,00	1,190	1052
1,10	1,330	1116	1,05	1,212	1072
1,15	1,352	1136	1,10	1,234	1091
1,20	1,375	1154	1,15	1,256	1111
1,25	1,400	1176	1.20	1,278	1131
1,30	1,423	1196	1,25	1,300	1151
1,35	1,445	1213	1,30	1,322	1171
1,40	1,470	1236	**1,34**	1,340	1186
1,45	1,493	1256	1,35	1,344	1191
1,50	1,515	1274	1,40	1,366	1211
1,53	1,530	1288	1,45	1,388	1231
1.55	1,540	1296	1,50	1,410	1251
1,60	1,563	1316	1,55	1,432	1271
$p = 0{,}467\,p_1 + 0{,}815$ $\beta = 855\,p - 22{,}4$			$p = 0{,}44\,p_1 + 0{,}75$ $\beta = 900\,p - 18{,}75$		

16. Beispiel: Für eine freiaufliegende Platte von 3 m Stützweite, welche mit 500 kg/m² Fremdlast belegt ist, darf die Konstruktionshöhe nicht mehr als 12 cm betragen. Die einzuhaltenden Spannungen sind 950/40 kg/cm².

Der Gesamtbelastung $500 + 0{,}12 \cdot 2400 = 788$ kg/m² entspricht das Moment

$$M = \frac{788 \cdot 3{,}0 \cdot 300}{8} = 88\,700 \text{ kgcm},$$

die statische Höhe ist $h = 12 - 1{,}5 = 10{,}5$ cm, so daß

$$\beta = \frac{M}{h^2} = \frac{88\,700}{10{,}5^2} = 805$$

ist.

Nach Tabelle IV entspricht hierfür ungefähr

$$f_e^d = 0{,}33 \cdot 10{,}5 = 3{,}46 \text{ cm}^2$$

und

$$f_e^z = 0{,}97 \cdot 10{,}5 = 10{,}2 \text{ cm}^2.$$

Die Tabelle IV läßt sich auch für andere Spannungswerte, die dasselbe Randspannungsverhältnis aufweisen, benutzen. Ist die Tabelle für die Eisenzugspannung s_e berechnet, so ermittelt man in diesem Falle aus den gegebenen Größen M, h und σ_e den aufzusuchenden Wert

$$\beta = \frac{M}{h^2} \cdot \frac{\sigma_e}{s_e} \quad \ldots\ldots \quad 71)$$

die Bewehrungssätze werden für dieses β abgelesen und ohne Veränderung benutzt. In dieser Form läßt sich z. B. die linke Spalte der Tabelle IV, welche für die Spannungen 950/40 berechnet ist, auch für die zulässigen Spannungen 1000/42 verwenden.

Verteilung der Schrägeisen und Bügel.

Zwischen der horizontalen Schubkraft S und dem Hauptzuge Z bezw. Hauptdruck D besteht die bekannte Beziehung

$$Z = D = \frac{S}{\sqrt{2}}.$$

In einem Balken erreiche die Querkraft am Auflager den Größtwert Q_{max}, so daß für den inneren Hebelarm m

und für die Stegbreite b dortselbst die Schubspannung den Wert

$$\tau_{0\,max} = \frac{Q_{max}}{m b}$$

aufweise. Dieser Wert überschreite die zulässige Schubspannung von $\tau_0' = 4{,}5\ \text{kg/cm}^2$ um bedeutendes, so daß Schrägeisen (aufgebogene Tragstäbe) bezw. überdies Bügel nötig sind, um den auf den Beton entfallenden Anteil auf ein zulässiges Spannungsmaß herabzudrücken. Der Verlauf der Querkraft bezw. der hiervon abhängigen Schubspannung sei über den Balken so, wie es die Abb. 8 zeigt. Die Schrägeisen seien innerhalb der Strecke λ vom Auflager so in Abständen aufgebogen, daß auf jedes der aufgebogenen i-Eisen der gleiche Anteil an Zugkraft $\frac{Z}{i}$ aus der dreieckigen Verteilung abc entfällt.

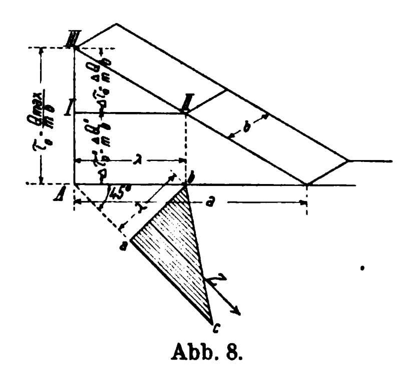


Abb. 8.

Der Beton und die Bügel zusammen werden also bezüglich Schubwirkung um das Anteildreieck I II III der Schrägeisen entlastet. Die der Hauptzugkraft Z entsprechende Schubkraft (Anteil) ist aus dem Dreieck (Prisma) I II III berechnet:

$$\Delta S = \frac{\Delta\tau_0 \cdot \lambda}{2} \cdot b = \frac{\Delta Q \cdot \lambda}{2\,m}.$$

Abb. 9.

Da nach nebenstehendem Kraftschema (Abb. 9)

$$\overline{\Delta S}^2 = Z^2 + D^2 = Z^2 + D^2 = 2\,Z^2 = 2\,D^2,$$

so daß

$$Z = D = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}$$

oder mit obigem Wert für ΔS auch

$$Z = D = \frac{\Delta Q \cdot \lambda}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot m} = \frac{\Delta Q \cdot \lambda}{2{,}82 \cdot m} \quad . \quad . \quad 72)$$

wird.

Mit Hilfe der Gl. 72 kann durch Rückrechnung bei bekannten Schrägeisen f_e und ihrer Inanspruchnahme σ_e, d. h. bei bekannter Größe $Z = f_e \cdot \sigma_e$, die Strecke λ berechnet werden, innerhalb welcher die Vollausnutzung ($\sigma_e = \sigma_{e\,zul.}$) der Schrägeisen erfolgt.

Es ist zunächst aus Gl. 72:

$$\varDelta Q = \frac{2{,}82 \cdot m \cdot f_e \cdot \sigma_e}{\lambda}.$$

Aus der Proportion $Q_{max} : a = \varDelta Q : \lambda$ folgt

$$\varDelta Q = Q_{max} \cdot \frac{\lambda}{a}.$$

Dieser Wert eingeführt, liefert

$$Q_{max} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{2{,}82 \cdot m \cdot f_e \cdot \sigma_e}{\lambda},$$

d. h. die zu suchende Länge ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{2{,}82 \cdot a \cdot m \cdot f_e \cdot \sigma_e}{Q_{max}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73).$$

Die Gl. 73 setzt voraus, daß die Schrägbewehrung so knapp zur Verfügung steht, daß $\varDelta\tau_0'' \geq \tau_{0\,zul.} = 4{,}5$ kg/cm² ist. Ist $\varDelta\tau_0'' > \tau_{0\,zul.}$, dann sind überdies Bügel erforderlich; ist $\varDelta\tau_0'' \overline{\overline{<}} \tau_{0\,zul.}$, dann wären keine Bügel erforderlich.*)

Für die Praxis ist es wichtiger, jene Querschnittsfläche f_e der Schrägbewehrung kennen zu lernen, für welche $\varDelta\tau'' = \tau_{0\,zul.} = 4{,}5$ kg/cm² ist. Man ermittelt zu diesem Zweck vorher das der Querkraft $\varDelta Q = Q_{max} - Q_{zul.}$, wobei $Q_{zul.} = m \cdot b \cdot \tau_{0\,zul.}$ gefunden wird, entsprechende λ zu

$$\lambda = a \cdot \frac{\varDelta Q}{Q_{max}}$$

und erhält aus Gl. 73 die gesuchte Schrägbewehrung zu

$$f_e = \frac{Q_{max} \cdot \lambda^2}{2{,}82 \cdot a \cdot m \cdot \sigma_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74).$$

Kann man das Erfordernis der Gl. 74 nicht decken, so verwendet man den Querschnitt f_e' der tatsächlich vorhandenen Schrägeisen in Gl. 73 zur Berechnung des zugehörigen Abschnitts λ. Die übrig bleibende Schubspannung $\varDelta\tau_0'' = \tau_{0\,max} - \varDelta\tau_0$ ist dann größer als $\tau_{0\,zul.}$, so daß also der Unterschied $\varDelta\tau_0^B = \varDelta\tau_0'' - \tau_{0\,zul.}$ als Anteil für Bügel zu betrachten ist. Die Abb. 10 veranschaulicht diese, selbstredend willkürliche Verteilung. Aus Gl. 73 wurde λ berechnet, daher $\varDelta\tau_0 = \tau_{0\,max} \cdot \frac{\lambda}{a}$; ebenso läßt sich

$$\lambda_{zul.} = \frac{\tau_{0\,max} - \tau_{0\,zul.}}{\tau_{0\,max}} \cdot a$$

*) Dieses rein theoretische Ergebnis darf den Konstrukteur jedoch nicht dazu verleiten, Träger ohne Bügel zu projektieren, da diesen Bewehrungsgliedern auch die wichtige Rolle zufällt, den Verbund zu sichern.

ermitteln. Die Bügel sind von A bis B, d. h. von 0 bis λ, in gleichen Abständen, von B bis C, d. h. von λ bis $\lambda_{zul.}$, in zunehmenden Abständen verlegt. Die Abstände der Schrägeisen innerhalb A bis B, d. h. von 0 bis λ, nehmen nach rechts zu. Die Durchgangspunkte durch die Nullinie für die Schrägeisen und für die Bügel von B bis C ergeben sich, wenn die bezüglichen Dreiecke in so viel flächen-

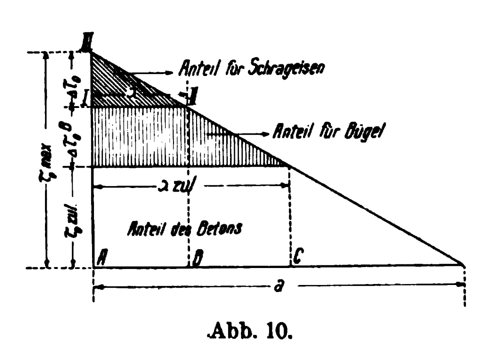


Abb. 10.

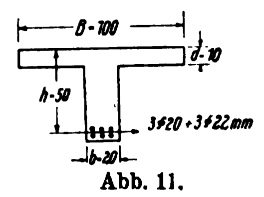


Abb. 11.

gleiche Teile geteilt werden, als schräge Stäbe innerhalb A bis B bezw. Bügel innerhalb B bis C verlegt werden. Werden für jede dieser Teilflächen die Schwerpunkte ermittelt und auf die Nullinie projiziert, so geben diese Punkte die genaue Lage an.*)

17. Beispiel: Ein Träger von 5 m Stützweite ist mit 3000 kg/m' belastet. Der Querschnitt ist in Abb. 11 skizziert. Es sind die Bewehrung in Balkenmitte (M_{max}) und die erforderlichen Schrägeisen zu ermitteln:

$$M_{max} = \frac{3000 \cdot 5 \cdot 500}{8} = 938\,000 \text{ kgcm}$$

$$Q_{max} = 2{,}5 \cdot 3000 = 7500 \text{ kg.}$$

Die Lösung nach Tabelle II ergibt für M_{max}:

da $\frac{h}{d} = \frac{50}{10} = 5$ und $\frac{M_{100}}{d^2} = \frac{938\,000}{10^2} = 9380$ } die Spannungen $\sigma_e = 1000$ kg/cm², $\sigma_b = 30{,}2$ kg/cm² und $\varphi = 2{,}05$ vH. Bewehrung; daher

$$f_e = 2{,}05 \cdot 1 \text{ m} \cdot 10 \text{ cm} = B \text{ m} \cdot \varphi \cdot d = \mathbf{20{,}5\ cm^2}.$$

*) Die Bügel werden bekanntlich auf Zug in Anspruch genommen. Die übliche Methode, wonach der Bügelquerschnitt dergestalt ermittelt wird, daß der aus Abb. 10 ersichtliche Anteil der Schubkraft keine höhere Scherinanspruchnahme in den Bügeln erzeugt, als für Eisen zulässig ist, hat stets zu brauchbaren Ergebnissen geführt.

Angeordnet in Balkenmitte:

$$f_e = 3 \text{ R.-E. } 20 + 3 \text{ R.-E. } 22 = 20{,}82 \text{ cm}^2;$$

Hebel:
$$m = \frac{M_{\max}}{f_e \cdot \sigma_e} = \frac{938\,000}{20{,}5 \cdot 1000} = 45{,}8 \text{ cm}$$

$$\tau_{0\,\max} = \frac{7500}{45{,}8 \cdot 20} = 8{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Ueberschreitung wäre $8{,}2 - 4{,}5 = 3{,}7$ kg/cm².

$$a = \frac{l}{2} = 250 \text{ cm}$$

$$Q_{\text{zul.}} = 45{,}8 \cdot 20 \cdot 4{,}5 = 4120 \text{ kg}$$

$$\varDelta Q = 45{,}8 \cdot 20 \cdot 3{,}7 = 7500 - 4120 = 3380 \text{ kg}$$

$$\lambda = 250 \cdot \frac{3380}{7500} = 112{,}5 \text{ cm.}$$

Das Erfordernis an Schrägeisen ist mit $\sigma_e = 1000$ kg/cm² nach Gl. 74:

$$f_e = \frac{7500 \cdot \overline{112{,}5}^2}{2{,}82 \cdot 250 \cdot 45{,}8 \cdot 1000} = 2{,}93 \text{ cm}^2.$$

Man ordnet 1 R.-E. 20 mm = 3,14 cm² an, wobei dann die Beanspruchung desselben

$$\sigma_e' = 1000 \cdot \frac{2{,}93}{3{,}14} = 935 \text{ kg/cm}^2$$

wird. Dieses eine Schrägeisen müßte dann so aufgebogen sein, daß es im Abstand

$$\frac{\lambda}{3} = \frac{112{,}5}{3} = 37{,}5 \text{ cm}$$

vom Auflager die Nullinie unter 45° kreuzt.

Ständige Last mit Verkehrslast.

Die Umhüllende der Querkraft Q^v, herrührend von Verkehrslast, ist eine über die ganze Spannweite verlaufende Parabel mit dem Scheitel in B. Die Querkraft Q^g vom Eigengewicht verläuft nach einer aus der Balkenmitte M gehenden Geraden. In Abb. 12 ist der Verlauf der Querkraft für den Querschnitt A für Verkehrslast oberhalb der Balkenachse, für Eigen- bezw. ständige Last unterhalb der Balkenachse aufgetragen. Der zulässigen Schubspannung im Beton entspricht $Q^s = m \cdot b \cdot \tau_{0\,\text{zul.}}$

Der Parameter der Parabel ist

$$2\,p = \frac{l^2}{Q^v};$$

die Gleichung der Parabel:

$$y = \frac{(l-\lambda)^2 \cdot Q^v}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 75),$$

die Gleichung der Geraden:

$$y = c + \lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

oder mit

$$c = Q^s - Q^g \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\,Q^g}{l}$$

wird

$$y = Q^s - Q^g + \frac{2\,Q^g \cdot \lambda}{l} \quad . \; . \; . \; . \quad 76).$$

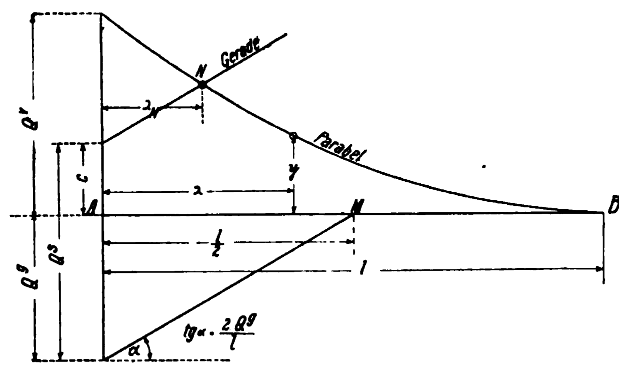


Abb. 12.

Durch Gleichsetzung von Gl. 75 und 76 erhält man die bezüglich λ quadratische Gleichung:

$$\frac{(l-\lambda)^2 \cdot Q^v}{l^2} = Q^s - Q^g + \frac{2\,Q^g \cdot \lambda}{l},$$

deren Auflösung

$$\lambda_N = l \cdot \left[1 + \frac{Q^g}{Q^v} - \sqrt{\frac{Q^g + Q^s}{Q^v} + \left(\frac{Q^g}{Q^v} \right)^2} \right] \quad 77)$$

oder

$$\lambda_N = l \cdot \left[1 + \frac{\tau^g}{\tau^v} - \sqrt{\frac{\tau^g + \tau^{\text{zul.}}}{\tau^v} + \left(\frac{\tau^g}{\tau^v} \right)^2} \right] \quad 78)$$

ergibt.

Lageermittlung der Bügel und Schrägeisen.

Wie im vorangehenden erörtert wurde, sind die Lagen der Bügel und der Schrägeisen durch die Schwerpunkte der gleich großen Teilflächen bestimmt.

Bezeichnen wir den Inhalt des Dreiecks I II III oder jenen des Dreiecks $a\,b\,c$ der Abb. 8 mit F, und ist dasselbe in z flächengleiche Abschnitte zu zerlegen, so bestimmen sich die Abstände λ_i (Abb. 13) vom Punkte II bezw. b der Abb. 8 zu

$$\lambda_i = \lambda \cdot \sqrt{\xi_i} \quad \ldots \ldots \quad 79)$$

bezw.

$$\lambda_i' = \lambda' \cdot \sqrt{\xi_i} \quad \ldots \ldots \quad 80)$$

wenn für ξ_i nacheinander die Werte

$$\xi_i = \frac{1}{z}, = \frac{2}{z}, = \frac{3}{z}, \ldots \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z}$$

gesetzt werden (Abb. 13).

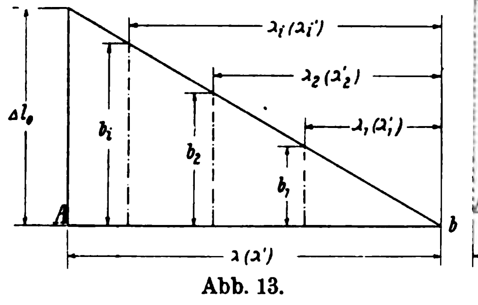


Abb. 13.

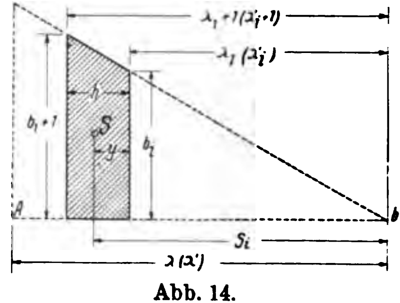


Abb. 14.

Der Schwerpunktabstand des in Abb. 14 herausgegriffenen Teiltrapezes ist $s_i = \lambda_i + y$ oder, da

$$\lambda_i = \lambda \cdot \sqrt{\xi_i} \quad \text{und} \quad y = \frac{h}{3} \cdot \frac{2\,b_{i+1} + b_i}{b_{i+1} + b_i}$$

$$= \frac{\lambda}{3} \cdot \left(\sqrt{\xi_{i+1}} - \sqrt{\xi_i}\right) \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\xi_{i+1}} + \sqrt{\xi_i}}{\sqrt{\xi_{i+1}} + \sqrt{\xi_i}} \quad 81)$$

sind, so erhalten wir für die Schwerpunkte das Teilverhältnis

$$\frac{s_i}{\lambda} = \sqrt{\xi_i} + \frac{\sqrt{\xi_{i+1}} - \sqrt{\xi_i}}{3} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{\xi_{i+1}} + \sqrt{\xi_i}}{\sqrt{\xi_{i+1}} + \sqrt{\xi_i}} \quad 82).$$

Diese Teilverhältnisse sind in Tabelle V für $z = 2$ bis $z = 16$ Teilungen enthalten.

Tabelle V. Teilverhältnisse für Bügel und Schrägeisen.

s	Teilverhältnis $\frac{s_i}{\lambda}$ bezw. $\frac{s_i}{\lambda'}$															
16	0,1666	0,3047	0,3945	0,4673	0,5303	0,5859	0,6374	0,6847	0,7287	0,7702	0,8102	0,8481	0,8841	0,9186	0,9516	0,9841
15	—	0,1720	0,3145	0,4074	0,4823	0,5473	0,6052	0,6578	0,7068	0,7527	0,7957	0,8361	0,8751	0,9121	0,9481	0,9830
14	—	—	0,1775	0,3260	0,4198	0,4970	0,5640	0,6238	0,6786	0,7302	0,7776	0,8220	0,8646	0,9026	0,9410	0,9820
13	—	—	—	0,1840	0,3362	0,4366	0,5168	0,5867	0,6504	0,7053	0,7553	0,8042	0,8527	0,8977	0,9401	0,9801
12	—	—	—	—	0,1933	0,3534	0,4565	0,5384	0,6106	0,6764	0,7343	0,7870	0,8403	0,8902	0,9367	0,9791
11	—	—	—	—	—	0,2000	0,3660	0,4691	0,5610	0,6357	0,7056	0,7704	0,8253	0,8752	0,9278	0,9776
10	—	—	—	—	—	—	0,2100	0,3848	0,4992	0,5900	0,6693	0,7415	0,8069	0,8668	0,9228	0,9752
9	—	—	—	—	—	—	—	0,2220	0,4053	0,5242	0,6211	0,7058	0,7832	0,8503	0,9103	0,9730
8	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2348	0,4303	0,5568	0,6597	0,7495	0,8281	0,9005	0,9678
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2535	0,4602	0,5930	0,7038	0,7983	0,8832	0,9630
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2730	0,4980	0,6440	0,7630	0,8655	0,9570
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2980	0,5445	0,7060	0,8365	0,9480
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3333	0,6100	0,7886	0,9340
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3820	0,7035	0,9115
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,4710	0,8620

Die Ergebnisse der Tabelle V wurden dazu benutzt, um den in Abb. 15 dargestellten Bügel- und Schrägeisenverteiler zu konstruieren. Derselbe ist ein Vollkreis oder ein Kreisausschnitt aus Karton oder Blech, dessen Halbmesser die Einheit (Strecke λ bezw. λ') darstellt. Vom Kreismittelpunkt sind Strahlen gezogen, welche die Teilungen tragen und mit der Anzahl dieser Teile beziffert sind. Für den Mittelpunkt und die Teilpunkte erhält die Scheibe Stichmarken. Beim Gebrauch wird der Mittelpunkt der Scheibe

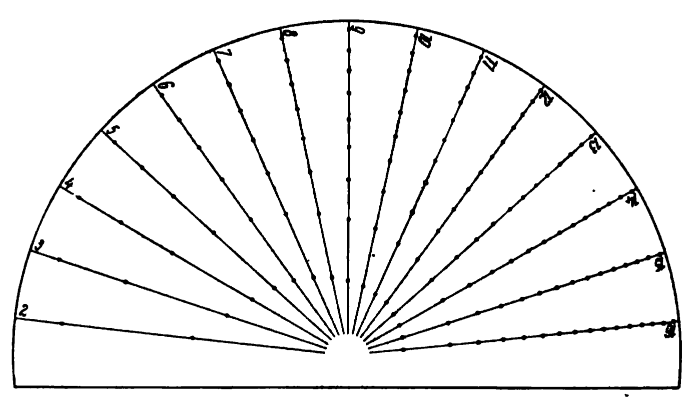


Abb. 15. Bügel- und Schrägeisenverteiler.

über dem Punkte b der Abb. 13 u. 14 angestochen, die Scheibe so weit gedreht, bis der Umfangspunkt des mit der gewünschten Teilungszahl bezifferten Strahles in eine unter beliebiger Richtung aus A (Abb. 13 u. 14) gezogene Gerade fällt. In dieser Lage werden die Teilungsmarken auf das Zeichenblatt durchstochen und durch Parallelziehen zur Geraden aus A auf die Balkenachse (Nullinie) übertragen, wodurch die Lage der Bügel bezw. Schrägeisen festgelegt ist.

Die Bemessung der Querschnitte mit exzentrisch angreifenden Zug- oder Druckkräften.*)

Bei dem Entwerfen der großen Rahmenkonstruktionen von 20 m Stützweite, die beim Neubau des Lazenhofes in Wien gegenwärtig zur Ausführung kommen, beschäftigte ich mich

*) Beton u. Eisen 1911, Heft IX u. XI.

eingehender mit den durch exzentrische Kräfte in Anspruch genommenen Eisenbetonquerschnitten und gelangte dabei zu folgender genauen Methode, die ich wegen ihrer überraschenden Einfachheit der Fachwelt nicht länger vorenthalten will. Das Verfahren ist sowohl für einfach- oder doppeltbewehrte T-förmige, als auch für ebenso bewehrte rechteckige Querschnitte gültig.

I. Exzentrischer Druck.

Der Abstand der Zugbewehrung vom Druckmittelpunkt, d. i. der Abstand der im Querschnitt ausgelösten Kräfte Z und D ist der Hebelarm m. Die erste Gleichgewichtsbedingung lautet nun (Abb. 16, 17, 18)

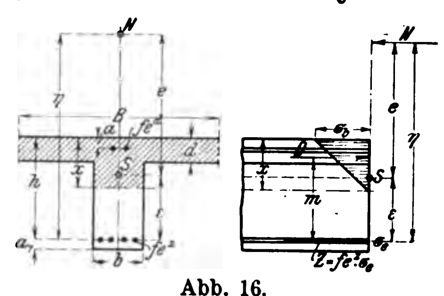


Abb. 16.

$$N + Z - D = 0 \quad 83)$$

Wäre derselbe innere Spannungsverlauf, wie er der exzentrisch einwirkenden Druckkraft entspricht, von reiner Biegung herrührend, so würde die analoge Bedingungsgleichung

$$Z_i - D = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 84)$$

lauten. Beim Vergleich von Gleichung 83) mit Gleichung 84) erkennen wir, daß in letzterer Gleichung

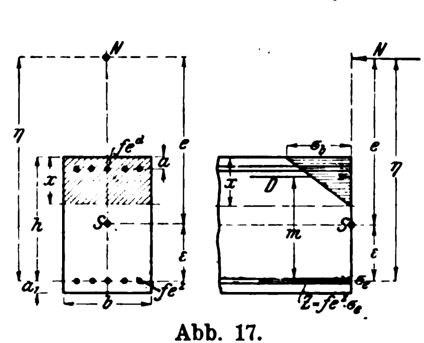


Abb. 17.

$$Z_i = N + Z \quad 85)$$

geschrieben werden müßte. Dieser ideellen Zugkraft Z_i würde bei der gleichen Spannung σ_e, wie sie dem exzentrisch gedrückten Querschnitt eigen ist, eine ideelle Bewehrung von $f_i = \frac{Z_i}{\sigma_e}$ entsprechen. Der tatsächlich im Querschnitt vorhandenen Bewehrung f_e^z entspricht die Zugkraft $Z = f_e^z \cdot \sigma_e$, und die Normalkraft N in Gleichung 85) kann man sich von der „Ersatz-Bewehrung“ f_n herrührend

denken, so daß $N = f_n \cdot \sigma_e$ bezw. $f_n = \frac{N}{\sigma_e}$ ist. Die im exzentrisch gedrückten Querschnitt notwendige Bewehrung, um die Spannung σ_e aufrecht zu erhalten, ist

$$f_e^z = f_i - f_n \quad 86)$$

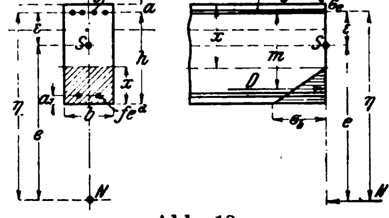


Abb. 18.

Mit Bezug auf den Druckmittelpunkt D muß die zweite Gleichgewichtsbedingung

$$Z \cdot m = N \cdot (\eta - m)$$

oder

$$m \cdot (Z + N) = N \cdot \eta$$

bezw. $$m \cdot Z_i = N \cdot \eta = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

erfüllt sein.

Gleichung 87) sagt uns nun, daß im Falle reiner Biegung das „ideelle Moment“ $\mu = N \cdot \eta$ es ist, welches denselben Spannungsverlauf im Querschnitt hervorruft, wie er dem Falle exzentrischen Druckes entspricht.

Die Gleichung 86) dagegen sagt uns, daß jene, im Falle reiner Biegung für das „ideelle Moment“ μ ermittelte Zugbewehrung f_i, in dem Falle exzentrischen Druckes um den Betrag $f_n = \frac{N}{\sigma_e}$ **vermindert** werden muß, um das gleiche Spannungsbild aufrecht zu erhalten und den Gleichgewichtsbedingungen zu entsprechen.

Mit dieser Ueberlegung ist eine einfache und genaue Methode gefunden, welche diese Beanspruchungsart nach den übersichtlicheren und geläufigeren Formeln für reine Biegung zu behandeln gestattet.

Für den Gebrauch ergibt sich folgende **Regel:**

Man bildet das Produkt aus der Achsialdruckkraft N und ihrem Abstande η von der Zugeiseneinlage in der Querschnittsebene gemessen. Mit dem so erhaltenen ideellen Moment μ (es ist mit jenem Moment, welches uns die Exzentrizität angibt, nicht identisch) ermitteln wir die für die Spannung σ_e erforderliche ideelle Zugeiseneinlage f_i und untersuchen, wie der Druckgurt in Anspruch genommen ist, bezw. ob dieser einer Druckeiseneinlage bedarf, um den zulässigen

Wert σ_b einzuhalten. In die Zugzone ist nicht die ideelle Bewehrung f_i, sondern eine um $f_n = \frac{N}{\sigma_e}$ verminderte Bewehrung f_e^s einzulegen, sollen die der Biegungsrechnung entsprechenden Spannungen σ_e und σ_b auch bei der tatsächlichen Inanspruchnahme des Querschnitts eintreten.

Weicht bei einem T-förmigen Querschnitt nach Abb. 18 die exzentrische Druckkraft N über die Stegunterkante hinaus ab, so ist klar, daß als statisch wirksamer Querschnitt nur das Stegrechteck zu betrachten ist, die Zugbewehrung liegt dann in der Platte, der nach Erfordernis bewehrte oder nichtbewehrte Steg bildet den Druckgurt.

II. Exzentrischer Zug.

Die Berechnung ergibt sich naturgemäß ganz ähnlich wie zu I. An der Hand der Abb. 19, 20 u. 21 finden wir

$$N - Z + D = 0 \quad \text{. . . . . 88)}$$
$$Z_i - D = 0 \quad \text{. . . . . . . 89)}$$
$$Z_i = Z - N \quad \text{. . . . . . 90)}$$
$$f_i \cdot \sigma_e = f_e^s \cdot \sigma_e - f_n \cdot \sigma_e \quad \text{. . . . 91)}$$
$$f_e^s = f_i + f_n \quad \text{. . . . . 92),}$$

worin wieder $f_n = \frac{N}{\sigma_e}$ ist.

Bezüglich des Druckmittelpunktes ist die Bedingung

$$Z \cdot m - N(m + \eta) = 0$$

zu erfüllen. Es ist daher

$$m \cdot (Z - N) = N \cdot \eta$$

bezw.

$$m \cdot Z_i = N \cdot \eta = \mu \quad \text{. . . . 93)}$$

Der Vorgang bei einer Ermittlung ist genau wie zu I, nur mit dem Unterschiede, daß hier die im Falle reiner Biegung für das Moment $\mu = N \cdot \eta$ ermittelte Zugbewehrung f_i in dem Falle exzentrischen Zuges um den Querschnitt $f_n = \frac{N}{\sigma_e}$ **vermehrt** werden muß, um dasselbe Spannungsbild aufrecht zu erhalten.

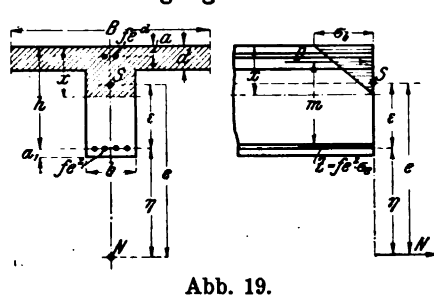


Abb. 19.

Weicht bei einem T-förmigen Querschnitt nach Abb. 21 die exzentrische Zugkraft N über die Plattenseite hinaus ab, so ist nur das Stegrechteck mit Zuggurt in der Platte, Druck-

gurt im Steg als statisch wirksamer Querschnitt zu betrachten.

Bei der Untersuchung der Bauwerkformen erhalten wir die Exzentrizitätsmomente $N \cdot e$ (siehe Abbildungen) und die Normalkraft N. Die Exzentrizität e ist von der Stabachse, d. h. im Querschnitt vom Punkte S zu messen. Der Punkt S ist dadurch gekennzeichnet, daß eine dortselbstangreifende Normalkraft N eine gleichmäßig über den Querschnitt verteilte Spannung σ_b bezw. $n \cdot \sigma_b$ auslöst, er wird daher als Schwerpunkt der Fläche $f_b + n \cdot (f_e^z + f_e^d)$ gefunden. Da f_e^z und f_e^d aber erst durch Rechnung ermittelt werden, so darf der Abstand e und ε auch — ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen — vom Schwerpunkte der reinen Betonfläche f_b gemessen werden. Bei der Untersuchung von Gewölben und Rahmen ist die statische Form derselben nach der eben definierten Stabachse zu berücksichtigen.

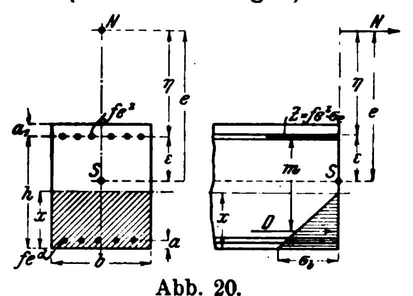


Abb. 20.

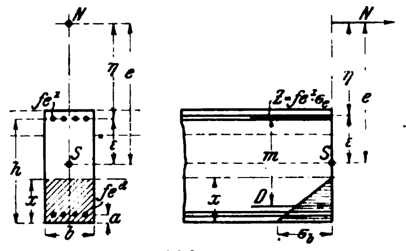


Abb. 21.

Nachfolgende Beispiele mögen die neue Methode erläutern.

18. Beispiel: Die Querschnitte eines Tragwerkgliedes von der Querschnittsform der Abb. 16 mit $B = 130$ cm, $h + a_1 = 75 + 5 = 80$ cm, $b = 25$ cm, $d = 15$ cm haben die Druckkraft $N = 22\,000$ kg in Exzentrizitäten von $e = 0$ bis $e = 250$ cm aufzunehmen. Die zulässigen Spannungen sind $s_e = 1000$ kg/cm² und $s_b = 40$ kg/cm². Wie muß der Querschnitt an der Stelle der größten Exzentrizität bewehrt werden und bei welcher Exzentrizität e_1 genügt der Querschnitt mit einfacher Zugbewehrung?

Der Schwerpunkt der gegebenen Betonfläche liegt von der Plattenoberkante im Abstande von

$$\frac{130 \cdot 15 \cdot 7{,}5 + 65 \cdot 25 \cdot 47{,}5}{130 \cdot 15 + 65 \cdot 25} = 25{,}6 \text{ cm},$$

es sind daher $\varepsilon = 75 - 25{,}6 = 49{,}4$ cm und bei der größten Exzentrizität $\eta = e + \varepsilon = 250 + 49{,}4 = 299{,}4$ cm, so daß das „ideelle Moment" $\mu = 22\,000 \cdot 299{,}4 = 6\,590\,000$ kgcm ist. Da wir die Spannung $\sigma_e = s_e$ einhalten werden, so ist der „Ersatzquerschnitt"

$$f_n = \frac{22\,000}{1000} = 22 \text{ cm}^2.$$

Nach der auf Seite 28 erklärten Methode des Verfassers*) berechnen wir für μ und $a = 5$ cm, die den gegebenen Spannungen entsprechenden Bewehrungen wie folgt:

Dem Randspannungsverhältnis

$$v = \frac{1000}{40} = 25 \text{ entspricht } x = \frac{15}{15 + 25} \cdot 75 = 28{,}1 \text{ cm},$$

das Moment μ erfordert ein Trägheitsmoment von

$$J = \frac{6\,590\,000}{40} \cdot 28{,}1 = 4\,630\,000 \text{ cm}^4,$$

daher ist nach Gl. 49

$$f_e^d = \frac{4\,630\,000 + 105 \cdot \overline{13{,}1}^2 \cdot \frac{166{,}9}{6} - \frac{130}{6} \cdot \overline{28{,}1}^2 \cdot 196{,}9}{15 \cdot 23{,}1 \cdot 70}$$

$$= \frac{1\,871\,000}{24\,200} = \mathbf{77{,}5\ cm^2}$$

im Druckgurt anzuordnen, und nach Gl. 50

$$f_i = \frac{4\,630\,000 - 105 \cdot \overline{13{,}1}^2 \cdot \frac{43{,}1}{6} + \frac{130}{6} \cdot \overline{28{,}1}^2 \cdot 13{,}1}{15 \cdot 46{,}9 \cdot 70}$$

$$= \frac{4\,724\,500}{49\,100} = 96 \text{ cm}^2,$$

daher

$$f_e^z = f_i - f_n = 96 - 22 = \mathbf{74\ cm^2}$$

im Zuggurt anzuordnen sind.

Mit einfacher Bewehrung genügt der Querschnitt bei Einhaltung derselben Spannungen, wenn die Bedingung (Gl. 55)

$$105 \cdot \overline{13{,}1}^2 \cdot \frac{166{,}9}{6} - \frac{130}{6} \cdot \overline{28{,}1}^2 \cdot 196{,}9 + \frac{N \cdot \eta_1}{40} \cdot 28{,}1 = 0$$

oder

$$15\,450 \cdot \eta_1 - 2\,759\,000 = 0$$

---

*) Auch Beton u. Eisen 1906, Heft VIII, Seite 210 und 1908, Heft III, Seite 60; jedoch ist dort das erste Zahlenbeispiel fehlerhaft durchgeführt, weil die Nullinie in die Platte fällt, also in der dort angeführten Formel $B = b$ zu setzen ist.

erfüllt ist. Dies ist bei $\eta_1 = \frac{2\,759\,000}{15\,450} = 178{,}5$ cm, d. h. in jenem Querschnitt, für welchen die Exzentrizität $e_1 = \eta_1 - \varepsilon = 129{,}1$ cm ist, der Fall. Das „ideelle Dimensionierungsmoment" ist hier $\mu_1 = N \cdot \eta_1 = 22\,000 \cdot 178{,}5 = 3\,920\,000$ kgcm, welchem für $\frac{1000}{40}$ das Trägheitsmoment $J_1 = \frac{3\,920\,000}{40} \cdot 28{,}1 = \frac{\mu_1 \cdot x}{s_b} = 2\,760\,000$ cm^4 entspricht.

Die „ideelle Zugbewehrung" berechnet sich demnach analog der Gl. 57 zu

$$f_{i1} = f_i - \frac{J - J_1}{49\,100} = 96 - 38{,}1 = 57{,}9 \text{ cm}^2,$$

und die anzuordnende Bewehrung ist

$$f_{e1}{}^z = f_{i1} - f_n = \mathbf{35{,}9\ cm^2}.$$

Einfacher mit schätzungsweise $m = h - \frac{d}{2} = 67{,}5$ cm findet man gemäß der Gl. 12

$$f_{i1} = \frac{3 \cdot 920\,000}{67{,}5 \cdot 1000} = 58 \text{ cm}^2,$$

so daß $f_{e1}{}^z = 58 - 22 = \mathbf{36\ cm^2}$ wobei nach Gl. 15a

$$\sigma_b = \frac{\frac{3\,920\,000}{1 \cdot 3 \cdot 15^2} + 6000}{\frac{75}{15} \cdot 100} = 38{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

erhalten wird.

Man ordnet demnach im Querschnitt mit der größten Exzentrizität im Druckgurt

$$f_e{}^d = 3 \text{ R.-E. } 34 + 5 \text{ R.-E. } 36 \text{ mm} = \mathbf{78{,}14\ cm^2},$$

im Zuggurt

$$f_e{}^z = 4 \text{ R.-E. } 34 + 4 \text{ R.-E. } 35 \text{ mm} = \mathbf{74{,}8\ cm^2},$$

ferner in jenem Querschnitt, wo die Exzentrizität $e_1 = 129{,}1$ cm beträgt, nur eine Bewehrung im Zuggurt $f_{e1}{}^z = 4$ R.-E. 34 mm $= \mathbf{36{,}32\ cm^2}$ an.

19. Beispiel: Ein quadratischer Pfeiler nach Schema der Abb. 17 mit $b = 30$ cm und $h + a_1 = 27 + 3 = 30$ cm hat die Druckkraft von $N = 6180$ kg mit der Exzentrizität $e = 34{,}6$ cm aufzunehmen. Da in dem praktischen Falle, dem dieses Beispiel entnommen ist, die Exzentrizität auch

nach der Gegenseite um dasselbe Maß ausschlagen kann, soll der endgültige Querschnitt symmetrisch bewehrt werden.

Für die Bewehrung $f_e^d = 9{,}82$ cm² und $f_i = 19{,}63$ cm² ergibt sich im Falle reiner Biegung

$$x = -\frac{15 \cdot 29{,}45}{30} + \sqrt{14{,}725^2 + 3 \cdot 9{,}28 + 27 \cdot 19{,}63}$$

$$= 13{,}175 \text{ cm}$$

und weiter nach Formel 21) der preußischen Vorschriften

$$\sigma_b = \frac{\mu}{7210} = \frac{6180\,(34{,}6 + 12)}{7210} = 40 \text{ kg/cm}^2$$

und $$\sigma_e = \frac{15 \cdot 13{,}825 \cdot 40}{13{,}175} = 630 \text{ kg/cm}^2.$$

Der „Ersatzquerschnitt" ist also $f_n = \frac{6180}{630} = 9{,}81$ cm², so daß $f_e^z = f_i - f_n = 19{,}63 - 9{,}81 = 9{,}82$ cm², d. h. $f_e^d = f_e^z$ = 2 R.-E.25 mm anzuordnen sind.

Probe: Es muß die Gleichung 9 auf Seite 129 des Werkes „Der Eisenbetonbau" von Prof. E. Mörsch, 3. Aufl. erfüllt sein, was auch der Fall ist:

$$\overline{13{,}175}^3 - \overline{13{,}175}^2 \cdot 3 \cdot (15 - 34{,}6) + 13{,}175 \cdot 12 \cdot 34{,}6 \cdot 15 \cdot \frac{9{,}82}{30}$$

$$- 6 \cdot \frac{15 \cdot 9{,}82}{30}\left(34{,}6 \cdot 30 + 2 \cdot \overline{12}^2\right) = 0.$$

20. Beispiel: Der Untergurt eines Brückenträgers System Vierendeel hat ein Biegungsmoment von $M = 8\,750\,000$ kgcm und die Gurtzugkraft $N = 62\,500$ kg aufzunehmen. Der Querschnitt entspricht der schematischen Abb. 19, jedoch hat der Druckgurt eine einflüglige Platte. Es sind $B = 140$ cm, $b = 50$ cm, $h + a_1 = 130 + 10 = 140$ cm, $d = 16$ cm und die Spannungen dürfen $\sigma_e = 860$ kg/cm² und $\sigma_b = 37$ kg/cm² nicht überschreiten. Es sind die Bewehrungen zu ermitteln.

Die Exzentrizität ist

$$e = \frac{M}{N} = \frac{8\,750\,000}{62\,500} = 140 \text{ cm},$$

der „Ersatzquerschnitt"

$$f_n = \frac{62\,500}{860} = 72{,}6 \text{ cm}^2,$$

der Schwerpunkt S der reinen Betonfläche hat von Plattenoberkante den Abstand

$$\frac{140 \cdot 16 \cdot 8 + 50 \cdot 124 \cdot 78}{140 \cdot 16 + 50 \cdot 124} = 59{,}4 \text{ cm},$$

daher $\varepsilon = 130 - 59{,}4 = 70{,}6$ cm und $\eta = e - \varepsilon = 140 - 70{,}6 = 69{,}4$ cm, so daß $\mu = N \cdot \eta = 4\,340\,000$ kgcm gefunden wird.

Nach dem aus dem Jahre 1905 stammenden Plattenbalkendiagramm*) des Verfassers entsprechen der Abszisse

$$k_1 = \frac{h}{d} = \frac{130}{16} = 8{,}13$$

und der Ordinate

$$k_2 = \frac{\mu}{B \cdot d^2} \cdot \frac{1000}{\sigma_e} = \frac{4\,340\,000}{1{,}4 \cdot 16^2} \cdot \frac{1000}{860} = 14\,050,$$

die Betonpressung $\sigma_b = 23{,}8 \cdot \frac{\sigma_e}{1000} =$ **20,4 kg/cm²** und ein nach dem Plattenrechteck zu nehmender Satz der Zugbewehrung von $\varphi = 1{,}81$ vH., so daß also diese Bewehrung zu $f_i = B \cdot d \cdot \varphi = 1{,}4 \cdot 16 \cdot 1{,}81 = 40{,}5$ cm² ermittelt wird.

In unserem Querschnitt sind demnach

$f_e^x = f_i + f_n = 40{,}5 + 72{,}6 =$ **113,1 cm²**, d. s. 9 R.-E. 40 mm $= 113{,}1$ cm²

anzuordnen, es sind dann die Spannungen $\sigma_e = 860$ kg/cm² und $\sigma_b = 20{,}4$ kg/cm².

21. Beispiel: In demselben Brückenträger wird ein Ständer durch das Moment $M = 1\,040\,000$ kgcm und zufolge der Mehrbelastung des Untergurtes der Brücke noch durch eine Zugkraft von $N = 25800$ kg in Anspruch genommen. Die zulässigen Spannungen sind im 20. Beispiel gegeben. Nach der schematischen Abb. 20 sind $b = 50$ cm, $h + a_1 = 35 + 5 = 40$ cm, $a = 5$ cm.

Es sind

$$e = \frac{M}{N} = 40 \text{ cm}$$

$$\varepsilon = 15 \text{ cm}$$

$$\eta = e - \varepsilon = 25 \text{ cm}$$

$$\mu = 25 \cdot 25\,800 = 645\,000 \text{ kgcm}$$

$$v = \frac{860}{37} = 23{,}2$$

$$x = \frac{15}{15 + 23{,}2} \cdot 35 = 13{,}72 \text{ cm}$$

$$J = \frac{645\,000}{37} \cdot 13{,}72 = 239\,500 \text{ cm}^4,$$

*) Bei demselben ist die Mitwirkung des Stegrechtecks von der Höhe $x - d$ im Druckgurt vernachlässigt. Näheres aus Tabelle II.

demnach liefern die Gl. 53 und 54

$$f_e^d = \frac{239\,500 - \frac{50}{6} \cdot \overline{13,72}^2 \cdot 91,28}{15 \cdot 8,72 \cdot 30} = \frac{96\,500}{3920} = \mathbf{24,6\ cm^2}$$

$$f_i = \frac{239\,500 - \frac{50}{6} \cdot \overline{13,72}^2 \cdot 1,28}{15 \cdot 21,28 \cdot 30} = \frac{237\,780}{9560} = 24,8\ \text{cm}^2,$$

da weiter

$$f_n = \frac{25\,800}{860} = 30,00\ \text{cm}^2$$

ist, so erhalten wir

$$f_e^z = 24,8 + 30 = \mathbf{54,8\ cm^2}.$$

Angeordnet werden

$$f_e^d = 4\ \text{R.-E. } 28\ \text{mm} = \mathbf{24,63\ cm^2}$$

und $\quad f_e^z = 4\ \text{R.-E. } 28 + 4\ \text{R.-E. } 32\ \text{mm} = \mathbf{56,8\ cm^2}.$

Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß die Einhaltung der beiden gegebenen zulässigen Spannungen nur in jenen Fällen denkbar ist, wo die Biegungswirkung überwiegend ist. Bei überwiegendem Einfluß der Achsialdruckkraft würde z. B. das Festhalten an den gegebenen zulässigen Spannungswerten zur Folge haben, daß der Druckgurt unverhältnismäßig hoch bewehrt werden müßte. Man erkennt sofort, daß eine Erweiterung des Druckgurtbereichs nottut, und erreicht dies dadurch, daß man unter Beibehaltung des gegebenen zulässigen σ_b-Wertes ein kleineres Randspannungsverhältnis wählt, d. h. mit anderen Worten: Man geht mit dem σ_e-Wert, den man der Dimensionierung zugrunde legt, je nach Verhältnissen tief unter den gegebenen zulässigen σ_e-Wert herab.

Zeigt sich anderseits, daß der in den äußeren Abmessungen gewählte oder gegebene Querschnitt im Falle reiner Biegung für das Moment μ bei Einhaltung des gegebenen zulässigen σ_e-Wertes eine geringere σ_b-Spannung ergibt als zulässig wäre, so ist es selbstverständlich, daß man sich nicht auf die Einhaltung des zulässigen σ_b steifen darf, weil dieses nur erreicht werden könnte, wenn σ_e für die Bemessung größer als zulässig gewählt würde.

Die Beispiele 22 und 23, welche sich auf Abb. 17 beziehen, mögen zur Erläuterung angeführt sein.

22. Beispiel: Gegeben: $h = 192,5$ cm, $b = 60$ cm, $a = 7,5$ cm, Druckkraft $N = 77\,750$ kg, $e = 138$ cm.

Es sind $\mu = (138 + 92{,}5) \cdot 77\,750 = 17\,900\,000$ kgcm, für $\sigma_e = 950$ kg/cm² und $\sigma_b = 40$ kg/cm², $v = 23{,}75$, $x = 192{,}5 \cdot \frac{15}{38{,}75} = 74{,}5$ cm, $J = 17\,900\,000 \cdot \frac{74{,}5}{40}$ $= 33\,400\,000$ cm⁴. Demnach sind gemäß den Gl. 53 und 54

$$f_e^d = \frac{33\,400\,000 - 10 \cdot 74{,}5^2 \cdot 503}{15 \cdot 67 \cdot 185} = \mathbf{30{,}3\ cm^2},$$

$$f_i = \frac{33\,400\,000 + 10 \cdot \overline{74{,}5}^2 \cdot 52}{15 \cdot 118 \cdot 185} = 111{,}5\ \text{cm}^2,$$

und nach Gl. 86:

$$f_e^z = f_i - \frac{77\,750}{950} = \mathbf{29{,}5\ cm^2}.$$

Angeordnet: $f_e^d = f_e^z = 2$ R.-E. 48 mm $=$ **30,41 cm²**.

23. Beispiel: Querschnittsabmessungen wie Beispiel 22. Druckkraft $N = 142\,650$ kg, $e = 75{,}7$ cm, daher

$$\mu = (75{,}7 + 92{,}5) \cdot 142\,650 = 24\,000\,000\ \text{kgcm}.$$

Hier wird bei der Dimensionierung $\sigma_b = 40$ kg/cm², d. i. der zulässige Wert, eingehalten, die Eisenzugspannung setzen wir hierbei auf $\sigma_e = 335$ kg/cm² herab. Daher

$$v = \frac{335}{40} = 8{,}4, \quad x = 192{,}5 \cdot \frac{15}{23{,}4} = 123{,}5\ \text{cm},$$

d. h. der Druckgurtbereich ist bedeutend erweitert worden, und wir erhalten für

$$J = 24\,000\,000 \cdot \frac{123{,}5}{40} = 74\,000\,000\ \text{cm}^4$$

mit den oben erwähnten Gleichungen:

$$f_e^d = \frac{74\,000\,000 - 10 \cdot \overline{123{,}5}^2 \cdot 454}{15 \cdot 116 \cdot 185} = \mathbf{14{,}3\ cm^2},$$

$$f_i = \frac{74\,000\,000 + 10 \cdot \overline{123{,}5}^2 \cdot 101}{15 \cdot 69{,}5 \cdot 185} = 463\ \text{cm}^2,$$

$$f_e^z = 463 - \frac{142\,650}{335} = \mathbf{38{,}0\ cm^2}.$$

Angeordnet:

$f_e^d = 2$ R.-E. 32 $=$ **16,08 cm²**,
$f_e^z = 2$ R.-E. 50 $=$ **39,27 cm²**.

Im gleichen Sinne ist im Falle exzentrischen Zuges zu verfahren. — Bei stetig abnehmender Exzentrizität wird im

Falle einer Druckkraft schließlich ein solches „Dimensionierungsmoment μ“ erreicht sein, für welches $f_e^s = f_i - f_n = 0$ bezw. ein negativer Wert und in dem Falle einer exzentrischen Zugkraft die Kantenpressung $\sigma_b = 0$ bezw. ein negativer Wert erhalten wird. In den Querschnitten treten dann nur Druckspannungen bezw. nur Zugspannungen auf, und das vorliegende Verfahren verliert seine Gültigkeit. Die Spannungen im Querschnitt dürfen nun innerhalb dieser Grenze sowie für homogene Querschnitte berechnet werden; man ermittelt im Falle des exzentrischen Druckes die der Betonfläche und der $n = 15$fachen Eisenfläche entsprechende ideelle Querschnittsfläche sowie die beiden ideellen Widerstandsmomente und berechnet die Spannungen für die gewählten Querschnitte. Im Falle exzentrischen Zuges wird entweder auf die Zugmitwirkung des Betons verzichtet und die Verteilung der Achsialzugkraft nach dem Hebelgesetz auf die beiden Bewehrungsgruppen durchgeführt, oder aber man bildet bei mitwirkenden Betonzugspannungen die ideelle Querschnittsfläche und die beiden ideellen Widerstandsmomente aus Betonfläche und $n_1 = 37{,}5$ facher Eisenfläche und untersucht die Spannungen des gewählten Querschnitts.

Dem Verfasser schien es geboten, seine Ausführungen durch typische Beispiele zu erläutern, um die Einfachheit und Exaktheit seines einheitlichen Verfahrens recht klar vor Augen zu führen und die Umsetzung in die praktische Anwendung zu erleichtern. Handelt es sich schließlich um die Berechnung der Bewehrungen für exzentrisch beanspruchte kreuzförmige Querschnitte, so wird in ähnlicher Art verfahren, als dies im 14. Beispiel gezeigt wurde, wobei jedoch das Bestehen der Gl. 86 bezw. 92 nicht übersehen werden darf.

Die Bemessung der Kasten- oder Zellendecken.

(Hierzu die Tabellen im Anhang.)

Die im Hochbau wegen ihrer Wirtschaftlichkeit verbreitetsten Deckensysteme sind Kasten- oder Zellendecken. Es ist hier nicht beabsichtigt, auf die verschiedenartigen Ausbildungen dieser Deckentypen einzugehen, sondern nur das Gemeinsame aller dieser Systeme: die billigste Art, die in Wohnbauten geforderten ebenen Deckenuntersichten herzustellen und die Deckenlast auf ein unumgängliches Mindestmaß zu beschränken, hervorgehoben werden.

Dieses Ziel wird bei allen Systemen durch Einfügung von Hohl- oder leichten Vollkörpern aus Holz, Rohr- oder Holzstäbchen-Gewebe, Rohrbündel usw. erreicht, welche zugleich die Gußform für die Deckenrippen bilden.

Ueber die wirtschaftlich günstigste Entfernung der Deckenrippen in Zellendecken hat der Verfasser gelegentlich eine Untersuchung angestellt, deren Ergebnis im wesentlichsten den wichtigen Aufschluß gab, die Stegentfernung, somit auch die Zellenbreiten so groß, als dies durch die Tragfähigkeit der die Stege verbindenden Platte tunlich erscheint, zu wählen. Allzu streng darf aber dieses aus der Kostenformel erhaltene Ergebnis nicht befolgt werden, weil mit einer stetigen Aenderung der Zellenbreite notwendig eine Verteuerung der Herstellung dieser Hohlformen verbunden ist. Es muß also nach diesem Gesichtspunkt an eine Auswahl bestimmter Hohlkörpertypen geschritten werden. In den Tabellen des Anhanges wurden die Zellenformen nach praktischen Gesichtspunkten so gewählt, daß für die Deckentypen I bis IV die Stegentfernung $\lambda = 75$ cm und die reinen Deckenstärken 20 bis 40 cm und für die Deckentypen VII bis XII die Stegentfernung $\lambda = 100$ cm und die reinen Deckenstärken 25 bis 45 cm betragen. Die Einrichtung der Tabellen ist so getroffen, daß man nur die auf 1 m² entfallende Fremdlast f zu ermitteln hat und in der Tabelle des gewählten Deckentyps für die vorliegende Stützweite bei teilweiser Einspannung an den Enden $\left(\text{Moment } M = \frac{Ql}{10}\right)$ sofort die in jedem Stege anzuordnende Eisenquerschnittsfläche ablesen kann. Für Veranschlagungszwecke sind die Erfordernisse an Beton und an Eisen für 1 m² ohne Auflagerzuschlag angegeben. Das Eisenerfordernis ist für die Platte und den Steg getrennt angegeben. Die Angabe der hervorstechendsten Kantenpressungen im Beton soll die Wahl des Mischungsverhältnisses im Sinne der österreichischen, für Staatsbauten gültigen Regierungsvorschrift erleichtern. Platten und Stege werden in einem Mischungsverhältnis, und zwar in jenem hergestellt, wie es sich für die Stege als erforderlich ergibt.

In den Abmessungen der Platte, der Stegbreite und der zu berücksichtigenden Druckgurtbreite wurden die jüngsten österreichischen Regierungsvorschriften vom 15. Juni 1911 beachtet. Entsprechend diesen Vorschriften ist die Plattenstärke mit $d = 6$ cm, ferner für die Typen I bis VI die Stegdicke $b = 10$ cm und die Druckgurtbreite (da nach § 5, Punkt 12 die Stegentfernung $\lambda = 75 \text{ cm} < 8\,b < 16\,d$ ist)

zu 75 cm berücksichtigt. Für die Typen VII bis XII ist die Stegdicke $b = 12$ cm und die wirksame Druckgurtbreite mit $16\,d = 8\,b = 96$ cm berücksichtigt worden. Mit der Aufstellung der Tabellen verfolgt der Verfasser aber nicht allein den Zweck, den bei ausführenden Firmen arbeitenden Ingenieuren die Arbeit für das Veranschlagen zu erleichtern, sondern er empfiehlt den Gebrauch derselben auch bei Abfassung von statischen Berechnungen sowie zur Ueberprüfung, wo ein Hinweis auf diese Tabellen den bei einfachen Zwischendecken unangebrachten Formelkram beseitigen soll. Die ersparte Arbeitszeit kann dann den Berechnungen der Unterzüge und sonstigen Konstruktionen gewidmet werden. Wie es derzeit Uebung ist, pflegt man für die Deckenkonstruktionen eines einfachen Hochbaues statische Berechnungen aufzustellen, die den Umfang einer Dissertation erreichen, welche nicht nur eine Last für die ausführenden Firmen, sondern eine noch größere Belastung der Bauaufsichtsbehörden bilden, denen nicht in dem Maße Spezialfachleute zur Verfügung stehen, um für eine ganze Reihe gleichzeitig laufender Bauten umfangreiche Berechnungen zu überprüfen. In diesem Sinne: zu kürzen und zu vereinfachen, ohne Wichtiges zu vernachlässigen, sollten die angefügten Tabellen der Decken sowie die Ausführungen der übrigen Abschnitte dieser Broschüre gebraucht werden.

Die theoretische Grundlage der Deckentabellen ist kurz skizziert die folgende: Jeder Zellensteg stellt einen Plattenbalken dar, für 1 m Druckgurtbreite hat die Anzahl $\frac{1}{\lambda}$ der auf λ^m verlegten Stege das Moment $\frac{Q\,l}{10} = \frac{(g+f)\cdot l^2 \cdot 100}{10}$ aufzunehmen. Nach Tabelle II auf S. 10 läßt sich dieses Moment auch $M_{100} = k_2 \cdot d^2$ ausdrücken. Es besteht also die Beziehung $k_2 \cdot d^2 = 10 \cdot (g+f) \cdot l^2$, woraus die zulässige Spannweite

$$l = \sqrt{\frac{k_2 \cdot d^2}{10\,(g+f)}}$$

oder mit $\frac{k_2 \cdot d^2}{10} = \alpha_2$ und mit $g + f = q$ auch

$$l = \sqrt{\frac{\alpha_2}{q}}.$$

Jedem Zellentyp kommt nun eine bestimmte statische Höhe h zu, so daß deren Höhenverhältnis $k_1 = \frac{h}{d}$ (vergl. S. 8) ge-

geben ist. Wird jeder Steg mit den in den Zellentabellen ersichtlichen Eisenquerschnittsflächen f_e versehen, so läßt sich mit Hilfe der jedem Stege zugeordneten Druckgurtbreite B in m der Bewehrungssatz $\varphi = \frac{f_e}{B \cdot d}$, also bei den Typen I bis VI zu

$$\varphi = \frac{f_e}{0{,}75 \cdot 6} = \frac{f_e}{4{,}5}$$

und bei den Typen VII bis XII zu

$$\varphi = \frac{f_e}{0{,}96 \cdot 6} = \frac{f_e}{5{,}76}$$

ermitteln. Mit Hilfe des Höhenverhältnisses k_1 und des Bewehrungssatzes φ läßt sich nun mit Hilfe des auf S. 9 erwähnten Plattenbalkendiagramms für die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² die Kantenpressung im Plattenbalken und der Beiwert k_2 ablesen, welcher dann in obigem Ausdrucke zur Ermittlung der zulässigen Spannweite benutzt wurde. Für die Spannungen $\sigma_b < 15$ kg/cm² wurde dagegen die Berechnung der zulässigen Spannweite in der Weise durchgeführt, daß vorerst die auf 100 cm Druckgurtbreite entfallende Bewehrung zu $f_{e100} = \frac{1}{\lambda} \cdot f_e$ und der Hebelarm m ermittelt wurde. Für die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² ist nun das Moment

$$1000 \cdot m \cdot f_{e100} = \frac{(g+f) \cdot l^2 \cdot 100}{10},$$

woraus schließlich die zulässige Spannweite

$$l = \sqrt{\frac{100 \cdot m \cdot f_e}{\lambda (g+f)}}$$

oder mit $\frac{100 \cdot m \cdot f_e}{\lambda} = \alpha_1$ und $g + f = q$ auch

$$l = \sqrt{\frac{\alpha_1}{q}}$$

erhalten wird.

Bei ein und demselben Zellentyp entspricht jedem Eisenquerschnitt f_e eines Steges ein zugeordneter Wert α_1 oder α_2. Für eine konstant bleibende Gesamtlast $q = g + f$ verhalten sich die zulässigen Spannweiten für verschiedene Eisenquerschnitte somit wie die zugeordneten Werte $\sqrt{\alpha_1}$ bezw. $\sqrt{\alpha_2}$. Die zulässigen Spannweiten für einen konstant bleibenden

Eisenquerschnitt und veränderliche Gesamtlasten $q_1 = g + f_1$, $q_2 = g + f_2$ usw. verhalten sich dagegen wie die Werte

$$\sqrt{\frac{1}{q}}.$$

Dieser Umstand kam einer einfachen Ermittlung der Tabellenwerte sehr zustatten und ermöglicht es auch, die zulässige Spannweite für andere Fremdlasten, als an den Tabellenköpfen ersichtlich ist, zu ermitteln.

Die in den Stegen anzuordnenden Eisenquerschnittsflächen sind in jenen Tabellen durch Rundeisenquerschnitte zum Ausdruck gebracht, womit nicht beabsichtigt ist, jene Rundeisen zur Anordnung vorzuschlagen; die Deckung soll vielmehr nach freiem Ermessen des Konstrukteurs am zweckmäßigsten, um die Haftspannung in zulässigen Grenzen zu erhalten, durch Rundeisen erfolgen, deren Durchmesser in mm das 4,5fache der Stützweite in m betragen.

Zwischen der größten, am Auflager im Stege auftretenden Schubspannung, der Bewehrung f_e eines Steges und der Spannweite l in m läßt sich eine einfache Beziehung herstellen.

Für den Auflagerdruck $\frac{ql}{2}$ kg berechnet sich mit Hilfe des Hebelarms m und der Stegdicke b, beide in cm, die Schubspannung zu

$$\tau_0 = \frac{q\,l}{2\,m \cdot b} \quad \ldots\ldots \quad 94).$$

Die Tabellen sind für das Moment

$$M = \frac{Ql}{10} = 10\,q \cdot l^2$$

berechnet, und ferner ist denselben die Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm² zugrunde gelegt. Der Hebelarm m läßt sich daher aus der Beziehung

$$M = 1000 \cdot f_e \cdot m = 10 \cdot q \cdot l^2 \quad \ldots \quad 95)$$

zu

$$m = \frac{q l^2}{100 \cdot f_e} \quad \ldots\ldots \quad 96)$$

ermitteln, mit welchem Werte die Gl. 94)

$$\tau_0 = \frac{50 \cdot f_e}{b \cdot l} \quad \ldots\ldots \quad 97)$$

lautet.

Für gegebene einzuhaltende Schubspannungen τ_0 läßt sich jene kleinste Spannweite ermitteln, bei welcher jedwede Belastungsgröße diesen Schubspannungswert ergibt:

$$l = \frac{50 \cdot f_e}{b \cdot \tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 98),$$

besonders für die Typen I bis VI:

$$l = \frac{5 \cdot f_e}{\tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 99)$$

und für die Typen VII bis XII:

$$l = \frac{4{,}17 \cdot f_e}{\tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 100).$$

Der Gebrauch der Tabellen gestaltet sich einfach: Kann infolge der konstruktiven Anordnungen beim Auflager mit sogenannter Halbeinspannung $\left(M = \frac{Ql}{10}\right)$ gerechnet werden, so sind die Ergebnisse einfach aus den Tabellen abzulesen. Hat man für eine im Projekt vorliegende Spannweite l das Moment mit $M = \frac{Ql}{k}$ zu berücksichtigen, so erfolgt die Ablesung für den Tabellenwert

$$l_t = l \cdot \sqrt{\frac{10}{k}} \quad \ldots\ldots \quad 101).$$

Die Gl. 97) und 98) erfahren die Veränderungen

$$\tau_0 = \frac{5 \cdot k \cdot f_e}{b \cdot l} \quad \ldots\ldots \quad 102)$$

und

$$l = \frac{5 \cdot k \cdot f_e}{b \cdot \tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 103),$$

so daß für die Typen I bis VI:

$$l = \frac{0{,}5 \cdot k \cdot f_e}{\tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 104)$$

und für die Typen VII bis XII:

$$l = \frac{0{,}417 \cdot k \cdot f_e}{\tau_0} \quad \ldots\ldots \quad 105)$$

erhalten wird.

24. Beispiel: Für eine teilweise eingespannte Wohnhausdecke von 6,30 m Stützweite, deren Nutzlast 250 kg/m² beträgt, sind die Unterlagen für die Veranschlagung zu ermitteln. Für die Deckenkonstruktion, Beschüttung, Blind- und Brettelboden stehen 45 cm Höhe zur Verfügung.

Die Fremdlast setzt sich zusammen aus:

Nutzlast		250 kg
8 cm Schuttlage 0,08 · 1400 . . .	=	112 „
Blind- und Brettelboden 0,05 · 700 .	=	35 „
Fremdlast f	=	397 kg = 400 kg.

Da die reine Konstruktionshöhe der Decke 45 — (8 + 5) = 32 cm beträgt, so kommen für die Anwendung die Typen IV und IX in Betracht. Aus den Tabellen im Anhang entnehmen wir folgendes:

Aufwand bei Typ IV einschließlich Auflager:

$$\text{Beton:} \quad 0{,}095 \cdot \frac{6{,}30}{6{,}00} = 0{,}10 \text{ m}^3,$$

$$\text{Eisen:} \quad (7{,}9 + 0{,}77) \cdot \frac{6{,}30}{6{,}00} = 9{,}10 \text{ kg}.$$

Aufwand bei Typ IX einschließlich Auflager:

$$\text{Beton:} \quad 0{,}0915 \cdot \frac{6{,}30}{6{,}00} = 0{,}096 \text{ m}^3,$$

$$\text{Eisen:} \quad (7{,}553 + 1{,}08) \cdot \frac{6{,}30}{6{,}00} = 9{,}05 \text{ kg}.$$

Aus diesen Ergebnissen erkennen wir, daß der Typ IX mit größerer Verlagsweite der Stege um geringes billiger zu stehen kommt.

Anhang.

A. Zusammenstellung der Feld- und Stützenmomente für durchlaufende Konstruktionen.

Die bewegliche Last beträgt für 1 lfd. m b.
„ ständige „ „ „ 1 „ „ s.
„ Gesamtlast „ „ „ 1 „ „ q.

Das Verhältnis der beweglichen zur ständigen Last ist

$$\alpha = \frac{b}{s}.$$

a) **Zwei gleiche Oeffnungen:**

Feldmoment in 0,4 l:

$$M_1 = +0{,}07 \cdot \frac{1 + 1{,}36 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

Mittelstütze in l:

$$-M_{\max} = -0{,}125 \cdot q \cdot l^2.$$

b) **Drei gleiche Oeffnungen:**

Feldmoment in 0,4 l:

$$M_1 = +0{,}08 \cdot \frac{1 + 1{,}25 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

Zwischenstütze in l:

$$-M_{\max} = -0{,}10 \cdot \frac{1 + 1{,}17 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

Feldmoment in 1,5 l:

$$M_2 = +0{,}025 \cdot \frac{1 + 3 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2.$$

c) Vier gleiche Oeffnungen:

Feldmoment in $0{,}4\,l$:

$$M_1 = +\,0{,}07714 \cdot \frac{1 + 1{,}275 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

1. Zwischenstütze in l:

$$-M_{max} = -\,0{,}10714 \cdot \frac{1 + 1{,}123 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

Feldmoment in $1{,}5\,l$:

$$M_2 = +\,0{,}03572 \cdot \frac{1 + 2{,}25 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2;$$

2. Zwischenstütze in $2\,l$:

$$-M_{max} = -\,0{,}07143 \cdot \frac{1 + 1{,}5 \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot q \cdot l^2.$$

Beschränkung: Kommt nur ruhende Last in Betracht, so empfiehlt es sich, die Feldmomente mindestens zum Werte $+\,0{,}05 \cdot q \cdot l^2$ zu berücksichtigen.

B. Tabellen für die Erfordernisse der Kasten- und Zellendecken.

Typ I.

Eigengewicht:

Platte	144 kg/m²,
Steg	51 „
Putz und Zelle	32 „
	g = 227 kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,0813 m³**,
Konstruktionshöhe 20 cm,
Statische Höhe 17 cm,
Entfernung der Stegmitten **0,75 m**,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von f = 100	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite l =							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	2,27	1,99	1,79	1,64	1,52	1,43	1,35	
1 „ 11 = 0,95 „	0,995	2,48	2,17	1,96	1,79	1,66	1,56	1,47	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	2,73	2,39	2,16	1,97	1,83	1,72	1,62	
1 „ 13 = 1,33 „	1,39	2,95	2,58	2,32	2,13	1,97	1,85	1,75	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	3,17	2,77	2,50	2,29	2,12	1,99	1,88	
1 „ 15 = 1,77 „	1,85	3,32	2,90	2,62	2,40	2,22	2,08	1,97	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	3,57	3,12	2,82	2,58	2,39	2,24	2,12	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	3,86	3,37	3,04	2,81	2,58	2,42	2,28	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	4,06	3,55	3,20	2,93	2,72	2,55	2,40	
1 „ 19 = 2,84 „	2,97	4,26	3,72	3,36	3,08	2,85	2,68	2,52	—
1 „ 20 = 3,14 „	3,29	4,45	3,89	3,51	3,21	2,98	2,79	2,64	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	4,63	4,05	3,65	3,34	3,10	2,91	2,74	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	4,92	4,30	3,88	3,55	3,29	3,09	2,92	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	5,11	4,47	4,03	3,69	3,42	3,21	3,03	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	5,30	4,64	4,18	3,82	3,54	3,33	3,14	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	5,55	4,85	4,38	4,00	3,71	3,48	3,29	—
1 „ 26 = 5,31 „	5,55	5,80	5,07	4,57	4,18	3,88	3,64	3,44	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	5,98	5,23	4,72	4,32	4,00	3,75	3,54	—
1 „ 28 = 6,16 „	6,44	6,20	5,41	4,88	4,48	4,15	3,89	3,67	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	6,38	5,58	5,03	4,60	4,27	4,00	3,78	32
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	6,55	5,72	5,16	4,72	4,38	4,11	3,88	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	6,75	5,90	5,32	4,87	4,52	4,24	4,00	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	6,99	6,10	5,50	5,04	4,67	4,38	4,14	—
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	7,18	6,28	5,66	5,18	4,80	4,50	4,25	37
1 „ 34 = 9,08 „	9,50	7,42	6,49	5,85	5,35	4,96	4,65	4,40	—
1 „ 35 = 9,62 „	10,05	7,60	6,65	6,00	5,48	5,08	4,77	4,50	—
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	7,86	6,88	6,20	5,68	5,26	4,93	4,65	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . σ_b =	steigend bis						21

Typ II.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 61 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 237$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager 0,0855 m³,
Konstruktionshöhe 25 cm,
Statische Höhe 22 cm,
Entfernung der Stegmitten 0,75 m,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100	200	300	400	500	600	700 in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		100	200	300	400	500	600	700	
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	2,54	2,23	2,02	1,85	1,72	1,61	1,53	
1 „ 11 = 0,95 „	0,995	2,79	2,45	2,21	2,03	1,89	1,77	1,68	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	3,04	2,67	2,41	2,22	2,06	1,93	1,83	
1 „ 13 = 1,33 „	1,39	3,30	2,90	2,61	2,40	2,23	2,09	1,98	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	3,55	3,12	2,81	2,59	2,41	2,25	2,13	
1 „ 15 = 1,77 „	1,85	3,80	3,34	3,01	2,77	2,58	2,41	2,28	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	4,05	3,56	3,21	2,95	2,74	2,57	2,43	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	4,62	3,74	3,37	3,10	2,89	2,70	2,56	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	4,56	4,00	3,61	3,32	3,09	2,89	2,74	
1 „ 19 = 2,84 „	2,97	4,79	4,21	3,79	3,49	3,24	3,04	2,88	—
1 „ 20 = 3,14 „	3,29	5,00	4,40	3,96	3,64	3,39	3,17	3,00	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	5,26	4,61	4,17	3,83	3,56	3,34	3,16	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	5,51	4,85	4,36	4,02	3,74	3,49	3,31	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	5,80	5,10	4,60	4,23	3,93	3,68	3,48	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	6,02	5,28	4,77	4,38	4,08	3,81	3,62	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	6,24	5,48	4,95	4,55	4,23	3,95	3,75	—
1 „ 26 = 5,31 „	5,55	6,45	5,66	5,10	4,70	4,37	4,09	3,87	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	6,69	5,86	5,30	4,87	4,53	4,23	4,01	—
1 „ 28 = 6,16 „	6,44	7,00	6,15	5,55	5,10	4,74	4,44	4,20	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	7,23	6,35	5,72	5,27	4,90	4,58	4,34	—
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	7,44	6,54	5,88	5,42	5,04	4,71	4,47	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	7,70	6,77	6,10	5,60	5,22	4,88	4,62	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	7,90	6,94	6,28	5,75	5,35	5,00	4,74	32
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	8,12	7,13	6,43	5,91	5,50	5,15	4,88	—
1 „ 34 = 9,08 „	9,50	8,38	7,35	6.64	6,10	5,68	5,30	5,03	—
1 „ 35 = 9,62 „	10,05	8,60	7,55	6,81	6,26	5,82	5,45	5,17	—
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	8,82	7,75	6,98	6,42	5,98	5,58	5,30	37
1 „ 37 = 10,75 „	11,25	9,10	8,00	7,20	6,63	6,16	5,77	5,46	—
1 „ 38 = 11,34 „	11,85	9,29	8,15	7,35	6,77	6,29	5,88	5,58	—
1 „ 39 = 11,94 „	12,50	9,55	8,38	7,55	6,95	6,47	6,05	5,73	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0.77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						21

Typ III.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 77 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 253$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager 0,092 m³,
Konstruktionshöhe 30 cm,
Statische Höhe 27 cm,
Entfernung der Stegmitten 0,75 m,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100 in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	2,75	2,43	2,20	2.02	1,88	1,77	1,67	
1 „ 11 = 0,95 „	0.995	3,02	2,66	2,40	2.15	2,06	1,94	1,84	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	3,29	2,90	2,62	2.42	2,25	2,12	2,00	
1 „ 13 = 1,33 „	1.39	3.57	3,15	2,85	2.62	2,44	2,30	2.17	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	3,84	3,38	3,06	2.82	2,63	2.47	2.34	
1 „ 15 = 1.77 „	1,85	4,12	3,64	3,22	3.03	2,82	2.65	2.51	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	4,39	3,86	3.50	3.22	3,00	2.82	2.67	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	4,66	4,11	3,72	3,43	3,19	3,00	2.84	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	4,94	4,35	3,83	3,62	3,38	3,17	3,00	
1 „ 19 = 2.84 „	2,97	5,20	4,58	4,15	3,82	3,56	3,34	3,16	—
1 „ 20 = 3.14 „	3,29	5.48	4,83	4,37	4,02	3,75	3,53	3,34	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	5,71	5,04	4,55	4,20	3,91	3.68	3,48	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	5,92	5,22	4,72	4,35	4,05	3,81	3,60	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	6,18	5,45	4,93	4.54	4,23	3,98	3.76	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	6,54	5,76	5,21	4,80	4.47	4,21	3,98	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	6,73	5.94	5,38	4,93	4,60	4,33	4.10	—
1 „ 26 = 5,31 „	5.55	7.03	6.20	5,60	5,15	4,82	4.52	4.28	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	7.28	6,42	5.80	5.35	4,98	4,68	4.43	—
1 „ 28 = 6.16 „	6,44	7,55	6,65	6,02	5.54	5,17	4.86	4,59	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	7,82	6,90	6,73	5,74	5,35	5.03	4.76	—
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	8,10	7,15	6,45	5,94	5,54	5.21	4.93	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	8,38	7,40	6,68	6,15	5,73	5,40	5,10	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	8,59	7,57	6,85	6,30	5,87	5,52	5,22	—
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	8,86	7,81	7,06	6.50	6,06	5,70	5,40	—
1 „ 34 = 9,08 „	9.50	9,14	8,05	7,29	6,70	6,25	5.88	5,56	—
1 „ 35 = 9.62 „	10.05	9,42	8.30	7.52	6.91	6,45	6.06	5,73	32
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	9,78	8.62	7.80	7,17	6.69	6,30	5.95	—
1 „ 37 = 10,75 „	11.25	10,00	8,81	7,97	7,34	6,85	6,44	6.08	—
1 „ 38 = 11,34 „	11.85	10,20	9,00	8,13	7,48	6,98	6,56	6,20	37
1 „ 39 = 11.94 „	12,50	10,47	9.22	8,35	7,68	7,16	6.73	6,36	—
1 „ 40 = 12,56 „	13.15	10.72	9.45	8,55	7,87	7,34	6,90	6,52	—
1 „ 41 = 13,20 „	13,80	10,98	9,68	8,75	8,05	7,50	7,06	6,68	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						21

Typ IV.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 83 „
Putz und Zelle 32 „

g = 259 kg/m²,

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager 0,095 m³,
Konstruktionshöhe 32 cm,
Statische Höhe 29 cm,
Entfernung der Stegmitten 0,75 m,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	2,88	2,55	2,31	2,12	1,98	1,86	1,76	
1 „ 11 = 0,95 „	0,995	3,10	2,75	2,49	2,96	2,14	2,00	1,90	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	3,38	3,00	2,71	2,50	2,33	2,19	2,07	
1 „ 13 = 1,33 „	1,39	3,67	3,25	2,95	2,72	2,53	2,38	2,25	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	3,95	3,50	3,17	2,92	2,72	2,56	2,42	
1 „ 15 = 1,77 „	1,85	4,23	3,75	3,39	3,13	2,92	2,74	2,60	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	4,51	4,00	3,62	3,34	3,11	2,92	2,76	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	4,79	4,25	3,84	3,54	3,30	3,10	2,94	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	5,07	4,48	4,07	3,75	3,49	3,28	3,10	
1 „ 19 = 2,84 „	2,97	5,36	4,75	4,30	3,96	3,69	3,47	3,28	—
1 „ 20 = 3,14 „	3,29	5,61	4,98	4,50	4,15	3,87	3,63	3,44	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	5,92	5,25	4,75	4,38	4,08	3,83	3,63	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	6,13	5,43	4,92	4,53	4,22	3,96	3,75	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	6,37	5,64	5,12	4,72	4,38	4,13	3,90	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	6,64	5,88	5,33	4,91	4,57	4,29	4,07	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	6,90	6,11	5,54	5,10	4,75	4,47	4,22	—
1 „ 26 = 5,31 „	5,55	7,25	6.43	5,82	5,36	5,00	4,68	4,44	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	7,48	6,63	6,00	5,54	5,15	4,84	4,58	—
1 „ 28 = 6,16 „	6,44	7,81	6,93	6,27	5,78	5,38	5,05	4,79	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	8,09	7,16	6,49	5,98	5,57	5,23	4,95	—
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	8,30	7,35	6,66	6.14	5,72	5,37	5,08	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	8,54	7,56	6,85	6,32	5,88	5,53	5,23	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	8,90	7,89	7,15	6,58	6,13	5,75	5,45	—
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	9,16	8,12	7,35	6,78	6,31	5,93	5,61	—
1 „ 34 = 9,08 „	9,50	9,44	8.36	7,58	6,98	6,50	6,10	5,78	—
1 „ 35 = 9,62 „	10,05	9,67	8,58	7,76	7,15	6,66	6,25	5,93	32
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	9,96	8,83	8,00	7,37	6,86	6,45	6,10	—
1 „ 37 = 10.75 „	11,25	10,30	9,13	8,26	7,61	7.10	6,65	6,30	—
1 „ 38 = 11,34 „	11,85	10,53	9,35	8,45	7,78	7,25	6,82	6,45	—
1 „ 39 = 11.94 „	12,50	10,78	9,55	8,65	7,97	7,42	6,97	6,60	37
1 „ 40 = 12.56 „	13,15	11,05	9.80	8,88	8.18	7,60	7,15	6,77	—
1 „ 41 = 13.20 „	13,80	11,30	10.00	9,08	8,35	7,78	7,30	6,91	—
1 „ 42 = 13,85 „	14,50	11,56	10.24	9,28	8,55	7,96	7,48	7,08	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0.77	0,77	0.77	0.77	0.77	0.93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						21

Typ V.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 93 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 269$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager 0,0986 m³,
Konstruktionshöhe 35 cm,
Statische Höhe 32 cm,
Entfernung der Stegmitten 0,75 m,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100	200	300	400	500	600	700 in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	2,93	2,59	2,36	2,17	2,03	1,91	1,81	
1 „ 11 = 0,95 „	0,995	3,21	2,84	2,58	2,38	2,22	2,09	1,98	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	3,50	3,10	2,81	2,60	2,42	2,28	2,16	
1 „ 13 = 1,33 „	1,39	3,80	3,36	3,05	2,82	2,63	2,48	2,34	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	4,08	3,61	3,28	3,03	2,82	2,66	2,52	
1 „ 15 = 1,77 „	1,85	4,38	3,88	3,52	3,25	3,03	2,86	2,70	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	4,67	4,14	3,75	3,47	3,23	3,04	2,88	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	4,96	4,40	3,98	3,68	3,43	3,23	3,06	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	5,29	4,68	4,25	3,93	3,66	3,44	3,26	
1 „ 19 = 2,84 „	2,97	5,55	4,91	4,46	4,12	3,84	3,62	3,42	—
1 „ 20 = 3,14 „	3,29	5,84	5,17	4,68	4,33	4,03	3,80	3,60	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	6,12	5,42	4,92	4,55	4,23	3,98	3,78	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	6,39	5,65	5,13	4,74	4,42	4,16	3,94	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	6,70	5,92	5,38	4,97	4,63	4,35	4,13	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	6,98	6,18	5,60	5,18	4,83	4,55	4,31	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	7,27	6,44	5,84	5,40	5,03	4,73	4,48	—
1 „ 26 = 5,31 „	5,55	7,46	6,61	6,00	5,55	5,16	4,87	4,60	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	7,83	6,94	6,28	5,82	5,42	5,10	4,83	—
1 „ 28 = 6,16 „	6,44	8,16	7,23	6,55	6,06	5,65	5,32	5,04	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	8,45	7,48	6,79	6,28	5,85	5,50	5,21	—
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	8,59	7,60	6,90	6,38	5,95	5,60	5,30	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	8,96	7,94	7,20	6,66	6,20	5,84	5,52	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	9,28	8,22	7,45	6,90	6,42	6,05	5,72	—
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	9,56	8,47	7,68	7,10	6,62	6,23	5,90	—
1 „ 34 = 9,08 „	9,50	9,82	8,70	7,88	7,30	6,80	6,40	6,06	—
1 „ 35 = 9,62 „	10,05	10,10	8,95	8,10	7,50	6,99	6,58	6,22	—
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	10,40	9,20	8,35	7,72	7,20	6,77	6,41	32
1 „ 37 = 10,75 „	11,25	10,68	9,45	8,58	7,92	7,38	6,95	6,58	—
1 „ 38 = 11,34 „	11,85	10,95	9,70	8,80	8,13	7,57	7,13	6,75	—
1 „ 39 = 11,94 „	12,50	11,26	9,95	9,05	8,36	7,78	7,33	6,95	37
1 „ 40 = 12,56 „	13,15	11,52	10,20	9,25	8,55	7,98	7,50	7,10	—
1 „ 41 = 13,20 „	13,80	11,78	10,42	9,45	8,75	8,15	7,65	7,26	—
1 „ 42 = 13,85 „	14,50	12,05	10,68	9,68	8,95	8,34	7,85	7,43	42
1 „ 43 = 14,52 „	15,20	12,35	10,93	9,92	9,18	8,55	8,05	7,62	—

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						21

Typ VI.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 109 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 285$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,1055 m³**,
Konstruktionshöhe 40 cm,
Statische Höhe 37 cm,
Entfernung der Stegmitten **0,75 m**,
Stegdicke 10 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f=$ … in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$							Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		100	200	300	400	500	600	700	
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,825	3,08	2,74	2,50	2,31	2,16	2,03	1,93	
1 „ 11 = 0,95 „	0,995	3,38	3,00	2,74	2,54	2,36	2,26	2,11	
1 „ 12 = 1,13 „	1,185	3,68	3,27	2,98	2,76	2,57	2,42	2,30	
1 „ 13 = 1,33 „	1,39	3,99	3,55	3,24	3,00	2,79	2,63	2,50	
1 „ 14 = 1,54 „	1,61	4,30	3,82	3,49	3,23	3,00	2,84	2,69	
1 „ 15 = 1,77 „	1,85	4,61	4,10	3,74	3,46	3,26	3,04	2,88	
1 „ 16 = 2,01 „	2,10	4,91	4,37	3,98	3,69	3,44	3,24	3,07	
1 „ 17 = 2,27 „	2,38	5,32	4,64	4,23	3,91	3,65	3,44	3,26	
1 „ 18 = 2,54 „	2,66	5,52	4,91	4,48	4,15	3,86	3,64	3,45	
1 „ 19 = 2,84 „	2,97	5,84	5,20	4,74	4,38	4,08	3,85	3,65	—
1 „ 20 = 3,14 „	3,29	6,13	5,45	4,97	4,60	4,28	4,04	3,83	—
1 „ 21 = 3,46 „	3,62	6,44	5,73	5,22	4,83	4,50	4,24	4,02	—
1 „ 22 = 3,80 „	3,98	6,72	5,98	5,45	5,05	4,70	4,43	4,20	—
1 „ 23 = 4,18 „	4,35	7,12	6,33	5,78	5,35	4,98	4,69	4,45	—
1 „ 24 = 4,52 „	4,73	7,45	6,63	6,05	5,60	5,20	4,90	4,65	—
1 „ 25 = 4,91 „	5,13	7,75	6,90	6,28	5,82	5,42	5,10	4,84	—
1 „ 26 = 5,31 „	5,55	8,05	7,15	6,53	6,05	5,63	5,30	5,02	—
1 „ 27 = 5,73 „	6,00	8,24	7,34	6,68	6,18	5,76	5,43	5,15	—
1 „ 28 = 6,16 „	6,44	8,62	7,66	7,00	6,47	6,03	5,68	5,38	—
1 „ 29 = 6,60 „	6,90	8,96	7,97	7,27	6,73	6,27	5,91	5,60	—
1 „ 30 = 7,07 „	7,40	9,26	8,25	7,52	6,95	6,48	6,10	5,78	—
1 „ 31 = 7,55 „	7,90	9,52	8,46	7,72	7,15	6,66	6,28	5,95	—
1 „ 32 = 8,04 „	8,40	9,76	8,69	7,92	7,33	6,83	6,44	6,10	—
1 „ 33 = 8,55 „	8,95	10,06	8,95	8,15	7,55	7,04	6,63	6,28	—
1 „ 34 = 9,08 „	9,50	10,38	9,23	8,42	7,78	7,25	6,83	6,48	—
1 „ 35 = 9,62 „	10,05	10,72	9,55	8,70	8,05	7,50	7,06	6,70	—
1 „ 36 = 10,18 „	10,65	10,98	9,76	8,90	8,25	7,68	7,23	6,85	—
1 „ 37 = 10,75 „	11,25	11,38	10,10	9,23	8,54	7,95	7,50	7,10	32
1 „ 38 = 11,34 „	11,85	11,58	10,30	9,38	8,68	8,10	7,63	7,44	—
1 „ 39 = 11,94 „	12,50	11,88	10,57	9,63	8,90	8,30	7,83	7,22	—
1 „ 40 = 12,56 „	13,15	12,16	10,82	9,85	9,13	8,50	8,00	7,60	37
1 „ 41 = 13,20 „	13,80	12,45	11,08	10,10	9,35	8,70	8,20	7,78	—
1 „ 42 = 13,85 „	14,50	12,80	11,40	10,38	9,60	8,95	8,43	8,00	—
1 „ 43 = 14,52 „	15,20	13,25	11,80	10,75	9,95	9,25	8,73	8,28	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,77	0,93
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						21

Typ VII.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 55 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 231$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,083 m³**,
Konstruktionshöhe 25 cm,
Statische Höhe 22 cm,
Entfernung der Stegmitten **1 m**,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisen-aufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,62	2,27	1,99	1,79	1,64	1,53	1,43	1,35	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	2,49	2,12	1,96	1,80	1,67	1,57	1,48	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	2,71	2,37	2,16	1,96	1,82	1,71	1,62	
1 „ 13 = 1,33 „	1,04	2,94	2,57	2,31	2,12	1,97	1,85	1,75	
1 „ 14 = 1,54 „	1,21	3,16	2,67	2,49	2,28	2,12	2,00	1,88	
1 „ 15 = 1,77 „	1,39	3,39	2,96	2,67	2,45	2,28	2,14	2,02	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	3,61	3,16	2,85	2,61	2,42	2,28	2,15	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	3,83	3,35	3,02	2,77	2,57	2,42	2,28	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	4,07	3,56	3,20	2,94	2,73	2,57	2,43	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	4,29	3,75	3,38	3,10	2,88	2,70	2,56	—
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	4,51	3,94	3,56	3,26	3,03	2,85	2,69	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	4,77	4,18	3,76	3,45	3,20	3,01	2,84	—
1 „ 22 = 3,80 „	2,98	4,97	4,35	3,92	3,59	3,34	3,14	2,96	—
1 „ 23 = 4,18 „	3,26	5,16	4,52	4,07	3,73	3,46	3,26	3,08	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	5,37	4,70	4,23	3,88	3,60	3,39	3,20	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	5,61	4,91	4,42	4,06	3,77	3,54	3,34	—
1 „ 26 = 5,31 „	4,17	5,81	5,08	4,58	4,20	3,90	3,67	3,46	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	6,04	5,28	4,76	4,37	4,05	3,81	3,60	—
1 „ 28 = 6,16 „	4,84	6,25	5,47	4,93	4,51	4,20	3,94	3,72	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	6,47	5,66	5,10	4,68	4,34	4,08	3,85	—
1 „ 30 = 7,07 „	5,55	6,54	5,72	5,16	4,72	4,39	4,12	3,90	—
1 „ 31 = 7,55 „	5,93	6,87	6,01	5,41	4,97	4,62	4,33	4,09	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	7,12	6,23	5,62	5,15	4,78	4,48	4,24	—
1 „ 33 = 8,55 „	6,72	7,35	6,43	5,80	5,30	4,94	4,64	4,38	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	7,55	6,60	5,95	5,45	5,07	4,76	4,50	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	7,72	6,75	6,10	5,58	5,18	4,87	4,60	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	7,93	6,93	6,25	5,73	5,32	5,00	4,72	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	8,14	7,12	6,42	5,88	5,46	5,14	4,85	32
1 „ 38 = 11,34 „	8,90	8,33	7,28	6,56	6,02	5,60	5,25	4,96	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	8,53	7,45	6,72	6,16	5,73	5,38	5,08	—
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	8,77	7,68	6,91	6,34	5,90	5,53	5,22	—
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	8,95	7,84	7,05	6,46	6,00	5,65	5,33	37
1 „ 42 = 13,85 „	10,90	9,17	8,02	7,23	6,63	6,15	5,79	5,47	—
1 „ 43 = 14,52 „	11,40	9,38	8,20	7,40	6,78	6,30	5,91	5,58	—
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	9,64	8,43	7,60	6,96	6,47	6,08	5,74	42
1 „ 45 = 15,90 „	12,50	9,80	8,58	7,72	7,08	6,58	6,18	5,84	—

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5	7 ⌀ 5	9 ⌀ 5	10 ⌀ 5	11 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						30

Typ VIII.

Eigengewicht:

Platte	144 kg/m²,
Steg	69 „
Putz und Zelle	32 „
	g = 245 kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager 0,0887 m³,
Konstruktionshöhe 30 cm,
Statische Höhe 27 cm,
Entfernung der Stegmitten 1 m,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von f =							Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		100	200	300	400	500	600	700	
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite l =							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,62	2.46	2,16	1,95	1,80	1,67	1,57	1,48	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	2,70	2,37	2,14	1,97	1,84	1,73	1,63	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	2,94	2,59	2,34	2,15	2,00	1,88	1,77	
1 „ 13 = 1.33 „	1.04	3.19	2,81	2,54	2,33	2,17	2,04	1,93	
1 „ 14 = 1.54 „	1.21	3,44	3.02	2,73	2,51	2,34	2,20	2,07	
1 „ 15 = 1,77 „	1,39	3,68	3,24	2,92	2,69	2,51	2,36	2,22	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	3,92	3,45	3,12	2,87	2,67	2,51	2,36	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	4,17	3,66	3,32	3,05	2,84	2,67	2,51	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	4,41	3,88	3,50	3,23	3,00	2,82	2,66	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	4,66	4,10	3,70	3,41	3,17	2,98	2,81	—
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	4,90	4,31	3,90	3,58	3,34	3,14	2,95	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	5,14	4,52	4,09	3,76	3,50	3,29	3,10	—
1 „ 22 = 3,80 „	2,98	5,41	4.76	4.30	3,95	3,68	3,46	3,26	—
1 „ 23 = 4.18 „	3,26	5.54	4,88	4.40	4,05	3,77	3.55	3,34	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	5,84	5,14	4,64	4,27	3,98	3,74	3,52	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	6,04	5.31	4,80	4.42	4.11	3,86	3,64	—
1 „ 26 = 5,31 „	4.17	6,25	5.50	4,97	4,57	4.25	4,00	3,77	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	6,54	5,75	5,20	4,78	4,45	4,18	3,94	—
1 „ 28 = 6,16 „	4,84	6,78	5.96	5,39	4,95	4,62	4,34	4,08	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	7.03	6,18	5,59	5.14	4,78	4,50	4,23	—
1 „ 30 = 7.07 „	5,55	7,29	6,40	5,79	5,32	4,96	4,66	4,39	—
1 „ 31 = 7.55 „	5,93	7,50	6,60	5,96	5,48	5,10	4,80	4,52	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	7,70	6,78	6,12	5,63	5,24	4,93	4,64	—
1 „ 33 = 8,55 „	6,72	7,95	7,00	6,32	5,80	5,40	5,08	4,79	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	8,23	7,24	6,55	6,02	5,60	5,27	4,96	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	8.46	7,45	6,73	6,19	5,76	5,41	5.10	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	8.56	7,54	6,81	6,26	5,83	5,48	5,16	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	8,89	7.82	7,06	6,50	6,05	5,68	5,35	—
1 „ 38 = 11.34 „	8,90	9,14	8,04	7,27	6,68	6,22	5,85	5,51	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	9,34	8.22	7,42	6,83	6,35	5.97	5,63	32
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	9,62	8,45	7,65	7,03	6,55	6,15	5,80	—
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	9,88	8.70	7,85	7,22	6,72	6,32	5,95	—
1 „ 42 = 13,85 „	10.90	10,15	8,93	8,06	7,42	6,90	6,50	6.12	—
1 „ 43 = 14,52 „	11.40	10,35	9,10	8,23	7,56	7,05	6,62	6,24	37
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	10,60	9,32	8,42	7,75	7,20	6,78	6,40	—
1 „ 45 = 15.90 „	12,50	10,80	9,50	8,58	7,90	7,35	6,90	6,50	—
1 „ 46 = 16.62 „	13,05	11,00	9,68	8,75	8,05	7,48	7,04	6,63	—
1 „ 47 = 17,35 „	13,62	11,22	9,86	8,92	8,20	7,65	7,18	6,77	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5	7 ⌀ 5	9 ⌀ 5	10 ⌀ 5	11 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . σ_b =	**steigend bis . . . .**						30

Typ IX.

Eigengewicht:

Platte	144 kg/m²,
Steg	75 „
Putz und Zelle	32 „
	g = 251 kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,0915 m³**,
Konstruktionshöhe 32 cm,
Statische Höhe 29 cm.
Entfernung der Stegmitten **1 m**,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von f = 100	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite l =							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0.62	2,53	2,33	2.02	1,86	1,73	1,62	1,54	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	2,77	2,44	2,20	2,03	1,89	1,78	1,68	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	3.02	2,66	2,40	2,22	2,06	1,94	1,83	
1 „ 13 = 1,33 „	1,04	3,28	2,89	2,60	2,40	2,23	2,10	1.99	
1 „ 14 = 1,54 „	1,21	3.53	3,11	2,81	2,59	2,41	2,27	2,24	
1 „ 15 = 1,77 „	1,39	3,78	3,34	3,01	2,77	2,58	2,42	2,30	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	4,03	3,55	3,21	2,95	2,75	2,59	2,45	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	4,28	3,78	3.41	3,14	2,92	2,75	2,60	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	4,53	4,00	3,61	3,32	3,09	2,91	2,75	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	4,78	4,22	3,81	3,50	3,26	3,06	2,90	—
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	5,03	4,44	4,00	3,69	3,43	3,23	3,05	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	5,29	4,66	4,20	3,88	3,60	3,39	3,20	—
1 „ 22 = 3,80 „	2,98	5,54	4,88	4,40	4,06	3,78	3,55	3,36	—
1 „ 23 = 4,18 „	3,26	5,77	5,09	4.60	4,23	3,93	3,70	3,50	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	6,04	5,32	4,80	4,43	4,12	3,87	3,66	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	6,24	5,50	4,96	4,57	4,25	4,00	3.79	—
1 „ 26 = 5,31 „	4,17	6,44	5,68	5,12	4,72	4,39	4,13	3,91	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	6,71	5,92	5,34	4,92	4.58	4.30	4,07	—
1 „ 28 = 6,16 „	4.84	6,93	6,12	5,52	5,08	4,73	4,45	4,20	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	7,20	6,35	5,73	5,28	4,91	4,62	4,37	—
1 „ 30 = 7,07 „	5,55	7,47	6,58	5,95	5,48	5.10	4,85	4,53	—
1 „ 31 = 7,55 „	5,93	7,71	6,80	6,14	5,65	5,26	4,95	4,68	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	7,96	7,02	6,34	5,84	5,43	5,10	4,83	—
1 „ 33 = 8,55 „	6.72	8,22	7.25	6,55	6,03	5,60	5,27	4,98	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	8,40	7,40	6,68	6,15	5,72	5,38	5,10	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	8,74	7,70	6,95	6,41	5,96	5,60	5,30	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	9,00	7,95	7,16	6,60	6,14	5,77	5,46	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	9,20	8,12	7.32	6,75	6,27	5,90	5,58	—
1 „ 38 = 11,34 „	8,90	9,41	8,30	7,50	6,90	6,42	6,04	5,71	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	9,66	8,53	7,70	7,08	6,60	6,20	5,87	—
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	9,91	8,75	7,90	7,27	6,76	6,36	6,02	32
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	10,18	8,98	8,10	7,45	6,94	6,52	6,17	—
1 „ 42 = 13,85 „	10,90	10,44	9,20	8,32	7,65	7,12	6,70	6,34	—
1 „ 43 = 14,52 „	11,40	10,65	9,40	8,48	7,80	7,26	6,82	6,46	—
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	10,90	9,61	8,68	8,00	7,44	6,99	6,60	37
1 „ 45 = 15,90 „	12,50	11.10	9,80	8,84	8,15	7,57	7,11	6.73	—
1 „ 46 = 16,62 „	13,05	11,30	9,98	9,00	8,30	7,70	7,25	6,85	—
1 „ 47 = 17,35 „	13,62	11,58	10,20	9,20	8,48	7,90	7.41	7,02	42
1 „ 48 = 18,09 „	14,22	11,81	10,42	9,40	8,66	8,05	7,58	7,17	—

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5	7 ⌀ 5	9 ⌀ 5	10 ⌀ 5	11 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . σ_b =	steigend bis						30

Typ X.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 84 „
Putz und Zelle 32 „

$g = 260$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,095 m³**,
Konstruktionshöhe 35 cm,
Statische Höhe 32 cm,
Entfernung der Stegmitten **1 m**,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$							Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		100	200	300	400	500	600	700	
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,62	2,62	2,32	2,10	1,94	1,81	1,70	1,61	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	2,88	2,55	2,31	2,13	1,99	1,86	1,77	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	3.14	2,78	2,51	2,32	2,16	2,13	1,92	
1 „ 13 = 1,33 „	1,04	3,40	3,01	2,72	2,51	2,34	2,20	2,08	
1 „ 14 = 1,54 „	1,21	3,66	3,24	2,93	2,70	2,52	2,36	2,24	
1 „ 15 = 1.77 „	1,39	3,92	3,48	3,14	2,90	2,70	2,54	2,40	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	4,18	3,70	3,33	3,09	2,88	2,70	2,56	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	4,44	3,94	3,56	3,28	3,06	2,87	2,72	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	4,70	4,17	3,76	3,47	3,24	3,04	2,88	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	4,97	4,41	3,98	3,67	3,42	3,21	3,05	
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	5,23	4,63	4,19	3,86	3,60	3,38	3,20	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	5,48	4,85	4,39	4,05	3,78	3,54	3,36	—
1 „ 22 = 3,80 „	2,98	5,75	5,09	4,60	4,24	3,95	3,71	3,52	—
1 „ 23 = 4,18 „	3,26	6,03	5,35	4,83	4,45	4,15	3,90	3,70	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	6,23	5,52	5,00	4,60	4,29	4,03	3,82	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	6,49	5,75	5,20	4,79	4,47	4,19	3,97	—
1 „ 26 = 5,31 „	4,17	6,78	6,00	5,43	5,00	4,67	4,38	4,15	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	7,03	6,23	5,63	5,19	4,84	4,55	4,30	—
1 „ 28 = 6,16 „	4,84	7,28	6,45	5,83	5,38	5,02	4,70	4,45	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	7,49	6,63	6,00	5,53	5,16	4,84	4,58	—
1 „ 30 = 7,07 „	5,55	7,80	6,91	6,25	5,76	5,37	5,04	4,78	—
1 „ 31 = 7,55 „	5,93	8,07	7,16	6,47	5,96	5,55	5,21	4,95	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	8,33	7,38	6,68	6,15	5,74	5,38	5,10	—
1 „ 33 = 8,55 „	6,72	8,59	7,60	6,88	6,34	5,92	5,55	5,25	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	8,81	7,81	7,06	6,51	6,08	5,70	5,40	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	9,03	8,00	7,23	6,67	6,22	5,83	5,53	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	9,34	8,28	7,48	6,90	6,43	6,04	5,72	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	9,61	8,52	7,70	7,10	6,63	6,21	5,89	—
1 „ 38 = 11,34 „	8,90	9,81	8,70	7,86	7,25	6,75	6,35	6,00	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	10,05	8,90	8,05	7,43	6,92	6,50	6,15	
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	10,35	9,17	8,30	7,64	7,13	6,69	6,35	—
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	10,61	9,40	8,50	7,84	7,31	6,86	6,50	32
1 „ 42 = 13,85 „	10,90	10,84	9,60	8,68	8,00	7,47	7,00	6,65	—
1 „ 43 = 14,52 „	11,40	11,10	9,84	8,90	8,20	7,65	7,18	6,80	—
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	11,34	10,06	9,10	8,38	7,81	7,34	6,95	—
1 „ 45 = 15,90 „	12,50	11,60	10,28	9,30	8,56	8,00	7,50	7,10	37
1 „ 46 = 16,62 „	13,05	11,85	10,50	9,50	8,75	8,16	7,65	7,25	—
1 „ 47 = 17,35 „	13,62	12,08	10,70	9,68	8,92	8,32	7,80	7,40	—
1 „ 48 = 18,09 „	14,22	12,33	10,92	9,90	9,10	8,50	7,98	7,55	42
1 „ 49 = 18,86 „	14,80	12,60	11,15	10,10	9,30	8,68	8,15	7,70	—

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5	7 ⌀ 5	9 ⌀ 5	10 ⌀ 5	11 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	**steigend bis**						30

Typ XI.

Eisengewicht:

Platte	144 kg/m²
Steg	98 „
Putz und Zelle	32 „
	$g = 274$ kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,101 m³**,
Konstruktionshöhe 40 cm,
Statische Höhe 37 cm,
Entfernung der Stegmitten **1 m**,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von $f =$ 100	200	300	400	500	600	700	Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite $l =$							
1 ∅ 10 = 0,79 cm²	0,62	2,76	2,45	2,23	2,06	1,92	1,81	1,71	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	3,03	2,69	2,45	2,25	2,11	1,98	1,88	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	3,30	2,93	2,67	2,45	2,30	2,16	2,04	
1 „ 13 = 1,33 „	1,04	3,58	3,18	2,90	2,66	2,49	2,34	2,22	
1 „ 14 = 1,54 „	1,21	3,86	3,42	3,12	2.87	2,69	2,52	2,39	
1 „ 15 = 1,77 „	1,39	4,14	3,67	3,35	3,08	2,88	2,70	2,56	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	4,40	3,90	3,56	3,27	3,06	2,88	2,72	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	4,68	4,15	3,78	3,48	3,26	3.06	2,90	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	4,95	4,40	4,00	3,68	3,44	3.23	3,06	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	5,26	4,67	4,25	3,91	3,66	3,43	3,25	—
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	5,50	4,88	4,45	4.08	3,83	3,59	3,40	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	5,78	5,13	4,68	4,30	4,03	3,78	3,58	—
1 „ 22 = 3,80 „	2.98	6,06	5,38	4,90	4,51	4,22	3,96	3,75	—
1 „ 23 = 4,18 „	3,26	6,35	5.64	5,13	4,72	4,42	4,15	3,92	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	6,61	5,87	5,35	4,92	4,60	4,32	4,08	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	6,90	6,12	5,58	5,13	4,80	4,50	4,27	—
1 „ 26 = 5,31 „	4,17	7,20	6,39	5,82	5,35	5,01	4,70	4,45	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	7,50	6 65	6,06	5,58	5,22	4,90	4,63	—
1 „ 28 = 6,16 „	4,84	7,81	6.93	6.31	5,82	5,44	5,10	4,83	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	8,06	7,15	6,51	6,00	5,62	5,26	4,98	—
1 „ 30 = 7,07 „	5,55	8 30	7,35	6,70	6,18	5,77	5,42	5,13	—
1 „ 31 = 7,55 „	5,93	8.54	7,58	6,90	6,35	5,94	5,57	5,28	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	8,86	7,86	7.16	6,60	6,17	5,80	5,48	—
1 „ 33 = 8,55 „	6,72	9,14	8,11	7,39	6,80	6,35	5,97	5,65	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	9,43	8,37	7,62	7,02	6,56	6,16	5.82	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	9,62	8,54	7,78	7,15	6,70	6,28	5,95	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	9,86	8,75	7,96	7,34	6,86	6,45	6,10	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	10,12	8,98	8,18	7,52	7,05	6,62	6,26	—
1 „ 38 = 11,34 „	8,90	10.43	9,26	8,44	7,75	7,26	6,82	6,45	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	10,65	9,45	8,60	7,92	7,40	6,95	6,58	—
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	10,97	9,72	8,85	8,15	7,64	7,16	6,78	—
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	11,23	9,98	9,08	8,35	7,81	7,34	6,95	—
1 „ 42 = 13,85 „	10,90	11,52	10,22	9,32	8,58	8,02	7,53	7,13	32
1 „ 43 = 14,52 „	11,40	11.77	10,45	9,50	8,75	8,18	7,68	7,28	—
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	12,03	10,68	9,72	8,95	8,37	7,85	7,45	—
1 „ 45 = 15,90 „	12,50	12,30	10,90	9,95	9,15	8,55	8,04	7,60	37
1 „ 46 = 16,62 „	13,05	12,58	11,15	10,18	9,35	8,75	8,20	7,77	—
1 „ 47 = 17,35 „	13,62	12,80	11,36	10,33	9,50	8,90	8,35	7,90	—
1 „ 48 = 18,09 „	14,22	13,08	11,60	10,58	9,70	9,10	8,55	8,08	—
1 „ 49 = 18,86 „	14,80	13,36	11,85	10,80	9,94	9,30	8,72	8,26	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ∅ 5	5 ∅ 5	6 ∅ 5	7 ∅ 5	9 ∅ 5	10 ∅ 5	11 ∅ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . $\sigma_b =$	steigend bis						30

Typ XII.

Eigengewicht:

Platte . . . . 144 kg/m²,
Steg . . . . . 112 „
Putz und Zelle 32 „

g = 288 kg/m².

Betonaufwand für 1 m² ohne Auflager **0,1067 m³**,
Konstruktionshöhe 45 cm,
Statische Höhe 42 cm,
Entfernung der Stegmitten **1 m**,
Stegdicke 12 cm,
Plattenstärke 6 cm,
Moment $M = \frac{Ql}{10}$,
Eisenzugspannung σ_e = 1000 kg/cm².

In jeder Rippe angeordnetes Eisen	Eisenaufwand in den Rippen ohne Auflager kg/m²	Bei einer Fremdlast von f =							Kantenpressung im Rippenbalken zur Auswahl des Mischungsverhältnisses
		100	200	300	400	500	600	700	
		in kg/m² ist die zulässige Spannweite l =							
1 ⌀ 10 = 0,79 cm²	0,62	2,91	2,59	2,36	2,18	2,04	1,92	1,82	
1 „ 11 = 0,95 „	0,75	3,19	2,83	2,58	2,39	2,23	2,10	2,00	
1 „ 12 = 1,13 „	0,89	3,48	3,09	2,82	2,60	2,43	2,30	2,18	
1 „ 13 = 1,33 „	1,04	3,77	3,35	3,06	2,82	2,64	2,49	2,36	
1 „ 14 = 1,54 „	1,21	4,06	3,61	3,29	3,04	2,84	2,68	2,54	
1 „ 15 = 1,77 „	1,39	4,35	3,86	3,53	3,26	3,04	2,87	2,72	
1 „ 16 = 2,01 „	1,58	4,64	4,12	3,76	3,47	3,24	3,06	2,90	
1 „ 17 = 2,27 „	1,78	4,93	4,38	3,99	3,69	3,45	3,25	3,08	
1 „ 18 = 2,54 „	2,00	5,21	4,63	4,22	3,90	3,65	3,44	3,26	
1 „ 19 = 2,84 „	2,23	5,51	4,90	4,47	4,12	3,86	3,64	3,45	—
1 „ 20 = 3,14 „	2,47	5,80	5,15	4,70	4,33	4,05	3,82	3,62	—
1 „ 21 = 3,46 „	2,72	6,08	5,40	4,93	4,55	4,25	4,02	3,81	—
1 „ 22 = 3,80 „	2,98	6,37	5,66	5,17	4,77	4,46	4,21	3,99	—
1 „ 23 = 4,18 „	3,26	6,68	5,94	5,42	5,00	4,67	4,41	4,18	—
1 „ 24 = 4,52 „	3,56	6,95	6,18	5,63	5,20	4,86	4,60	4,35	—
1 „ 25 = 4,91 „	3,86	7,25	6,45	5,88	5,42	5,07	4,79	4,54	—
1 „ 26 = 5,31 „	4,17	7,55	6,70	6,12	5,65	5,28	4,98	4,72	—
1 „ 27 = 5,73 „	4,50	7,88	7,00	6,38	5,90	5,51	5,20	4,94	—
1 „ 28 = 6,16 „	4,84	8,17	7,26	6,62	6,12	5,72	5,40	5,12	—
1 „ 29 = 6,60 „	5,19	8,46	7,52	6,86	6,34	5,93	5,59	5,30	—
1 „ 30 = 7,07 „	5,55	8,74	7,77	7,09	6,55	6,12	5,77	5,47	—
1 „ 31 = 7,55 „	5,93	8,98	7,98	7,28	6,73	6,28	5,93	5,62	—
1 „ 32 = 8,04 „	6,32	9,26	8,23	7,51	6,95	6,48	6,12	5,80	—
1 „ 33 = 8,55 „	6,72	9,58	8,50	7,76	7,18	6,70	6,32	6,00	—
1 „ 34 = 9,08 „	7,13	9,88	8,78	8,00	7,40	6,91	6,52	6,18	—
1 „ 35 = 9,62 „	7,55	10,18	9,05	8,25	7,61	7,12	6,72	6,37	—
1 „ 36 = 10,18 „	8,00	10,44	9,28	8,47	7,82	7,30	6,90	6,54	—
1 „ 37 = 10,75 „	8,45	10,64	9,46	8,62	7,98	7,45	7,03	6,66	—
1 „ 38 = 11,34 „	8,90	10,91	9,70	8,85	8,20	7,65	7,21	6,85	—
1 „ 39 = 11,94 „	9,38	11,24	10,00	9,12	8,42	7,86	7,43	7,05	—
1 „ 40 = 12,56 „	9,87	11,50	10,20	9,33	8,60	8,05	7,60	7,30	—
1 „ 41 = 13,20 „	10,38	11,80	10,50	9,55	8,84	8,26	7,80	7,38	—
1 „ 42 = 13,85 „	10,90	12,10	10,75	9,80	9,05	8,46	8,00	7,57	32
1 „ 43 = 14,52 „	11,40	12,38	11,00	10,00	9,28	8,65	8,18	7,75	—
1 „ 44 = 15,20 „	11,95	12,65	11,25	10,25	9,47	8,85	8,35	7,92	—
1 „ 45 = 15,90 „	12,50	12,92	11,50	10,50	9,68	9,05	8,53	8,10	—
1 „ 46 = 16,62 „	13,05	13,22	11,75	10,72	9,90	9,25	8,73	8,28	37
1 „ 47 = 17,35 „	13,62	13,48	11,96	10,92	10,10	9,46	8,90	8,44	—
1 „ 48 = 18,09 „	14,22	13,75	12,22	11,15	10,30	9,64	9,08	8,60	—
1 „ 49 = 18,86 „	14,80	14,06	12,50	11,40	10,52	9,83	9,28	8,80	—
1 „ 50 = 19,63 „	15,41	14,33	12,75	11,63	10,75	10,03	9,48	8,97	42

Erfordernis in der Platte:

Bewehrung auf 1 m Breite	5 ⌀ 5	5 ⌀ 5	6 ⌀ 5	7 ⌀ 5	9 ⌀ 5	10 ⌀ 5	11 ⌀ 5
Aufwand an Eisen kg/m²	0,77	0,77	0,93	1,08	1,40	1,55	1,70
Zur Wahl des Mischungsverhältnisses . . σ_b =	steigend bis						30

C. Rundeisen-Tabellen.

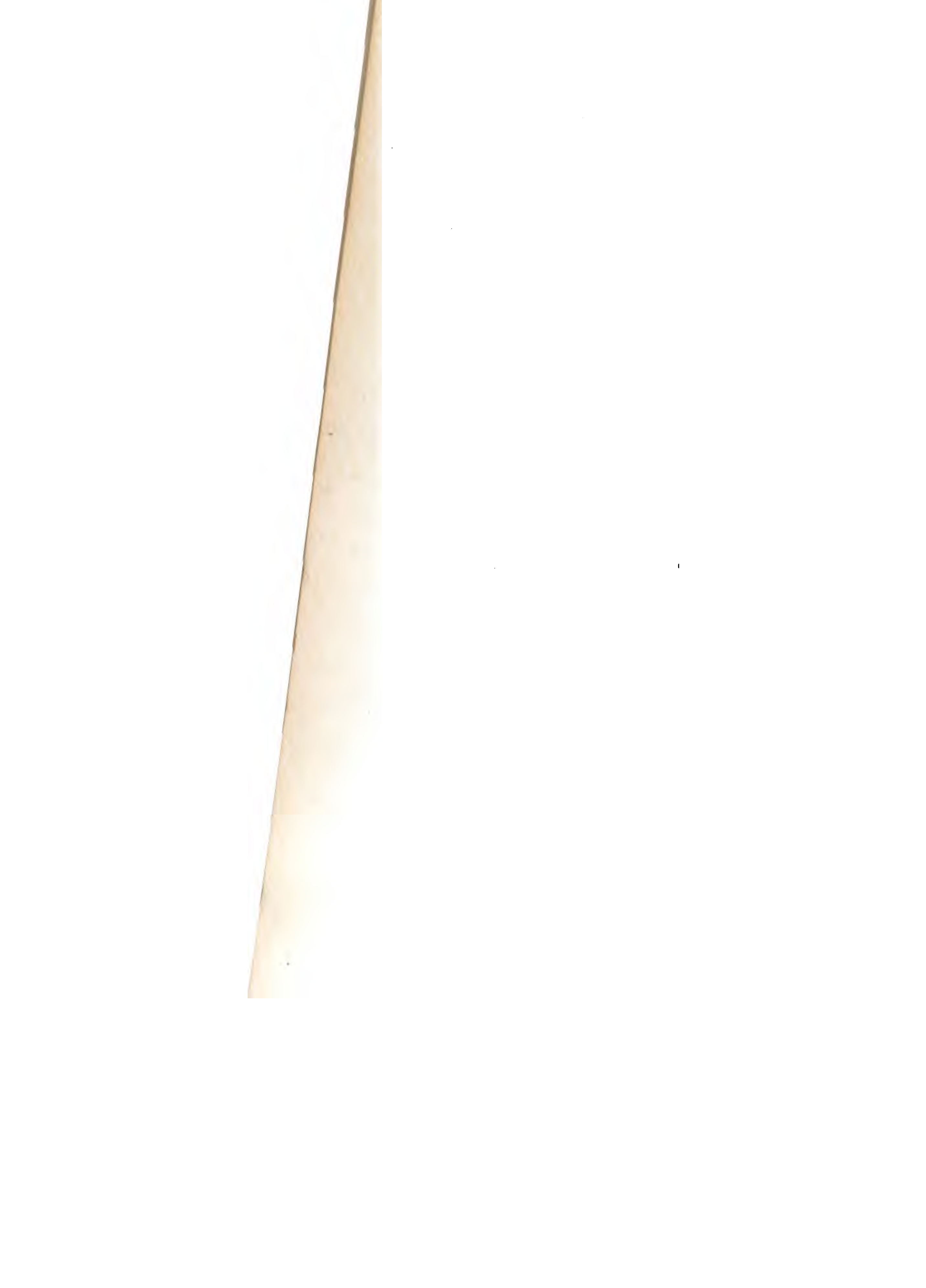
R.-E.	Fläche									
	Stückzahl									
mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,008	0,016	0,024	0,031	0,039	0,047	0,055	0,063	0,071	0,08
2	0,031	0,063	0,094	0,128	0,157	0,188	0,219	0,25	0,28	0,31
3	0,07	0,14	0,21	0,28	0,35	0,42	0,49	0,56	0,63	0,70
4	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,76	0,89	1,00	1,13	1,26
5	0,20	0,39	0,59	0,78	0,98	1,18	1,38	1,57	1,77	1,96
6	0,28	0,56	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,82
7	0,38	0,77	1,15	1,54	1,92	2,31	2,69	3,08	3,46	3,84
8	0,50	1,00	1,51	2,01	2,51	3,01	3,51	4,02	4,52	5,02
9	0,64	1,27	1,91	2,54	3,18	3,82	4,46	5,08	5,72	6,36
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85
11	0,95	1,90	2,85	3,80	4,75	5,70	6,65	7,60	8,55	9,50
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31
13	1,33	2,65	3,98	5,31	6,64	7,96	9,29	10,62	11,95	13,27
14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,86	15,39
15	1,77	3,53	5,30	7,07	8,84	10,60	12,37	14,14	15,91	17,67
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,09	20,11
17	2,27	4,54	6,81	9,08	11,35	13,62	15,89	18,16	20,43	22,70
18	2,54	5,09	7,63	10,18	12,72	15,26	17,80	20,36	22,90	25,45
19	2,84	5,67	8,51	11,34	14,18	17,02	19,86	22,68	25,54	28,35
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,84	21,98	25,14	28,28	31,42
22	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61	30,41	34,21	38,01
24	4,52	9,05	13,57	18,10	22,62	27,14	31,66	36,19	40,71	45,24
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09
26	5,31	10,62	15,93	21,24	26,55	31,86	37,17	42,47	47,78	53,10
28	6,16	12,31	18,47	24,63	30,79	36,94	43,10	49,26	55,44	61,58
30	7,07	14,14	21,21	28,27	35,34	42,41	49,48	56,55	63,62	70,68
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,26	56,30	64,34	72,38	80,42
34	9,08	18,16	27,24	36,32	45,60	54,48	63,56	72,63	81,71	90,79
35	9,62	19,24	28,86	38,48	48,11	57,73	67,35	76,97	86,59	96,21
36	10,18	20,36	30,54	40,72	50,90	61,07	71,25	81,43	91,61	101,8
38	11,34	22,68	34,02	45,36	56,70	68,04	79,38	90,73	102,1	113,4
40	12,56	25,13	37,70	50,26	62,83	75,40	87,96	100,5	113,1	125,7
42	13,85	27,71	41,56	55,42	69,25	83,12	96,97	110,8	124,7	138,5
44	15,20	30,41	45,61	60,82	76,00	91,23	106,4	121,6	136,8	152,1
45	15,90	31,81	47,71	63,62	79,50	95,42	111,3	127,2	143,1	159,0
46	16,62	33,24	49,86	66,48	83,10	99,71	116,3	133,0	149,6	166,2
48	18,09	36,19	54,29	72,38	90,48	108,6	126,7	144,8	162,9	181,0
50	19,63	39,27	58,90	78,54	98,17	117,8	137,4	157,0	176,6	196,3

Sind Rundeisen, deren Einzelquerschnitt die Fläche φ cm² hat, in „Maschenweite" e cm verlegt, so entfällt auf 1 m Breite der Querschnitt $f_e = \frac{100 \cdot \varphi}{e}$. Die erforderliche Maschenweite berechnet sich für die gegebenen bezw. gewählten Größen f_e und φ zu $e = \frac{100 \cdot \varphi}{f_e}$.

R.-E.	Umfang									
	Stückzahl									
mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55	1,86	2,17	2,48	2,79	3,1
2	0,63	1,26	1,89	2,52	3,15	3,78	4,41	5,04	5,67	6,3
3	0,94	1,88	2,82	3,76	4,70	5,64	6,58	7,52	8,46	9,4
4	1,26	2,52	3,78	5,04	6,30	7,56	8,82	10,08	11,34	12,6
5	1,57	3,14	4,71	6,28	7,85	9,42	10,99	12,56	14,13	15,7
6	1,80	3,78	5,67	7,56	9,45	11,34	13,23	15,12	17,02	18,9
7	2,20	4,40	6,60	8,80	11,00	13,20	15,40	17,60	19,80	22,0
8	2,51	5,02	7,53	10,04	12,55	15,06	17,57	20,08	22,59	25,1
9	2,83	5,66	8,49	11,32	14,15	16,98	19,81	22,64	25,47	28,3
10	3,14	6,28	9,42	12,56	15,70	18,84	21,98	25,12	28,26	31,4
11	3,46	6,92	10,38	13,84	17,30	20,76	24,22	27,68	31,14	34,6
12	3,77	7,54	11,31	15,08	18,85	22,62	26,39	30,16	33,93	37,7
13	4,08	8,16	12,24	16,32	20,40	24,48	28,56	32,64	36,72	40,8
14	4,40	8,80	13,20	17,60	22,00	26,40	30,80	35,80	39,60	44,0
15	4,71	9,42	14,13	18,84	23,55	28,26	32,97	37,68	42,39	47,1
16	5,03	10,06	15 09	20,12	25,15	30,18	35,21	40,24	45,27	50,3
17	5,34	10,68	16,02	21,36	26,70	32,04	37,38	42,72	48,06	53,4
18	5,66	11,32	16,98	22,64	28,30	33,96	39,62	45,28	50,94	56,6
19	5,97	11,94	17,91	23,88	29,85	35,82	41,79	47,76	53,73	59,7
20	6,28	12,56	18,84	25,12	31,40	37,68	43,96	50,24	56,52	62,8
22	6,91	13,82	20,73	27,64	34,55	41,46	48,37	55,28	62,19	69,1
24	7,54	15,08	22,62	30,16	37,70	45,24	52,78	60,32	67,85	75,4
25	7,85	15,70	23,55	31,40	39,50	47,10	54,95	62,80	70,65	78,5
26	8,17	16,34	24,51	32,68	40,85	49,02	57,19	65,36	73,53	81,7
28	8,80	17,60	26,40	35,20	44,00	52,80	61,60	70,40	79,20	88,0
30	9,43	18,86	28,29	37,72	47,15	56,58	66,01	75,44	84,87	94,3
32	10,05	20,10	30,15	40,20	50,25	60,30	70,35	80,40	90,45	100,5
34	10,68	21,36	32,04	42,72	53,40	64,08	74,76	85,44	96,12	106,8
35	11,00	22,00	33,00	44,00	55,00	66,00	77,00	88,00	99,00	110,0
36	11,31	22,62	33,93	45,24	56,55	67,86	79,17	90,48	101,79	113,1
38	11,94	23,88	35,82	47,76	59,70	71,64	83,58	95,52	107,46	119,4
40	12,57	25,14	37,71	50,28	62,85	75,42	87,99	100,56	113,13	125,7
42	13,20	26,40	39,60	52,80	66,00	79,20	92,40	105,60	118,80	132,0
44	13,82	27,64	41,46	55,28	69,10	82,92	96,74	110,56	124,38	138,2
45	14,14	28,28	42,42	56,56	70,70	84,84	98,98	113,12	127,26	141,4
46	14,45	28,90	43,35	57,80	72,25	86,70	101,15	115,60	130,05	144,5
48	15,08	30,16	45,24	60,32	75,40	90,48	105,56	120,64	135,72	150,8
50	15,71	31,42	47,13	62,84	78,55	94,26	109,97	125,68	141,39	157,1

R.-E.	$n \cdot f_e = (15 \cdot f_e)$									
	Stückzahl									
mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60	0,72	0,84	0,96	1.08	1,20
2	0,465	0,93	1,40	1,86	2,33	2,79	3,26	3,72	4,19	4,65
3	1,05	2,10	3,15	4.20	5,25	6,30	7,35	8,40	9,45	10,50
4	1,95	3,90	5,85	7,80	9,75	11,70	13,65	15,60	17.55	19,50
5	3.00	6,00	9,00	12,00	15,00	18,00	21,00	24,00	27,00	30,00
6	4,20	8,40	12,60	16.80	21,00	25,20	29,40	33,60	37,80	42,00
7	5,70	11,40	17,10	22,80	28,50	34.20	39,90	45,60	51,30	57,00
8	7,50	15,00	22,50	30,00	37,50	45,00	52,50	60,00	67,50	75.00
9	9,60	19,20	28,80	38,40	48,00	57,60	67,20	76,80	86,40	96,00
10	11,85	23,70	35,55	47,40	59,25	71,10	82,95	94,80	106.25	118,50
11	14,25	28,50	42,75	57,00	71,25	85,50	99,75	114,00	128,25	142,50
12	17,00	33,90	50,85	67,80	84,75	101,70	118.65	135,60	152.55	169,50
13	19,95	39,90	59,85	79,80	99,75	119,70	139,65	159,60	179,55	199,50
14	23,10	46,20	69,30	92,40	115,50	138,60	161,70	184,80	207,90	231,00
15	26,55	53,10	79,65	106,20	132,75	159,30	185,85	212,40	238.95	265,50
16	30,15	60,30	90,45	120.60	150,75	180,90	211,05	241,20	271,35	301.50
17	34,05	68,10	102,15	136,20	170,25	204.30	238.35	272,40	306,45	340,50
18	38,10	76,20	114,30	152,40	190,50	228.60	266,70	304.80	342,90	381,00
19	42,60	85,20	127,80	170,40	213,00	255,60	298,20	340,80	383,40	426,00
20	47,10	94,20	141,30	188,40	235,50	282.60	329,70	376,80	423,90	471,00
22	57,00	114,00	171,00	228,00	285,00	342,00	399,00	456.00	513,00	570.00
24	67,80	135,60	203,40	271,20	339,00	406,80	474,60	542,40	610,20	678.00
25	73,65	147,30	220,95	294,60	368.25	441,90	515,55	589,20	662,85	736.50
26	79,65	159,30	238,95	318,60	398,25	477,90	557,55	637,20	716.85	796,50
28	92,40	184,80	277,20	869,60	462,00	554,40	646,80	739,20	831,60	924.00
30	106,05	212,10	318,15	424,20	530,25	636,30	742,35	848,4	954,45	1060,5
32	120,60	241,2	361,8	482,4	603,0	723,6	844,2	964.8	1085,4	1206
34	136.20	272,4	403,6	544,8	681,0	817,2	953,4	1089,6	1225,8	1362
35	144.30	288,6	432,9	577,2	721.5	865,8	1010,1	1154,4	1298,7	1443
36	152,70	305,4	458,1	610,8	763,5	916,2	1068,9	1221,6	1374,3	1527
38	170,10	340,2	510,3	680,4	850,5	1020,6	1190,7	1360,8	1530.9	1701
40	188,40	376,8	565,2	753,6	942,0	1130,4	1318,8	1507,2	1695,6	1884
42	207,75	415,5	623,3	831,0	1038,8	1246,5	1454,3	1662,0	1869,8	2078
44	228.00	456,0	684,0	912,0	1140,0	1368.0	1596.0	1824,0	2052,0	2280
45	238.50	477,0	715,5	954,0	1192.5	1431,0	1669,5	1908,0	2146,5	2385
46	249,30	498,6	747,9	997,2	1246,5	1495,8	1745,1	1994,4	2243,7	2493
48	271.35	542,7	814,1	1085,4	1356.8	1628,1	1899,5	2170,8	2442,2	2714
50	294,45	588,9	883,4	1177,8	1472,3	1766,7	2061,2	2355,6	2650,1	2945

R.-E.	Gewicht in kg für 1 lfd. m									
	Stückzahl									
mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0,036	0,042	0,048	0,054	0,06
2	0,024	0,048	0,072	0,096	0,120	0,144	0,168	0,192	0,216	0,24
3	0,055	0,110	0,165	0,220	0,275	0,330	0,385	0,440	0,495	0,55
4	0,098	0,196	0,294	0,392	0,490	0,588	0,686	0,784	0,882	0,99
5	0,153	0,306	0,459	0,612	0,765	0,918	1,071	1,224	1,377	1,53
6	0,220	0,440	0,660	0,880	1,100	1,320	1,540	1,760	1,980	2,20
7	0,300	0,600	0,900	1,200	1,500	1,800	2,100	2,400	2,700	3,00
8	0,392	0,784	1,176	1,568	1,960	2,352	2,744	3,136	3,528	3,92
9	0,496	0,992	1,488	1,984	2,480	2,976	3,472	3,968	4,464	4,96
10	0,613	1,228	1,839	2,452	3,065	3,678	4,291	4,899	5,517	6,13
11	0,740	1,480	2,220	2,960	3,700	4,440	5,180	5,920	6,660	7,40
12	0,881	1,762	2,643	3,524	4,405	5,286	6,167	7,048	7,929	8,81
13	1,035	2,070	3,105	4,140	5,175	6,210	7,245	8,280	9,315	10,35
14	1,201	2,402	3,603	4,804	6,005	7,206	8,407	9,608	10,809	12,01
15	1,378	2,756	4,134	5,512	6,890	8,268	9,646	11,024	12,402	13,78
16	1,568	3,136	4,704	6,272	7,840	9,408	10,976	12,544	14,112	15,68
17	1,770	3,540	5,310	7,080	8,850	10,620	12,390	14,160	15,930	17,70
18	1,985	3,970	5,955	7,940	9,925	11,910	13,895	15,880	17,865	19,85
19	2,212	4,424	6,636	8,848	11,060	13,272	15,484	17,696	19,908	22,12
20	2,450	4,900	7,350	9,800	12,250	14,700	17,160	19,600	22,050	24,50
22	2,965	5,930	8,895	11,860	14,825	17,790	20,755	23,720	26,685	29,65
24	3,529	7,058	10,587	14,116	17,645	21,174	24,703	28,232	31,761	35,29
25	3,829	7,658	11,487	15,316	19,145	22,974	26,803	30,632	34,461	38,29
26	4,141	8,282	12,423	16,564	20,705	24,846	28,987	33,128	37,269	41,41
28	4,803	9,606	14,409	19,212	24,015	28,818	33,612	38,424	43,227	48,03
30	5,513	11,026	16,539	22,052	27,565	33,078	38,591	44,104	49,617	55,13
32	6,273	12,546	18,819	25,092	31,365	37,638	43,911	50,184	56,457	62,73
34	7,082	14,164	21,246	28,328	35,410	42,492	49,574	56,656	63,738	70,82
35	7,500	15,000	22,500	30,000	37,500	45,000	52,500	60,000	67,500	75,00
36	7,939	15,878	23,817	31,756	39,695	47,643	55,573	63,512	71,451	79,39
38	8,846	17,692	26,538	35,384	44,230	53,076	61,922	70,768	79,614	88,46
40	9,802	19,604	29,406	39,208	49,010	58,812	68,614	78,416	88,218	98,02
42	10,806	21,612	32,418	43,224	54,030	64,836	75,642	86,448	97,254	108,06
44	11,860	23,720	35,580	47,440	59,300	71,160	83,020	94,880	106,740	118,60
45	12,448	24,960	37,440	49,920	62,400	74,880	87,360	99,840	112,320	124,80
46	12,948	25,896	38,844	51,792	64,740	77,688	90,636	103,584	116,532	129,48
48	14,115	28,230	42,345	56,460	70,575	84,690	98,805	112,920	127,035	141,15
50	15,315	30,630	45,945	61,260	76,575	91,890	107,205	122,520	137,835	153,15



Forscherarbeiten a. d. Gebiete des Eisenbetons.

Heft 1: **Untersuchungen über die Dehnungsfähigkeit nicht armierten und armierten Betons.** Von A. Kleinlogel.
1904. Geh. Preis 4 Mk.

Heft 2: **Graphostatische Untersuchung der Beton- und Betoneisenträger.** Von Dr. Ing. P. Weiske.
1904. Geh. Preis 4 Mk.

Heft 3: **Die Rolle der Haftfestigkeit im Verbundbalken.** Von Dr. Ing. F. v. Emperger, k. k. Baurat.
1905. Geh. Preis 4 Mk.

Heft 4: **Formänderungsarbeit der Eisenbetonbauten bei Biegung.** Von Ingenieur K. Grabowski.
1906. Geh. Preis 4 Mk.

Heft 5: **Die Abhängigkeit der Bruchlast vom Verbunde und die Mittel zur Erhöhung der Tragfähigkeit von Balken aus Eisenbeton.** Von Dr. Ing. F. v. Emperger, k. k. Baurat.
1906. Geh. Preis 3 Mk.

Heft 6: **Das Zusammenwirken von Beton u. Eisen.** Von Ingenieur E. Probst, Zürich.
1906. Geh. Preis 3 Mk.

Heft 7: **Monolität der Betonbauten.** Von N. v. Shitkewitsch, Ingenieur-Oberst, Professor der Kaiserlichen Ingenieur-Akademie zu Petersburg.
1906. Geh. Preis 5 Mk.

Heft 8: **Versuche mit Säulen aus Eisenbeton und mit einbetonierten Eisensäulen.** Von Dr. Ing. F. v. Emperger, k. k. Baurat.
1908. Geh. Preis 5 Mk.

Heft 9: **Berechnung der gekreuzt armierten Eisenbetonplatte und deren Aufnahmeträger unter Berücksichtigung der Kraftwirkungen nach zwei Richtungen.** Von Joh. Bapt. Basch, Dipl.-Ing. und Städt. Bauamtmann, München.
1908. Geh. Preis 3,60 Mk.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin S.W.

